UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class 537 Book M37t Volume 2

REMOTE STORAGE

Mr10-20M

Return this book on or before the **Latest Date** stamped below. A charge is made on all overdue books.

U. of I. Library

M32

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME

Les *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* ont été publiées en 2 volumes :

TOME PREMIER. — Phénomènes généraux et théorie.

TOME SECOND. — Méthodes de mesure et applications.

Chaque volume est vendu séparément 25 francs.
Le prix des 2 volumes pris ensemble est fixé à 45 francs.

792-95. — CORBEIL. Imprimerie ÉD. CRÉTÉ.

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME

DE

E. MASCART ET J. JOUBERT

DEUXIÈME ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE

PAR

E. MASCART

MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE
DIRECTEUR DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE

TOME SECOND

MÉTHODES DE MESURE ET APPLICATIONS

Avec 160 Figures dans le texte.

PARIS

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, Boulevard Saint-Germain

GAUTHIER-VILLARS ET FILS
IMPRIMEURS-ÉDITEURS
Quai des Grands-Augustins, 55

1897

537
M37l
v.2

Droits de traduction et reproduction réservés.

REMOTE STORAGE

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ ET LE MAGNÉTISME

TOME DEUXIÈME

PREMIÈRE PARTIE. — MÉTHODES DE MESURE

CHAPITRE PREMIER

MESURES MÉCANIQUES

LONGUEURS, MASSES ET ANGLES

518. Longueurs. — Nous n'avons pas à insister ici sur la mesure des longueurs rectilignes; ce sont les opérations les plus fréquentes de la physique et elles ne présentent aucune difficulté particulière quand on ne cherche pas à atteindre les dernières limites de la précision. Nous nous bornerons à rappeler quelques-unes des corrections qu'elles entraînent.

La *règle* employée pour la mesure des longueurs est habituellement divisée en millimètres. Quelle que soit d'ailleurs la valeur des divisions, on évalue les fractions de division, soit par un vernier, soit par une lunette à micromètre; il est clair aussi que l'exactitude donnée par un mode quelconque de subdivision ne peut pas dépasser la précision avec laquelle la règle a été graduée.

167501

La règle doit donc être étudiée au point de vue de l'égalité des divisions et l'on fera, au besoin, une table de leurs rapports à la valeur moyenne a.

D'autre part, il faut connaître la correction ε, positive ou négative, de la règle à zéro, c'est-à-dire la différence de la valeur nominale L à la longueur réelle L, $\mathrm{L} = L + \varepsilon$, ou la température normale t_0, généralement peu éloignée des températures ordinaires, pour laquelle la règle devient exacte. On a alors, en appelant λ le coefficient de dilatation linéaire,

$$\mathrm{L} = L + \varepsilon = L(1 + \lambda t_0), \quad \varepsilon = L\lambda t_0.$$

La longueur réelle à zéro d'une division moyenne de valeur nominale a est $\frac{a}{1 + \lambda t_0}$ et sa longueur à la température t peut s'écrire, avec une approximation suffisante,

$$a\frac{1 + \lambda t}{1 + \lambda t_0} = a\left[1 + \lambda(t - t_0)\right].$$

La longueur l d'un objet mesuré ainsi par n divisions, ou une lecture $m = na$ de la règle, est donc

$$(1) \qquad l = m\left[1 + \lambda(t - t_0)\right].$$

Si cet objet se trouve lui-même à la température t' et que λ' soit son coefficient de dilatation, sa longueur à zéro est

$$l_0 = \frac{l}{1 + \lambda' t'} = m\left[1 + \lambda(t - t_0) - \lambda' t'\right].$$

Tel est le cas, par exemple, des observations barométriques. La hauteur réelle de la colonne de mercure étant donnée par l'équation (1), si α est le coefficient de dilatation cubique du mercure, la hauteur l_0 de la colonne à zéro qui ferait équilibre à la même pression est

$$l_0 = \frac{l}{1 + \alpha t'} = m\left[1 + \lambda(t - t_0) - \alpha t'\right].$$

Pour le verre et les métaux usuels, les valeurs du coefficient

COURSE	INSTRUCTOR
BOOKS	
CALL #	CALL #
SPEC RES	
#	#

COURSE & INSTRUCTOR MUST BE GIVEN AS FOUND IN THE COURSE FILE

CALL # AND SPEC RES # MUST BE COPIED AS FOUND IN THE UPPER LEFT-HAND CORNER OF THE COURSE CARD

IF THE MATERIAL YOU WANT IS NOT IN THE COURSE FILE THEN IT HAS NOT YET BEEN PLACED ON RESERVE: CONSULT THE REFERENCE DESK FOR MORE INFORMATION

PRESENT YOUR ID WITH THIS CARD

537
M37 l

de dilatation varient de 8.10^{-6} à 20.10^{-6} ; une variation de température de 10° donnerait donc au maximum une correction de 2 dix-millièmes, qui sera le plus souvent négligeable. La dilatation du mercure est voisine de 18.10^{-5}.

519. Masses. — La *balance* permet de constater l'égalité de deux poids apparents. Si P est le poids réel du corps pesé, ϖ les poids marqués qui lui font équilibre, D, Δ et δ les poids spécifiques du corps, des poids marqués et de l'air, on a

$$P\left(1-\frac{\delta}{D}\right)=\varpi\left(1-\frac{\delta}{\Delta}\right);$$

$$P=\varpi\left[1-\delta\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{D}\right)\right].$$

Le rapport des valeurs P et ϖ représente le rapport des *masses* du corps et des étalons.

Pour donner une idée du terme de correction, on a réuni dans le tableau suivant les valeurs relatives à différents corps, quand on suppose l'air à la température de zéro et à la pression normale de 76 centimètres :

	D	$\frac{\delta}{D}$	$\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\delta}{D}$ Poids en laiton.	$\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\delta}{D}$ Poids en platine.
Platine.....	21,30	$60,10^{-6}$	$94,10^{-6}$	0
Mercure.....	13,59	95 »	59 »	$-15,10^{-6}$
Cuivre.....	8,85	146 »	8 »	—86 »
Laiton.....	8,40	154 »	0 »	—94 »
Aluminium...	2,73	473 »	—319 »	—413 »
Eau.....	1,00	1293 »	—1139 »	—1233 »

Avec des poids en laiton, le terme correctif dans les pesées de métaux reste beaucoup au-dessous du dix-millième, sauf pour le platine d'un côté et l'aluminium de l'autre. Il n'y a pas d'ailleurs à tenir compte des changements de densité résultant des variations de la température, car ils n'amènent pas de modifications de l'ordre des millièmes dans les termes correctifs eux-mêmes.

Ces corrections aux pesées ont une importance relative

beaucoup plus grande quand le corps que l'on a en vue fait partie d'un système beaucoup plus lourd et que le poids doit en être obtenu par différence, comme dans les analyses chimiques, par exemple.

520. Mesures angulaires. — L'évaluation d'un angle, qui est en réalité un nombre abstrait, se ramène à la mesure d'une longueur, ou plus exactement à la comparaison de deux longueurs. Comme ce problème se présente souvent et dans les conditions les plus variées, il est utile d'en examiner rapidement les traits généraux.

Dans la plupart des cas, on mesure un angle par le déplacement d'un équipage mobile sur un cercle divisé. L'équipage porte : 1° une *ligne de visée*, définie par des alidades ou par une lunette à réticule que l'on amène alternativement dans la direction des deux côtés de l'angle : 2° un *index* ou un *vernier* dont on observe le déplacement par rapport à la division du cercle.

La précision des mesures dépend de l'exactitude avec laquelle on pointe la ligne de visée et, d'autre part, de la graduation du cercle. Dans un instrument bien compris, l'approximation de visée doit être au moins équivalente à celle que donne la graduation. Si, par exemple, le cercle avec les verniers permet d'apprécier 10 secondes, il est nécessaire que les lunettes qui servent à la visée comportent elles-même une erreur inférieure à 10 secondes.

Quand on observe avec une lunette un point lumineux, sans dimension apparente appréciable, sur un fond obscur, comme une étoile dans le ciel, l'image produite au foyer de la lunette n'est pas un point; elle est formée d'une tache centrale circulaire, entourée d'un anneau obscur, puis d'une série d'anneaux concentriques irisés.

Pour que l'on puisse distinguer deux étoiles très voisines, il faut que les images centrales qui correspondent à chacune d'elles soient partiellement séparées. D'après les lois de diffraction, l'angle apparent de la tache centrale, vue du centre optique de l'objectif (ou du miroir dans le cas du télescope), est en raison inverse du diamètre de l'objectif. On ne peut pas préciser *à priori* le degré d'empiètement des taches centrales, c'est-à-dire l'angle minimum de deux étoiles en deçà

duquel l'œil ne pourra plus affirmer l'existence, en tant qu'objets distincts, de deux astres voisins, mais il est certain que cet angle limite est en raison inverse du diamètre de l'objectif; c'est l'*angle de pénétration* de l'objectif. Le *pouvoir optique* est l'inverse de l'angle de pénétration, il est proportionnel au diamètre de l'objectif.

L'étude des instruments d'optique montre qu'un objectif parfait de 12^c de diamètre permet de séparer deux étoiles ou de distinguer deux traits parallèles dont la distance angulaire est supérieure à $1''$. On comprend encore qu'il soit possible, pour la mesure des angles, de pointer le fil d'un réticule sur l'image d'un objet avec une erreur moindre que l'angle de pénétration de la lunette, surtout quand on peut multiplier les pointés. C'est ce qui a lieu en particulier dans les observations de passage au méridien et dans les triangulations géodésiques : l'erreur du pointé est alors au moins dix fois plus faible que l'angle de pénétration de la lunette.

Toutefois, on n'atteint pas cette approximation quand il s'agit d'images mobiles ou d'observations que l'on ne peut répéter à volonté ; on évitera tout mécompte dans la pratique, en admettant que l'erreur de pointé est de même ordre que l'angle de pénétration de l'objectif.

D'autre part, un cercle divisé de 80 centimètres de diamètre, quand il est bien construit, donne directement les $2''$ par la lecture des verniers et permet d'apprécier la partie complémentaire avec une erreur moindre que $1''$; un cercle de ce diamètre devra donc être associé à une lunette d'au moins 12 centimètres d'ouverture. D'une manière générale, on peut dire que le diamètre du cercle doit être environ 7 fois celui de l'objectif.

L'angle de $1''$, qui vaut $0{,}48.10^{-5}$, correspond sur une circonférence de 80^c de diamètre à $40^c.0{,}48.10^{-5} = 2^c.10^{-4}$ ou 2 microns. Telle est la limite au-dessous de laquelle doivent rester les erreurs du tracé, à moins qu'on ne fasse une étude spéciale des divisions du cercle.

Quand il s'agit d'appareils mobiles et légers, comme une aiguille aimantée reposant par une chape sur un pivot vertical, une aiguille d'inclinaison mobile autour d'un axe cylindrique qui roule sur un plan, un fléau de balance tournant

sur l'arête d'un couteau, ou un équipage quelconque suspendu par un ou plusieurs fils, il n'est pas possible de munir ces organes de verniers qui se mouvraient le long d'une division circulaire, parce qu'on doit éviter tout frottement et que les verniers ne sont vraiment utiles que lorsqu'ils peuvent être placés au contact des échelles. Il n'est pas pratique, non plus, de monter une lunette sur l'équipage mobile, ce qui en augmenterait le poids inutilement.

Le moyen le plus simple est d'employer un index, en forme d'aiguille très aiguë, qui se déplace au-dessus d'un cercle divisé. On doit alors viser l'aiguille dans un plan normal au cercle, pour éviter toute erreur dite de *parallaxe*.

Une disposition avantageuse à ce point de vue consiste à faire mouvoir l'aiguille devant une division tracée sur une lame de verre argentée sur la seconde face. L'observation se fait en visant dans une direction telle, que l'aiguille se superpose à son image.

Ce mode de pointé est loin de donner la même approximation que l'emploi des verniers. Avec un cercle de 16 centimètres de diamètre, la minute d'angle correspond à $0^{mm},024$ et il est difficile d'apprécier cette quantité par estime ; c'est à peu près le cas des boussoles d'inclinaison de Gambey.

Cette méthode d'observation a été singulièrement améliorée par Brunner pour les boussoles d'inclinaison. Le cercle divisé vertical est mobile autour d'un axe coïncidant avec celui de l'aiguille et porte un petit miroir concave dont le centre de courbure décrit la même circonférence que la pointe de l'aiguille. Quand la pointe se trouve au voisinage du centre de courbure du miroir, il se produit une image renversée; on observe à la loupe l'aiguille et son image, et on les amène par la vis de rappel dans le prolongement l'une de l'autre. Si le diamètre du miroir est de 12^{mm}, son angle de pénétration est $10''$; pour un rayon de courbure de 4 centimètres, la distance correspondante est de 2 microns ; l'approximation est sensiblement la même qu'avec les verniers.

521. Méthode du miroir. — Poggendorff [1] a eu l'idée ingénieuse d'attacher à l'appareil mobile un miroir plan dans

[1] Poggendorff, *Pogg. Ann.*, t. VII, p. 121 ; 1826.

lequel on observe les déplacements de l'image d'un objet extérieur. Cette méthode s'est rapidement généralisée à la suite des beaux travaux de Gauss et de Weber; il est nécessaire de l'examiner avec plus de détails.

Supposons que la partie mobile tourne autour d'un axe vertical et porte un miroir plan passant par l'axe.

Soit M le miroir (fig. 127), MN la direction de la normale en son milieu, lorsque le système mobile est dans la position d'équilibre, ou celle que l'on prend comme position initiale, et CC'DD' le plan vertical passant par cette normale et l'axe de rotation. Une échelle divisée horizontale EE' est placée à une certaine distance du miroir, au-dessous de l'horizontale MN et perpendiculaire à sa direction. Au-dessus de l'échelle

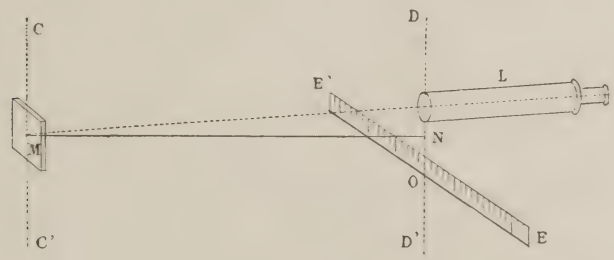


Fig. 127.

est une lunette L, mobile autour d'un axe horizontal, de manière que son axe optique décrive le plan CC'DD'. On dirige la lunette vers le miroir et on la règle de façon qu'elle donne une image nette de l'échelle vue par réflexion.

Les conditions d'ajustement seront remplies pour la lunette si, par un simple jeu de l'oculaire et une rotation autour de l'axe horizontal, on peut faire coïncider successivement avec le réticule le fil de suspension du miroir et l'image donnée par ce miroir d'un fil à plomb DD' tendu devant le milieu de l'objectif; l'échelle est réglée, si ses deux extrémités E et E' sont à la même distance du miroir, et si, pendant les oscillations, l'image de ces deux extrémités se fait à la même hauteur dans le plan du réticule.

La position du miroir est définie par la division de l'échelle

qui fait son image sur le réticule de la lunette. Si l'ajustement est parfait, le zéro de l'appareil correspond à la division de l'échelle qui, dans la lunette, se trouve cachée par le fil à plomb DD′.

On peut numéroter les divisions de l'échelle des deux côtés, à partir du milieu ; mais, pour éviter les erreurs qu'entraînent souvent les lectures de signes contraires et les changements de sens, il est préférable de placer le zéro de la graduation à l'une des extrémités de la règle.

Les chiffres tracés sur l'échelle sont habituellement renversés et symétriques de leur forme normale ; dans la lunette, ils paraissent alors redressés et corrects.

522. Calcul de la déviation. — On peut remarquer d'abord que tous les points d'une droite horizontale de l'échelle n'ap-

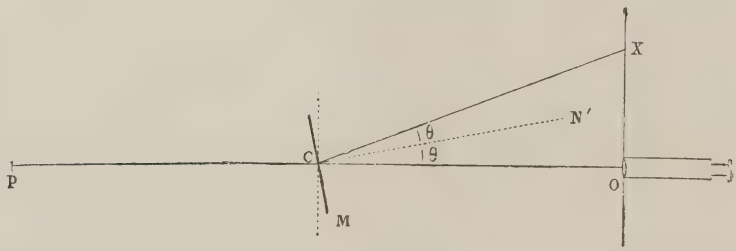


Fig. 128.

paraissent pas à la même hauteur. En effet, le miroir étant supposé vertical et dans l'axe de rotation, soit M le point où sa surface est coupée par l'axe optique de la lunette, φ l'inclinaison de cet axe optique sur l'horizon et d la distance MN au plan vertical de l'échelle. Lorsque cette droite est normale au miroir, la distance verticale a du point N au point visé de l'échelle est $a = d \operatorname{tang} \varphi$.

Si le miroir tourne de l'angle θ (fig. 128), l'angle ψ de la nouvelle position CN′ de la normale avec l'axe optique est $\cos \psi = \cos \varphi \cos \theta$. Le point visé en X fait avec cette normale le même angle ψ ; la distance horizontale CX est $d' = \dfrac{d}{\cos 2\theta}$ et la distance a' du point visé au plan horizontal passant par le point N a pour valeur $a' = d' \operatorname{tang} \varphi$.

Toutefois, lorsque l'un des fils du réticule est vertical, ainsi que les divisions de la règle, cette cause d'erreur n'intervient pas dans les observations.

Désignant par x et p les distances à l'origine des divisions situées en X et O, on a

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tang} 2\theta = \frac{OX}{OC} = \frac{x-p}{d}.$$

Si la surface du miroir M se trouve à une distance $\rho = CM$ (fig. 129), il est facile de voir que la division X vue par la

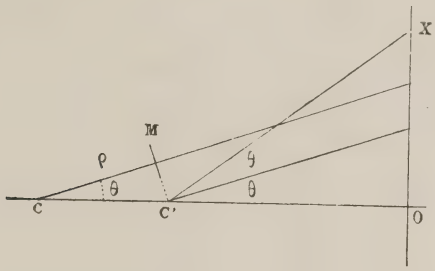


Fig. 129.

lunette pour une déviation θ est la même que si le miroir avait tourné de l'angle θ autour du point C' et qu'on a

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tang} 2\theta = \frac{x-p}{d - \frac{\rho}{\cos\theta}} = \frac{x-p}{d-\rho}.$$

Comme les déviations sont toujours assez faibles et l'écart ρ du miroir très petit par rapport à la distance de l'échelle, on peut remplacer $\cos\theta$ au dénominateur par l'unité.

Enfin, lorsque les déviations sont assez petites pour que la tangente puisse être remplacée par l'arc, il reste

$$\text{(4)} \qquad \theta = \frac{1}{2}\,\frac{x-p}{d-\rho}.$$

Quand il s'agit d'observer des déviations extrêmement faibles, on peut placer un miroir fixe M' dans le plan de l'é-

chelle et viser l'image qui provient de deux ou de $2n$ réflexions intermédiaires[1]. Le rayon qui suivrait l'axe optique, du réticule à l'objectif, revient au miroir M′ sous l'incidence θ et retourne au miroir M sous l'incidence 2θ; une nouvelle opération donnerait 4θ, etc. On aurait ainsi en général $2^{n+1}\theta = \frac{x-p}{d-\rho}$.

Si l'on veut éviter le calcul des lignes trigonométriques dans l'équation (3), on peut poser $\operatorname{tang} 2\theta = \frac{x-p}{d-\rho} = 2m$, et le développement en série de $\operatorname{tang}\theta$ donne

$$(5) \quad \operatorname{tang}\theta = m - m^3 + 2m^5 \cdots\cdots = m(1 - m^2 + 2m^4 - \cdots\cdots).$$

Pour une déviation de 15°, l'erreur commise en ne prenant que les trois premiers termes du développement reste inférieure au dix-millième.

Si le miroir est une glace étamée sur sa seconde face ou, plus généralement, si une lame de verre est interposée entre la lunette et la surface réfléchissante de manière à être traversée par les rayons dans une direction voisine de la normale, une correction est nécessaire sur la valeur de la distance $d-\rho$. En appelant e l'épaisseur et n l'indice de réfraction de la lame, les rayons qui la traversent se comportent comme s'ils avaient traversé une couche d'air dont l'épaisseur serait seulement $\frac{e}{n}$; on devra donc diminuer de $e - \frac{e}{n}$ ou $e\,\frac{n-1}{n}$ la distance de l'échelle à la surface réfléchissante.

523. Graduation des échelles. — Quand il ne s'agit que de mesures comparatives, la déviation θ étant donnée par une des équations (4) ou (5), il suffit d'évaluer approximativement la distance de l'échelle au miroir en fonction des divisions de l'échelle. L'erreur relative commise sur cette mesure n'affecterait que des termes de correction.

Si l'on veut connaître la valeur absolue des angles, on peut faire une table de graduation par un cercle divisé. Dans ce cas, le miroir étant lié par un moyen quelconque à un équipage mobile sur un cercle divisé horizontal ayant même

[1] Piltschikoff, *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 331 ; 1889.

axe, on fait tourner le système d'un angle mesuré par les verniers du cercle et on observe en même temps dans la lunette le déplacement de l'échelle.

Pour utiliser directement les formules, il faut mesurer, avec la même unité, l'échelle et sa distance au miroir.

La mesure de la distance d'une échelle à un miroir mobile présente quelques difficultés quand on veut, comme il est parfois nécessaire, que l'erreur ne dépasse pas un dix-millième, ce qui correspond à une approximation de $0^{mm},1$ pour une distance de 1 mètre. On est souvent amené pour cette raison à augmenter, dans des proportions incommodes, la distance du miroir à l'échelle.

On peut atténuer ces difficultés et en même temps se mettre à l'abri des erreurs dues aux petits déplacements de l'axe pendant les expériences, en employant [1] deux miroirs diamétralement opposés et deux échelles parallèles. Si on appelle ρ et d, ρ' et d', les distances à l'axe de chacun des miroirs et de l'échelle correspondante, et si deux observateurs notent de part et d'autres les déviations x et x' produites par une même rotation, on aura

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{x-p}{d-\rho} = \frac{x'-p'}{d'-\rho'} = \frac{(x+x')-(p+p')}{(d+d')-(\rho+\rho')}.$$

La somme $d+d'$ est la distance des deux échelles qui sont fixes ; $\rho+\rho'$ est la distance des deux miroirs qui sont liés l'un à l'autre. Cette dernière distance peut se réduire à l'épaisseur d'une glace argentée sur les deux faces.

524. Discussion de la méthode. — L'exactitude que l'on peut obtenir, dans la méthode de réflexion, dépend uniquement de la lunette d'observation et des dimensions du miroir, et l'on croit souvent à tort qu'on améliore l'observation en augmentant outre mesure la distance de l'échelle.

L'avantage d'une grande distance, avec un miroir plan et une échelle rectiligne, consiste surtout en ce que la lunette peut voir sans changement de point les extrémités de l'échelle et le milieu ; d'autre part, si la lunette a été construite pour

[1] W. Weber et Zöllner, *Berichte der K. S. Gesell.*, Leipzig, 1880.

viser à l'infini, il suffira d'un petit déplacement de l'oculaire pour permettre la vision de l'échelle. Ce sont là des points secondaires; la question principale est l'angle minimum de rotation que la lunette permettra d'apprécier.

Supposons que le miroir soit à une distance d de l'échelle et à une distance D de l'objectif de la lunette, et désignons par β l'angle limite que peut distinguer la lunette. L'image de l'échelle étant à la distance $D+d$ de l'objectif, cet angle limite correspond à une longueur ε de l'échelle telle que $\varepsilon=\beta(D+d)$; la rotation α correspondante du miroir est

$$\alpha=\frac{\varepsilon}{2d}=\beta\frac{D+d}{2d}=\frac{\beta}{2}\left(1+\frac{D}{d}\right).$$

Dans les conditions habituelles, où $d=D$, il en résulte $\alpha=\beta$; la sensibilité est alors exactement la même que si la lunette d'observation était montée directement sur l'équipage mobile et munie de verniers sur un cercle de dimensions convenables. Le bénéfice apparent que produit la réflexion, en doublant l'angle de rotation, est compensé par la distance double à laquelle se trouve reportée l'image de l'échelle. La sensibilité augmente quand on place l'échelle plus loin que la lunette; elle serait même doublée si le rapport $\frac{D}{d}$ était très petit, mais il faudrait alors des échelles de grandes dimensions pour lesquelles il serait difficile d'obtenir un bon éclairage.

Ce raisonnement suppose toutefois que l'on utilise en entier le pouvoir optique de la lunette, c'est-à-dire que le faisceau de rayons qui provient d'un point de l'échelle couvre la totalité de l'objectif, ou au moins le diamètre horizontal perpendiculaire à la direction des traits. En appelant A le diamètre de l'objectif, a la dimension horizontale du miroir, on doit avoir

$$\frac{a}{d}>\frac{A}{D+d},\qquad a>A\frac{d}{D+d}.$$

La largeur minimum du miroir est donc la moitié du

diamètre de l'objectif pour la disposition ordinaire, et égale à ce diamètre quand l'échelle est très éloignée.

On doit ajouter encore que la construction des surfaces planes présente les plus grandes difficultés ; tous les défauts du miroir nuisent à la pureté des images et contribuent à diminuer la précision des observations.

Quand on se propose seulement d'observer les divisions d'une échelle, il suffit que le miroir ait les dimensions définies par la condition précédente, dans le sens perpendiculaire aux traits. En outre, on améliore singulièrement la netteté des images en couvrant l'objectif d'un diaphragme percé d'une ouverture rectangulaire étroite dont la longueur, égale au diamètre de l'objectif, est perpendiculaire aux traits et dont la largeur est rendue aussi petite que le permet l'éclairage de l'échelle. Les images des chiffres sont moins bonnes, mais les traits apparaissent beaucoup plus purs.

Si l'éloignement de la lunette n'améliore pas la sensibilité, il modifie le nombre des divisions de l'échelle que l'on pourra voir en même temps. On peut définir la limite pratique du champ par la condition que les rayons émanés d'un point couvrent au moins la moitié de l'objectif. D'après cela, en appelant l la longueur de la portion de l'échelle dont on voit l'image, l'ouverture λ du champ est

$$\lambda = \frac{l}{d + D} = \frac{a}{D}.$$

Avec la disposition habituelle, $d = D$, il en résulte $l = 2a$; la longueur visible de l'échelle est alors égale au double de la largeur du miroir, c'est-à-dire égale au diamètre de l'objectif, si le miroir a sa largeur minimum.

Nous avons admis implicitement que la valeur angulaire du champ λ ainsi défini est plus faible que le champ optique que comporte la lunette, ce qui est ordinairement le cas ; si le miroir était très large, la grandeur du champ ne dépendrait que de la lunette.

La méthode du miroir ne permet pas de mesurer de grandes déviations ; il n'est pas commode d'évaluer, de part et d'autre de la position d'équilibre, une rotation supérieure

à 5°, ou un angle total plus grand que 10°. Comme l'image a un déplacement double, l'angle apparent de l'échelle vue du miroir doit être d'au moins 20°; la tangente de 10° étant 0,1763, il faut alors que la longueur totale de l'échelle soit supérieure à 0,3526 de sa distance au miroir, c'est-à-dire environ 40 centimètres pour un mètre de distance.

La valeur moyenne des rotations étant ainsi de 3°, si l'on veut en apprécier le dix-millième, la précision du pointé doit être d'environ 1″; pour que l'angle de pénétration reste au-dessous de cette limite, il faut un objectif de 16 centimètres de diamètre et un miroir de 8 centimètres de largeur. Quant au pointé, il doit être fait au vingt-millième près de la distance $d + D$, c'est-à-dire à $0^{mm},1$ pour $d = D = 10$ mètres.

Avec des échelles plus longues il serait difficile, à moins d'augmenter beaucoup la distance, d'observer en même temps le milieu et les extrémités sans modifier la mise au point de la lunette. On peut courber l'échelle suivant un arc de cercle autour de l'axe de suspension; l'expression $\frac{x-p}{d}$ représente alors le double de la déviation elle-même.

L'échelle est ordinairement divisée en millimètres. Les échelles sur papier ne peuvent être considérées comme suffisantes dans les mesures de précision ; les échelles sur ivoire ou sur métal sont préférables, mais les échelles métalliques sont difficiles à éclairer.

On peut tracer les divisions sur verre et les éclairer par derrière au moyen de miroirs réflecteurs. Si le verre est transparent, les traits apparaissent en noir sur fond brillant; si le verre est argenté et la division tracée sur la couche d'argent, les traits paraissent brillants sur fond noir.

L'emploi des lames de verre présente le grand avantage qu'on peut superposer deux échelles en appliquant l'une sur l'autre les faces divisées et vérifier ainsi l'exactitude de la graduation par différentes méthodes, sur lesquelles il n'est pas nécessaire d'insister.

Dans certaines circonstances, par exemple pour les phénomènes à longue période qui demandent une installation permanente, comme les variations du magnétisme terrestre, il est utile d'avoir dans le champ d'observation un repère

indépendant de la lunette et de l'échelle. Pour cela, on place au-dessous du miroir mobile un miroir fixe tout semblable. Si les deux miroirs étaient absolument parallèles, les deux images de l'échelle, l'une fixe et l'autre mobile, paraîtraient superposées, mais il suffit d'incliner un peu le miroir fixe pour les séparer.

L'angle des plans verticaux passant par les normales aux deux miroirs est donné par la différence des numéros des divisions qui coïncident avec le fil vertical du réticule ; cette différence reste invariable lorsque la lunette et l'échelle éprouvent des déplacements quelconques. L'instrument porte ainsi lui-même son repère, et l'immobilité relative de l'échelle et de la lunette, par rapport aux miroirs, peut être vérifiée à

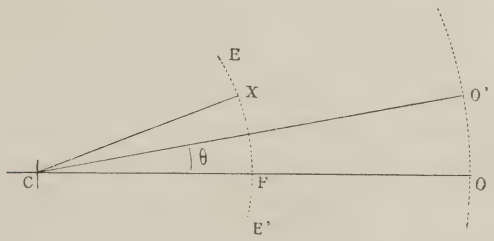


Fig. 130.

chaque instant par la position du réticule sur l'image du miroir fixe.

525. Miroirs courbes. — On peut modifier de bien des manières la méthode d'observation par les miroirs ; une des plus commodes consiste à employer un miroir concave, en plaçant l'échelle dans le plan focal et visant vers le miroir avec une lunette réglée pour l'infini.

Soit O (fig. 130) le centre de courbure du miroir C, F son foyer dans la position initiale, f la longueur focale CF. L'axe de la lunette est dans le plan vertical OC et dirigé vers le milieu C du miroir; une échelle circulaire EE′ a pour centre le point C. Il est clair que, si le miroir tourne d'un angle θ, on verra dans la lunette l'image du point X de l'échelle, tel que l'arc FX corresponde à l'angle 2θ. Tous les rayons émanés

du point X forment après leur réflexion un faisceau parallèle à l'axe optique de la lunette et l'image se fait dans le plan focal. La lunette, une fois réglée pour l'infini, pourra donc être placée à une distance quelconque ; l'éloignement aura seulement pour effet de diminuer le champ.

Dans ce cas, le diamètre du miroir doit être égal à celui de l'objectif, si l'on veut utiliser complètement le pouvoir optique de la lunette.

Enfin on pourra observer une rotation moitié moindre que l'angle limite de la lunette, car, en conservant toujours les mêmes notations, on a

$$\beta = \frac{\varepsilon}{f}, \qquad \alpha = \frac{\varepsilon}{2f} = \frac{\beta}{2}.$$

En résumé, les conditions sont les mêmes que si l'on avait un miroir plan avec une échelle située à l'infini.

Le miroir concave présente quelques avantages pratiques. D'abord il est plus facile d'obtenir une surface sphérique qu'une surface plane, sauf à déterminer par expérience la longueur focale. Si même, la surface n'étant pas sphérique, les rayons de courbure principaux ne sont pas très différents, on peut chercher la direction des plans principaux et mettre l'un d'eux parallèlement aux traits de l'échelle ; la pénétration de la lunette ne s'en trouve pas diminuée. D'autre part les échelles, étant plus petites, sont plus faciles à éclairer. Enfin, on verrait aisément qu'à éclairement égal, les images dans la lunette sont aussi lumineuses qu'avec un miroir plan.

Toutefois si l'on voulait mesurer des déviations un peu grandes, l'échelle devrait alors être courbée suivant une ligne non circulaire et la graduation se ferait empiriquement.

Si l'échelle est placée au centre de courbure du miroir, il se produit dans le même plan une image renversée de l'échelle et de même grandeur, que l'on peut observer avec une loupe ou un microscope. La précision ne dépend alors que du diamètre du miroir, et on appréciera une rotation égale à la moitié de l'angle limite qui correspond à ce diamètre ; c'est la disposition de Brunner (520) pour les boussoles d'inclinaison.

On peut encore remplacer le miroir concave par le système d'un miroir plan et d'une lentille convergente, placés à une faible distance l'un de l'autre.

Soit f la longueur focale de la lentille et δ la distance du miroir au centre optique. Pour que l'échelle soit située dans le plan focal principal du système ainsi constitué, il faut que les rayons émanés d'un de ses points, après s'être réfractés dans la lentille, puis réfléchis sur le miroir, semblent partir du foyer principal de la lentille. On trouve aisément que la distance d' de l'échelle à la lentille doit être

$$d' = \frac{f}{2} \cdot \frac{f - 2\delta}{f - \delta},$$

et que l'on a, entre les angles α et β, la relation

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \frac{f}{f - \delta}.$$

Le système est donc sensiblement équivalent à un miroir concave. L'hypothèse $\delta = 0$ correspondrait au cas d'une lentille plan convexe de distance focale f, qui serait argentée sur la face plane. Avec une construction aussi compliquée, la graduation de la règle doit se faire nécessairement d'une manière empirique.

L'emploi d'une lentille est surtout utile dans les appareils de variations, où l'on veut conserver comme repère l'image fournie par un miroir fixe ; dans ce cas, en effet, il est plus commode de prendre un miroir plan.

526. Appareils de projection. — Pour les expériences courantes, on simplifie beaucoup la méthode du miroir en supprimant la lunette et en projetant directement sur l'échelle l'image réfléchie d'un objet lumineux.

Dans la disposition ordinaire, le plan de l'échelle et celui du réticule de la lunette sont conjugués par rapport au système formé par l'objectif et le miroir ; si donc, l'oculaire étant supprimé, on éclaire le réticule, son image se projettera sur l'échelle à la division même qui aurait été lue dans la lunette. Le réticule peut être remplacé par une fente verticale.

L'emploi d'un miroir concave, ou d'un miroir plan avec lentille convergente, conduit encore à une disposition plus simple. On place l'échelle et la fente éclairée dans un même plan passant par le centre de courbure du miroir, ou au double de la distance focale du système, et à égale distance de part et d'autre de l'axe dans le sens vertical; l'image de la fente se projette alors sur l'échelle en vraie grandeur.

Dans ce mode de lecture par projection, il est nécessaire d'affaiblir la lumière extérieure pour apercevoir sur l'échelle l'image de la fente; la lecture des divisions devient alors difficile. On évite cet inconvénient en prenant une fente ou une ouverture circulaire très large, sur laquelle on tend verticalement un fil opaque. L'image de l'ouverture se promène sur l'échelle et éclaire la région dans laquelle se trouve l'image du fil. On obtient de très bons résultats avec une échelle sur verre dépoli, qu'on observe par transparence.

La méthode de projection, permettant l'impression photographique de l'image, est celle dont on fait usage pour les appareils enregistreurs des variations du magnétisme terrestre. En employant deux miroirs, l'un fixe et l'autre mobile, on reçoit sur une couche sensible deux images d'une même fente éclairée, l'une fixe qui détermine le zéro, l'autre variable de position qui donne la mesure de la variation. Si la feuille sensible est mobile dans une direction perpendiculaire au déplacement de l'image, l'épreuve porte une droite correspondant à l'image fixe et une courbe qui correspond à l'image mobile, qui correspond aux variations.

OSCILLATIONS

527. Équation du mouvement. — On a souvent à considérer le mouvement d'un corps solide de part et d'autre d'une position d'équilibre, soit sous l'influence d'une force extérieure, soit simplement par suite des réactions qui se produisent dans le système quand il a été écarté de sa position d'équilibre.

Considérons un corps de masse K, animé d'un mouvement de translation rectiligne, et désignons par x sa distance à une

origine fixe pour l'époque t. Nous supposerons que ce corps est soumis à une force extérieure X indépendante de x, qu'il éprouve une réaction $f(x)$ variable avec la position occupée, et une autre $f_1\left(\frac{dx}{dt}\right)$, qui est fonction de la vitesse $u = \frac{dx}{dt}$. La première réaction f est *directrice* et analogue à la tension d'un ressort qui ramènerait le mobile vers sa position d'équilibre; la seconde f_1, qui est *retardatrice*, pourra être produite par la résistance des organes ou du milieu dans lequel se fait le mouvement ou encore par des courants induits dans les conducteurs voisins. L'équation générale du mouvement est alors

$$(1) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = X.$$

Par un simple changement dans la signification des lettres, la même équation convient au mouvement de rotation d'un système solide autour d'un axe. La valeur de x représentant l'angle d'écart à partir d'une position arbitraire, la quantité u est alors une vitesse angulaire, les fonctions f_1, f et X sont des couples et K est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation.

Nous admettrons d'abord que la force extérieure X est constamment nulle, auquel cas

$$(2) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0.$$

Lorsque la fonction retardatrice f_1 est nulle, on peut écrire

$$(3) \qquad \frac{K}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(a) - \varphi(x).$$

Comme la valeur du second membre de l'équation ne dépend que de la position du mobile, il en est de même pour le premier, c'est-à-dire pour le carré de la vitesse. Le mouvement est donc *périodique* et le système exécuterait indéfiniment des oscillations toutes identiques.

Si l'on prend pour origine la position d'équilibre, $f(0) = 0$,

et que f soit une fonction impaire de l'*écart* x, l'intégrale φ est une fonction paire. L'oscillation est alors symétrique par rapport à la position d'équilibre. La vitesse s'annule pour $x = \pm a$: la quantité a, qui représente le maximum d'écart, est l'*amplitude* de l'oscillation. La *période* T est le temps qui s'écoule entre deux passages du système par la même position et dans le même sens.

Les seuls cas utiles à considérer dans la pratique sont ceux où l'action directrice f est de la forme Cx, comme pour la tension d'un ressort, ou de la forme $C \sin x$, ce qui correspond au couple produit par la gravité sur un pendule oscillant dans le vide, sans frottement au point d'attache.

528. Oscillations isochrones. — La première forme donne

$$(4) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0.$$

Si l'on compte l'origine du temps à partir de l'époque où le mobile passe par la position d'équilibre, il en résulte

$$(4)' \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a \sin \omega t, \\ u &= \frac{dx}{dt} = \omega a \cos \omega t. \end{aligned} \right.$$

Le mouvement peut être provoqué soit en écartant d'abord le système à l'élongation a, soit en lui imprimant une vitesse initiale ωa. La constante ω et la période T des oscillations sont déterminées par les conditions

$$\omega^2 = \frac{C}{K}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}}.$$

La période T est indépendante de l'amplitude ; les oscillations sont dites *isochrones*.

Le mouvement défini par les équations (4)′ comporte une traduction géométrique très simple. Si l'on trace une circonférence de rayon a (fig. 131) et qu'un mobile M suive cette courbe, dans le sens de la flèche, avec une vitesse angulaire ω,

de manière que l'angle du rayon vecteur OM avec l'axe des y soit ωt, on aura

$$\mathrm{OP} = x = a \sin \omega t$$

$$\mathrm{PM} = y = a \cos \omega t = \frac{u}{\omega}.$$

A chaque instant, l'abcisse OP du mobile représente l'écart du mouvement vibratoire et l'ordonnée PM est proportionnelle à la vitesse u.

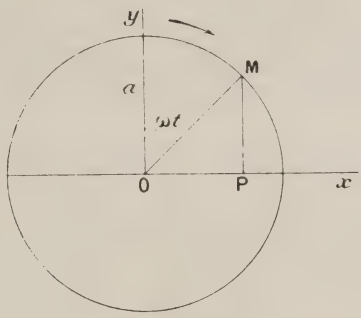


Fig. 131.

529. Mouvement pendulaire. — Si l'action directrice est proportionnelle au sinus de l'écart, on a

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{K}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{C}\sin x = 0, \\ & \frac{\mathrm{K}}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \mathrm{C}(\cos a - \cos x) = 0. \end{aligned} \right.$$

Tant que les écarts restent assez petits pour que le sinus puisse être remplacé par l'arc, on retrouve l'équation (4) et les oscillations restent isochrones avec la période T.

Dans le cas général, la période T′ a pour expression

$$\mathrm{T}' = 4\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{2\mathrm{C}}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} = \mathrm{T}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}},$$

Développant en série l'expression comprise sous le radical, on en déduit, par un calcul connu,

$$(5)' \qquad T' = T\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{a}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{a}{2} + \ldots\ldots\right].$$

Pour des écarts très faibles, on peut réduire la série à ses deux premiers termes et écrire

$$T' = T\left(1 + \frac{a^2}{16}\right).$$

C'est le mouvement du pendule libre dans le vide. Si M est la masse du pendule, k son rayon de giration et l la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, on a

$$K = Mk^2, \qquad C = Mgl,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}} = 2\pi\frac{k}{\sqrt{gl}}.$$

530. Amortissement des oscillations. — Pour simplifier les calculs, nous admettrons toujours que l'action dirigeante f (force ou couple) est proportionnelle à l'écart et de la forme Cx, ce qui convient à la plupart des problèmes.

Dans la pratique, il est impossible de supprimer absolument les causes retardatrices. L'hypothèse la plus simple est de les considérer comme proportionnelles à une puissance n de la vitesse et l'équation (2) peut s'écrire

$$(6) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\left(\frac{dx}{dt}\right)^n + Cx = 0,$$

ou, en posant

$$\omega^2 = \frac{C}{K}, \qquad 2\lambda = \frac{C_1}{K},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\left(\frac{dx}{dt}\right)^n + \omega^2 x = 0.$$

Tel serait le cas des oscillations d'une colonne de mercure renfermée dans un tube en U, que l'on abandonnerait à elle-

même après avoir établi une différence de niveau entre les deux branches. La fonction f est à chaque instant proportionnelle à la différence de niveau et l'action retardatrice est due aux effets de capillarité ainsi qu'aux frottements du liquide sur lui-même ou sur les parois du tube.

Il peut arriver alors, suivant la relation qui existe entre les constantes λ et ω^2, que le système écarté de sa position d'équilibre y revienne sans oscillations, au bout d'un temps infini en théorie, mais pratiquement limité, auquel cas le phénomène est dit *apériodique*. Si la position d'équilibre est dépassée, le système exécute une série d'oscillations dont l'amplitude diminue constamment jusqu'à ce qu'il arrive au repos.

La nature de la quantité x exprimée en fonction du temps est entièrement différente suivant qu'il existe ou non des oscillations régulières.

531. Loi du carré de la vitesse. — Poisson [1] a examiné le cas où $n = 2$. Si l'on donne d'abord au système l'écart $-a$, la valeur de x à une époque quelconque est une fonction de a et peut être développée en une série convergente de la forme

$$x = a\xi_1 + a^2\xi_2 + \cdots\cdots,$$

dans laquelle $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$ sont des fonctions du temps. En substituant dans l'équation (6) et égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de a, on obtient une suite d'équations différentielles qui serviront à déterminer les fonctions $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$

Quand on néglige les termes d'ordre supérieur au carré de a, il reste

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \omega^2\xi_1 = 0,\\ &\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + 2\lambda\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \omega^2\xi_2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Comme on a $x = -a$ et $\frac{dx}{dt} = 0$ pour $t = 0$, il en résulte

$$\xi_1 = -\cos\omega t,$$

$$\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 = \omega^2\sin^2\omega t = \frac{\omega^2}{2}(1 - \cos 2\omega t).$$

[1] Poisson, *Mécanique*, t. I, p. 405; 1811.

La seconde des équations (7) devient alors

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \lambda\omega^2(1 - \cos 2\omega t) + \omega^2\xi_2 = 0,$$

$$\xi_2 = \alpha_2 \cos(\omega t - \beta_2) - \lambda - \frac{\lambda}{3}\cos 2\omega t.$$

D'après les conditions initiales, on doit avoir $\beta_2 = 0$ et $3\alpha_2 = 4\lambda$; il en résulte

$$(7)' \quad \begin{cases} x = -a^2\lambda - a\left(1 - \dfrac{4a\lambda}{3}\right)\cos\omega t - \dfrac{a^2\lambda}{3}\cos 2\omega t, \\ \dfrac{dx}{dt} = a\omega\left(1 - \dfrac{8a\lambda}{3}\sin^2\dfrac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t. \end{cases}$$

A moins que la quantité $a\lambda$ ne soit très grande, la première valeur de t, après zéro, qui annule la vitesse est donnée par la condition $\omega t = \pi$. Avec les restrictions indiquées, la période T des oscillations reste donc la même que si l'amortissement n'existait pas.

En faisant $\omega t = \pi$, on obtient ainsi pour l'amplitude a' de l'oscillation ascendante, qui succède au passage par la position d'équilibre,

$$a' = a\left(1 - \frac{8}{3}a\lambda\right).$$

L'amplitude suivante, du côté opposé, sera encore, au degré d'approximation adopté,

$$a'' = a'\left(1 - \frac{8}{3}a'\lambda\right) = a\left(1 - \frac{8}{3}a\lambda\right)^2 = a\left(1 - 2\frac{8}{3}a\lambda\right).$$

Ces amplitudes décroissent sensiblement en progression arithmétique et le nombre p des passages est le nombre entier supérieur à $\frac{3}{8\lambda a}$.

L'époque t_0 du passage par la position d'équilibre est

$$0 = a\lambda + \left(1 - \frac{4a\lambda}{3}\right)\cos\omega t_0 + \frac{a\lambda}{3}\cos 2\omega t_0.$$

Les deux parties, descendante et ascendante, de l'oscillation ne sont pas parcourues pendant le même temps. Si l'on pose $2\omega t_0 = \pi + \varepsilon$, la quantité ε étant très petite, on obtient, en négligeant les termes du second ordre, $\varepsilon = \frac{2a\lambda}{3}$ et, par suite,

$$\omega t_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{a\lambda}{3}, \qquad t_0 = \frac{T}{4}\left(1 + \frac{2a\lambda}{3\pi}\right).$$

532. Résistance proportionnelle à la vitesse. — Le mouvement des systèmes est en général assez lent pour que les réactions puissent être considérées comme simplement proportionnelles à la vitesse; c'est l'hypothèse étudiée par Gauss [1]. L'équation du mouvement devient alors

$$(8) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\frac{dx}{dt} + Cx = 0.$$

Le problème a été traité déjà (**398**) à propos de la décharge des condensateurs. La solution générale est

$$x = Ae^{\rho t} + A'e^{\rho' t},$$

expression dans laquelle ρ et ρ' sont les racines de l'équation du second degré

$$K\rho^2 + C_1\rho + C = 0.$$

Le mouvement est *apériodique* si ces racines sont réelles et, par suite, toutes deux négatives. Le phénomène est oscillatoire lorsque les racines sont imaginaires.

Si le phénomène est oscillatoire et que l'on prenne pour origine du temps une époque de passage par la position d'équilibre, on a, en posant

$$\lambda = \frac{C_1}{2K}, \qquad \omega^2 = \frac{C}{K} - \lambda^2 = \frac{C}{K}\left(1 - \frac{C_1^2}{4KC}\right),$$

$$(8)' \qquad \left\{\begin{aligned} x &= ae^{-\lambda t}\sin\omega t, \\ \frac{dx}{dt} &= ae^{-\lambda t}(\omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega t). \end{aligned}\right.$$

[1] Gauss, *Result. den Beob. des Magn. Vereins*, 1837; Œuvres, t. V, p. 374.

La dernière équation peut s'écrire aussi, en appelant φ un angle auxiliaire, généralement très peu inférieur à 90°, défini par la condition

$$\frac{\omega}{\sin\varphi} = \frac{\lambda}{\cos\varphi} = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2},$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\sin\varphi}\, a e^{-\lambda t} \sin(\varphi - \omega t).$$

Les oscillations restent isochrones avec la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Les époques t_1 d'*élongation*, c'est-à-dire de passage aux points extrêmes où la vitesse est nulle, sont déterminées par $\omega t_1 = \varphi + n\pi$, et l'époque moyenne t' des élongations successives de sens contraires par $\omega t' = \varphi + (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

L'époque t_0 du passage intermédiaire à la position d'équilibre étant $\omega t_0 = (n+1)\pi$, on voit que les deux parties, descendante et ascendante, de chaque oscillation, ne correspondent exactement à la même durée que si l'angle φ est de 90° ou la valeur de λ nulle.

Comme la valeur de $\sin\omega t$ est $\pm\sin\varphi$ quand la vitesse est nulle, les élongations sont

$$\pm a \sin\varphi\, e^{-\frac{\lambda}{\omega}(\varphi + n\pi)} = \pm a \sin\varphi\, e^{-\frac{\lambda\varphi}{\omega}} e^{-n\lambda\frac{T}{2}}.$$

Celles qui se produisent dans le même sens varient donc comme les termes d'une progression géométrique dont la raison est $e^{-\lambda T}$. Nous avons appelé plus haut *décrément logarithmique* la quantité λ; Gauss attribue cette expression au produit λT, qui est un nombre.

Si l'on considère la courbe dont le rayon vecteur $ae^{-\lambda t}$ fait avec l'axe des y l'angle ωt, la valeur de l'écart x est, à chaque instant, la projection de ce rayon vecteur sur une droite perpendiculaire et la courbe est une spirale logarithmique dont l'*angle de conjugaison*, formé par la direction du rayon vecteur avec la tangente, est égal à φ.

Pour avoir en même temps une représentation de la vitesse,

on rapportera la spirale [1] à des axes obliques faisant entre eux l'angle φ (fig. 132). Pour chaque point M de la spirale on a, par le triangle OMP,

$$\frac{x}{\sin \omega t} = \frac{y}{\sin(\varphi - \omega t)} = \frac{\rho}{\sin \varphi} = a e^{-\lambda t}.$$

On a donné à ces expressions la valeur commune $a e^{-\lambda t}$, afin que l'abscisse $x = \mathrm{OP}$ représente l'écart du mouvement vibratoire. L'ordonnée $y = \mathrm{PM}$ est alors proportionnelle à la

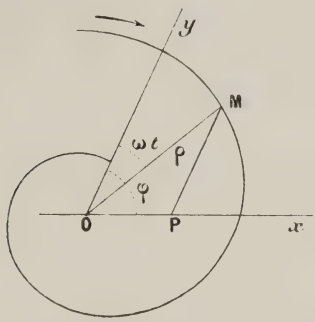


Fig. 132.

vitesse u du mouvement, par le facteur $\frac{\sin \varphi}{\omega}$, et l'équation de la spirale en coordonnées polaires est

$$\rho = a \sin \varphi . e^{-\lambda t} = a \sin \varphi . e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg} \varphi}}.$$

533. Exemples. — La proportionnalité de la résistance à la vitesse rend compte très exactement de l'action de l'air sur les mouvements du pendule et de la plupart des systèmes oscillants dont la vitesse absolue est modérée.

Il en est de même pour le déplacement relatif d'un aimant et d'un conducteur voisin (**474**), puisque les courants induits et leur réaction sur le système mobile sont proportionnels à la vitesse du mouvement relatif.

(1) Les travaux de M. Cornu, auxquels nous ferons de nombreux emprunts, ont été résumés dans un mémoire inséré au *Bulletin de la Société internationale des Électriciens*, t. XI, p. 157; 1894.

Dans les galvanomètres où l'aiguille est placée à l'intérieur d'un cadre de fils, si le circuit, de résistance R, renferme une force électromotrice constante E, la déviation d'équilibre x_0 ne dépend que du courant permanent I, mais l'aiguille éprouve une série d'oscillations avant d'arriver au repos et l'écart à la position d'équilibre est à chaque instant $x - x_0$.

En appelant M et H les composantes perpendiculaires à l'axe du moment magnétique de l'aiguille et du champ extérieur, G la constante du cadre, l'aimant tend à revenir vers sa position d'équilibre sous l'action du couple $M[GIf(x) - H\sin x]$, avec la condition $GIf(x_0) = H\sin x_0$. Pour des oscillations de faible amplitude, le couple directeur peut donc être représenté par

$$C(x - x_0) = M[GIf'(x_0) - H\cos x_0](x - x_0).$$

D'autre part, le flux de force émis par le système magnétique dans le cadre est de la forme $M\varphi(x)$ ou $M\psi(x - x_0)$ et sa dérivée par rapport au temps $M\psi'(x - x_0)\frac{dx}{dt}$, la fonction ψ' différant peu d'une constante $\psi'(0)$.

Si l'on néglige les effets de self-induction, lesquels contribuent encore à l'amortissement, le courant induit i produit par l'aiguille se superpose simplement au courant principal. On a $Ri = M\psi'(0)\frac{dx}{dt}$ et son action sur l'aiguille est sensiblement

$$MGif(x) = \frac{M^2G}{R}\psi'(0)f(x)\frac{dx}{dt} = \frac{M^2G}{R}\psi'(0)f(x_0)\frac{dx}{dt}.$$

L'équation différentielle peut donc s'écrire

$$K\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{M^2G}{R}\psi'(0)f(x_0)\frac{dx}{dt} + M\left[\frac{GE}{R}f'(x_0) - H\cos x_0\right](x - x_0) = 0.$$

Le mouvement est périodique ou apériodique, suivant l'importance du second facteur, et l'on a

$$2\lambda = \frac{M^2G}{KR}\psi'(0)f(x_0),$$

$$\omega^2 + \lambda^2 = \frac{M}{K}\left[\frac{GE}{R}f'(x_0) - H\cos x_0\right].$$

Toutes choses égales, l'amortissement croit avec le moment magnétique de l'aiguille et la conductivité du circuit.

Considérons encore un cadre de n fils, faisant partie d'un circuit fermé, mobile autour d'un axe dans un champ magnétique uniforme, et supposons que, par l'effet d'un couple extérieur, comme la torsion d'un fil métallique, le cadre soit en équilibre dans une direction parallèle au champ.

En appelant S la surface moyenne de chaque spire, le flux de force émis dans le cadre, pour la déviation x, est $HnS\sin x$ et sa dérivée $HnS\cos x\frac{dx}{dt}$ ou sensiblement $HnS\frac{dx}{dt}$.

Si l'on néglige encore les effets de self-induction, le courant induit est $Ri = HnS\frac{dx}{dt}$ et l'action du champ

$$HSi\cos x = \frac{H^2S^2}{R}\cos x\frac{dx}{dt} = \frac{H^2S^2}{R}\frac{dx}{dt}.$$

Le couple directeur de torsion étant représenté par $C\sin x$ ou Cx, on a, toujours pour les petites oscillations,

$$2\lambda = \frac{H^2S^2}{KR}, \qquad \lambda^2 + \omega^2 = \frac{C}{K}.$$

On obtiendrait des résultats analogues, par rapport à une autre position d'équilibre, si le circuit du cadre renfermait une force électromotrice constante.

534. Perturbations. — Lorsque le système est soumis à une action étrangère X indépendante de l'écart x, avec les hypothèses précédentes sur les actions retardatrice et dirigeante, l'équation (8) doit être remplacée par

$$(9) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\frac{dx}{dt} + Cx = X.$$

Le cas le plus simple est celui où la valeur de X est constante et toujours opposée au mouvement, comme serait le frottement d'une chape sur son pivot. En posant $X = -Cx_0$, l'équation devient

$$K\frac{d^2x}{dt} + C_1\frac{dx}{dt} + C(x + x_0) = 0.$$

Si l'on choisit l'origine du temps à l'époque où le système est abandonné sans vitesse à l'élongation a, le mouvement de la première oscillation est, avec les mêmes valeurs que précédemment pour les constantes λ, ω et φ,

$$(9)' \quad \begin{cases} x + x_0 = -\dfrac{a - x_0}{\sin\varphi} e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi), \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\omega}{\sin^2\varphi}(a - x_0) e^{-\lambda t} \sin\omega t. \end{cases}$$

La vitesse s'annule de nouveau à l'époque $\omega t = \pi$, de sorte que la période T n'est pas modifiée.

La nouvelle élongation a_1, du côté opposé, est

$$a_1 + x_0 = (a - x_0) e^{-\frac{\lambda}{\omega}\pi} = (a - x_0) e^{-\frac{\lambda T}{2}},$$

$$a_1 = a e^{-\frac{\lambda T}{2}} - x_0 \left(1 + e^{-\frac{\lambda T}{2}}\right).$$

Après n oscillations simples, l'élongation devient

$$a_n = a e^{-\frac{n\lambda T}{2}} - x_0 \left(1 + e^{-\frac{n\lambda T}{2}}\right).$$

Cette quantité doit rester positive, mais le mouvement peut s'arrêter en dehors de la position normale d'équilibre. Le nombre maximum des oscillations qu'effectue le système est déterminé par la condition $a_n = o$ ou

$$\frac{a}{x_0} = 1 + e^{\frac{n\lambda T}{2}}, \qquad n = \frac{2}{\lambda T} \mathcal{L}. \left(\frac{a}{x_0} - 1\right).$$

D'une manière plus générale, si l'action perturbatrice X est une fonction quelconque du temps, à retours périodiques, on peut la représenter par la série de Fourier

$$(10) \qquad X = \Sigma B_n \sin(n w t - \beta_n),$$

dans laquelle n prend toutes les valeurs entières positives, de $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$.

La solution de l'équation (9) est alors, en faisant un choix convenable de l'origine du temps,

$$(10)' \qquad x = ae^{-\lambda t}\sin\omega t + \Sigma\Lambda_n \sin(nwt - \alpha_n).$$

Le premier terme du second membre annule le premier membre de l'équation (9). Chacun des termes de la dernière expression est une solution relative au terme de période correspondante compris dans le développement (10).

Si l'on désigne par b', β' et ω' les valeurs de B_n, β_n et nw relatives à une période T', la solution correspondante est

$$(11) \qquad x' = a'\sin(\omega' t - \alpha').$$

L'équation (9) devient alors

$$(C - K\omega'^2)x' + C_1\frac{dx'}{dt} = b'\sin(\omega' t - \beta'),$$

$$K\left[(\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2)x' + 2\lambda\frac{dx'}{dt}\right] = b'\sin(\omega' t - \beta').$$

C'est une forme déjà discutée (**393**). En désignant par δ' la perte de phase $\alpha' - \beta'$, on a

$$(11)' \qquad \left\{\begin{aligned} K^2 a'^2 &= \frac{b'^2}{(\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2)^2 + 4\lambda^2\omega'^2}, \\ \operatorname{tang}\delta' &= \frac{2\lambda\omega'}{\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2}. \end{aligned}\right.$$

On remarquera d'abord que l'amplitude a' diminue très rapidement, toutes choses égales, à mesure que ω' augmente, c'est-à-dire que l'on considère un terme d'ordre plus élevé dans la série (10).

Si $\omega' < \omega$ ou $T' > T$, la perte de phase δ' est nulle pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$; elle passe par un maximum δ'_m pour la condition $\lambda^2 = \omega^2 - \omega'^2$, ou

$$\operatorname{tang}\delta'_m = \frac{\omega'}{\lambda} = \frac{\omega'}{\sqrt{\omega^2 - \omega'^2}};$$

la perte de phase δ reste donc comprise entre 0 et 90°.

Si $\omega' > \omega$, l'angle δ' peut varier de o à π; enfin, pour $\omega' = \omega$, on a simplement

$$K^2 a'^2 = \frac{b'^2}{\lambda^2(\lambda^2 + 4\omega^2)}, \qquad \operatorname{tang}\delta' = \frac{2\omega}{\lambda}$$

Lorsque la vibration principale, due aux réactions propres du système, n'est pas amortie, le premier terme du second membre dans l'équation (10)' persiste indéfiniment. La vibration primitive éprouve donc une série de perturbations périodiques et le phénomène n'arrive pas à un régime régulier.

Dès que l'amortissement existe, ce terme tend vers zéro et, au bout d'un temps plus ou moins long, en réalité pratiquement très court, il ne reste plus que les termes périodiques. Le système considéré, quelles que soient ses réactions, obéit donc aux actions perturbatrices.

535. Synchronisation. — On est ainsi conduit au problème d'imposer à un système qui a des oscillations propres, tel qu'un pendule ordinaire, une période de vibration arbitraire par l'action de forces extérieures, c'est-à-dire de maintenir le synchronisme entre deux systèmes différents.

On voit d'abord que si l'action extérieure est elle-même sinusoïdale, $b' \sin(\omega' t - \beta')$, la vibration du système ne tarde pas à se synchroniser sous la forme simple

$$x' = a' \sin(\omega' t - \alpha') = a' \sin(\omega' t - \beta' - \delta').$$

D'une manière plus générale, le système prendra la période dominante de la série X, avec des perturbations dues aux termes de périodes différentes.

Dans la pratique, la période de l'appareil synchronisant est voisine de celle du système et, au lieu de le faire agir d'une manière continue, on l'utilise pour produire des impulsions successives à intervalles réguliers.

Ajoutons encore que l'amortissement est presque toujours très faible. Après n périodes, l'amplitude a_n est devenue

$$a_n = a e^{-n\lambda T}, \qquad n = \frac{1}{\lambda T} \mathcal{L}. \frac{a}{a_n}.$$

Le nombre des périodes nécessaires pour que l'amplitude

soit réduite au millième, ce qui équivaut pratiquement à l'extinction, est

$$n = \frac{\mathcal{L}.1000}{\lambda T} = \frac{6,908}{\lambda T}.$$

Pour les oscillations libres d'un pendule battant la seconde, ou $T = 2$, le décrément logarithmique λT n'atteint pas $\frac{1}{2000}$, ce qui produirait la réduction des amplitudes au millième après $n = 13\,816$ périodes $= 27\,632$ secondes $= 7^h\,40^m$.

Avec le décrément de 0,001, un diapason de 400 périodes par seconde s'éteindrait au bout de 6 908 périodes ou 17^s.

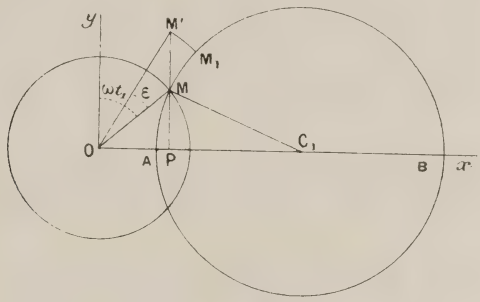


Fig. 133.

On peut donc se borner à considérer les cas où le décrément λT est inférieur à 0,01. Dans ce cas, on aurait

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda T} = 200\pi,$$

et l'angle φ n'est inférieur que de $5'$ à $90°$.

L'angle de conjugaison de la spirale logarithmique (**532**) qui figure le mouvement amorti est donc presque droit et les spires successives diffèrent extrêmement peu de circonférences de cercles.

536. Percussions périodiques. — Considérons d'abord le cas où l'amortissement est nul, la vibration étant $a \sin \omega t$, et supposons que le système reçoive à l'époque t_1 une impulsion instantanée qui lui imprime un accroissement de vitesse v,

ce qui correspond sur la courbe représentative à un accroissement d'ordonnée $MM' = z = \frac{\rho}{\omega}$ (fig. 133). Si le mouvement continue sans trouble ultérieur, la nouvelle amplitude est $a' = OM'$, la phase a diminué de l'angle $M'OM = \varepsilon$ et les équations du mouvement deviennent

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= a' \sin(\omega t - \varepsilon), \\ \frac{dx'}{dt} &= \omega a' \cos(\omega t - \varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Le triangle M'OM donne

$$(12)' \qquad \left\{ \begin{aligned} & a' \cos\varepsilon = a + z \cos\omega t_1, \qquad a' \sin\varepsilon = z \sin\omega t_1; \\ & a'^2 = a^2 + z^2 + 2az\cos\omega t_1, \quad \operatorname{tang}\varepsilon = \frac{z \sin\omega t_1}{a + z\cos\omega t_1}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque l'impulsion $\rho = \omega z$ est très faible par rapport à la vitesse maximum ωa du mouvement primitif, on peut écrire

$$(12)'' \qquad \left\{ \begin{aligned} & a'^2 = (a+z)^2 - 4az\sin^2\frac{\omega t_1}{2} = (a+z)^2 - az\omega^2 t_1^2, \\ & \varepsilon = \frac{z}{a}\sin\omega t_1. \end{aligned} \right.$$

Il en est de même quand t_1 est très petit par rapport à T; dans ce cas, l'amplitude a' ne diffère de la somme $a + z$ que par une quantité du second ordre, comme on le voit directement sur la figure [1].

Si l'impulsion ρ se reproduit au bout du temps $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$ l'angle décrit par le point figuratif M' dans l'intervalle est $\omega T' = 2\pi + \omega(T' - T)$, et sa position M_1 au moment de la seconde impulsion est définie par l'arc $MM_1 = a'\omega(T' - T)$.

Admettant encore que la fraction $\frac{T' - T}{T}$ est très faible, les longueurs MM' et MM_1 pourront être traitées comme des infiniment petits.

[1] P. Weiss, *Journal de phys.* [3], t. IV, p. 420; 1895.

On peut chercher maintenant, avec les restrictions précédentes, quel est le lieu des points MM_1....., lorsque l'impulsion v est répétée périodiquement aux intervalles T'.

Menant la droite MC perpendiculaire à l'arc MM_1, le triangle fini CMO et le triangle infiniment petit MM_1M' sont semblables et donnent les relations

$$\frac{OC}{MM'} = \frac{MC}{MM_1} = \frac{OM}{M_1M'} = \frac{1}{\omega(T'-T)}.$$

Il en résulte $OC = \frac{z}{\omega(T'-T)}$, c'est-à-dire que la distance $OC = c$ est constante; le lieu des points M, ou l'*indicatrice* des impulsions, est donc une circonférence.

L'arc MM_1 correspondant à l'intervalle de temps T', la vitesse angulaire ω_1 du point M sur cette circonférence et la période correspondante T_1 sont

$$\omega_1 = \frac{1}{T'} \cdot \frac{MM_1}{MC} = \omega \frac{T'-T}{T'}, \qquad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'}.$$

Ces valeurs de ω_1 et T_1 sont indépendantes de t_1, c'est-à-dire de la phase ωt_1 à laquelle ont débuté les impulsions, mais le rayon $b = MC$ de l'indicatrice varie avec cette phase et l'on a

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \sin \omega t_1,$$

$$b^2 - c^2 = a(a - 2c \sin \omega t_1) = a\left[a - \frac{2z \sin \omega t_1}{\omega(T'-T)}\right].$$

L'amplitude de chaque oscillation est donnée par le rayon vecteur $\rho = OM$ de l'indicatrice et la variation de phase correspondante peut être représentée par l'angle $\psi = MOC$.

Il se présente deux circonstances distinctes, suivant que le point O est en dehors ou à l'intérieur de la courbe indicatrice, c'est-à-dire que $b \lessgtr c$ ou $\sin \omega t_1 \gtrless \frac{a}{2z} \omega (T'-T)$.

Dans le premier cas, $b < c$, l'amplitude varie entre les valeurs extrêmes OA et OB, c'est-à-dire $c - b$ et $c + b$, tandis que les changements de phase sont compris entre les valeurs

extrêmes $\pm \psi_1$ de l'angle ψ. La durée moyenne des oscillations primitives n'est pas modifiée, mais il se produit des variations d'amplitude, analogues aux *battements*, dont la période est T_1.

Dans le second cas, la variation de phase ψ est continue et l'amplitude des oscillations reste comprise entre $c - b$ et $c + b$. Alors le système avance ou retarde d'une période entière T pour chaque période T_1.

Aucune de ces deux solutions ne résout le problème de la synchronisation.

Supposons maintenant qu'il existe un amortissement faible. Chacune des spires de la spirale représentative peut encore être considérée comme circulaire de rayon $\rho = ae^{-\lambda t}$.

La première impulsion, au point M (fig. 134), fait croître

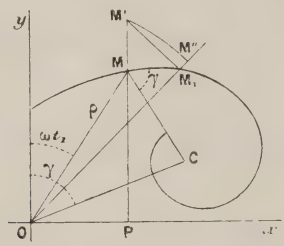


Fig. 134.

l'ordonnée de la quantité $z = MM'$. Au moment de l'impulsion suivante, le point figuratif serait venu en M'', sauf amortissement, à la distance

$$M'M'' = \rho'\omega(T' - T) = \rho\omega(T' - T),$$

mais le rayon vecteur a diminué pendant le temps T' de la quantité

$$M''M_1 = -d\rho = \rho\lambda T'.$$

L'angle $\gamma = M'M_1M''$ est indépendant de l'époque initiale t_1 des perturbations et l'on a

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{M'M''}{M''M_1} = \frac{\omega}{\lambda}\cdot\frac{T' - T}{T'} = \frac{2\pi}{\lambda T}\left(1 - \frac{T}{T'}\right)$$

$$M'M_1 = \frac{M'M''}{\sin\gamma} = \frac{\rho\omega(T' - T)}{\sin\gamma}.$$

Si l'on mène la droite MC dans une direction qui fait l'angle γ avec MM_1 et la droite OC inclinée du même angle sur l'axe des y, les triangles CMO et MM_1M' sont encore semblables et donnent

$$\frac{OC}{MM'} = \frac{MC}{MM_1} = \frac{OM}{M'M_1} = \frac{\sin\gamma}{\omega(T'-T)}.$$

La distance $OC = \frac{z\sin\gamma}{\omega(T'-T)} = c$ est donc une quantité constante sur une direction définie ; comme la droite MC fait un angle constant γ avec l'élément MM_1, il en résulte que la *courbe indicatrice* des impulsions périodiques est une spirale logarithmique dont l'angle de conjugaison est γ et dont le pôle C est situé sur une droite qui fait l'angle $90^\circ - \gamma$ avec l'axe des x.

Sur cette spirale, la vitesse angulaire et la période sont

$$\omega_1 = \frac{1}{T'}\frac{MM_1}{MC} = \frac{\omega}{\sin\gamma}\cdot\frac{T'-T}{T'}, \qquad \frac{\sin\gamma}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'}.$$

Dans ces conditions, les oscillations primitives sont profondément altérées ; les premières ont des amplitudes et des différences de phase variables, mais l'amortissement ne tarde pas à éteindre ces perturbations et il s'établit finalement un régime d'oscillations régulières, de même période T' que celle des impulsions et d'amplitude constante c.

537. Actions de courte durée. — L'action extérieure a toujours une durée finie θ, mais il est facile de reconnaître qu'elle équivaut dans tous les cas à une percussion instantanée.

Comme on ne considère que des oscillations faiblement amorties, si la durée θ est petite par rapport à la période T, on peut supposer la vibration primitive sinusoïdale [1]. Il résulte des équations (12) et (12)' que, pour une percussion ωz, les valeurs relatives à l'origine du temps sont, en posant $\omega t_1 = \delta$,

$$x_0 = -a'\sin\varepsilon = -z\sin\delta,$$
$$y_0 = a'\cos\varepsilon = a + z\cos\delta,$$

[1] O. Chwolson, *Mélanges de chim. et de phys.*, St-Pétersbourg, 1881, p. 403. — E. Dorn, *Wied. Ann.*, t. XVII, p. 634; 1882.

et la vitesse maximum est

$$(13) \qquad \omega^2 a'^2 = \omega^2 (x_0^2 + y_0^2) = \omega^2 \left[(a+z)^2 - 4az \sin^2 \frac{\delta}{2} \right].$$

On aurait, de même, pour une série d'actions instantanées, respectivement définies par des quantités z et δ,

$$(13)' \quad \begin{cases} x_0 = -\Sigma z \sin \delta = -z_m \sin \delta_m, \\ y_0 = a + \Sigma z \cos \delta = a + z_m \cos \delta_m, \\ z_m^2 = (\Sigma z \sin \delta)^2 + (\Sigma z \cos \delta)^2 = (\Sigma z)^2 - 4 \Sigma z z' \sin^2 \dfrac{\delta - \delta'}{2}, \\ \operatorname{tang} \delta_m = \dfrac{\Sigma z \sin \delta}{\Sigma z \cos \delta}. \end{cases}$$

Le résultat est identique à celui que produirait une percussion instantanée définie par z_m, à l'époque $t_m = \frac{\delta_m}{\omega}$.

Un effet quelconque, représentant une série de percussions qui se succèdent suivant une certaine loi, équivaut ainsi à une percussion unique provoquée à une époque intermédiaire.

Si l'action est continue et capable de produire sur un système sans vitesse initiale, ou de très longue période, l'accélération $w = \omega^2 z$, l'accroissement de vitesse pendant le temps dt serait

$$w\,dt = \omega z \omega\,dt = \omega z\,d\delta.$$

Les sommes que renferment les équations (13)′ doivent être remplacées par des intégrales étendues à la durée totale $\theta = t_2 - t_1$ des observations, c'est-à-dire à l'intervalle des angles $\delta_1 = \omega t_1$ et $\delta_2 = \omega t_2$, ce qui donne

$$(14) \qquad \begin{cases} z_m \sin \delta_m = \displaystyle\int z \sin \delta\,d\delta, \\ z_m \cos \delta_m = \displaystyle\int z \cos \delta\,d\delta. \end{cases}$$

Supposons que la quantité z soit constante, c'est-à-dire l'impulsion uniforme, et posons

$$z_1 = \int z\,d\delta = z(\delta_2 - \delta_1).$$

On a alors

$$z_m \sin \delta_m = z \int_1^2 \sin \delta \, d\delta = z_1 \frac{\sin \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}}{\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}} \sin \frac{\delta_1 + \delta_2}{2},$$

$$z_m \cos \delta_m = z \int_1^2 \cos \delta \, d\delta = z_1 \frac{\sin \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}}{\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}} \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2};$$

$$(14)' \qquad \delta_m = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad z_m = z_1 \frac{\sin \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}}{\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}} = z_1 \frac{\sin \frac{\omega\theta}{2}}{\frac{\omega\theta}{2}}.$$

On voit par ces résultats que l'action continue équivaut à une percussion ωz_m, indépendante des conditions du mouvement primitif, produite à l'époque moyenne.

Considérons encore une impulsion sinusoïdale, prise seulement pendant la demi-période où elle conserve le même sens ; telle serait l'action du courant induit dans un cadre tournant à vitesse constante dans un champ uniforme, si on utilise ce courant pendant une demi-période entre deux passages par zéro.

Pour la période $T' = 2\theta$ du phénomène, $\omega'\theta = \pi$ et l'accroissement de vitesse peut être représenté à chaque instant par

$$(15) \qquad w \sin \omega'(t - t_1)\, dt = \omega z \sin \frac{\omega'}{\omega} (\delta - \delta_1)\, d\delta.$$

Pendant le temps $t_2 - t_1 = \theta$, la variation $\delta_2 - \delta_1$ de l'angle δ est $\omega'(\delta_2 - \delta_1) = \pi\omega$; il en résulte

$$z_1 = z \int_1^2 \sin \omega'(t - t_1)\, dt = \frac{2z}{\omega'} = z \frac{\theta}{\pi},$$

$$z_m \sin \delta_m = z_1 \frac{\omega'}{2} \int_1^2 \sin \frac{\omega'}{\omega} (\delta - \delta_1) \sin \delta \, d\delta,$$

$$z_m \cos \delta_m = z_1 \frac{\omega'}{2} \int_1^2 \sin \frac{\omega'}{\omega} (\delta - \delta_1) \cos \delta \, d\delta.$$

En remplaçant les produits de sinus et cosinus par des sommes ou des différences, on trouve aisément

$$z_m \sin \delta_m = z_1 \omega \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \sin \frac{\delta_1 + \delta_2}{2},$$

$$z_m \cos \delta_m = z_1 \omega \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}.$$

L'effet est encore le même que si l'on avait provoqué, à l'époque moyenne, une percussion définie par

$$(15)' \qquad z_m = z_1 \omega \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = z_1 \omega \frac{\cos \frac{\omega \theta}{2}}{1 - \left(\frac{2\theta}{T}\right)^2}.$$

538. Tracé de l'indicatrice. — Pour contrôler ces résultats, M. Cornu a imaginé une expérience qui permet d'obtenir l'enregistrement photographique de la courbe indicatrice.

L'appareil oscillant est un pendule battant à peu près la seconde. Un barreau aimanté perpendiculaire à la tige est disposé de manière que l'un des pôles se meut dans une bobine à circuit fermé, qui permet de modifier l'amortissement; l'autre pôle se meut dans une bobine qui reçoit à chaque période un courant de courte durée, fermé par une horloge astronomique. Ce courant exerce sur le pôle correspondant une attraction destinée à produire le synchronisme.

Des aiguilles aimantées, attachées au même pendule, oscillent dans des solénoïdes et produisent un courant induit dont l'intensité est, à part les effets de self-induction, proportionnelle à la vitesse. Ce courant traverse ensuite un cadre oscillant dans un champ magnétique (galvanomètre Deprez-d'Arsonval) réglé de manière que, dans le régime stable, ses écarts soient sensiblement proportionnels au courant.

On a ainsi deux appareils, pendule et galvanomètre, dont l'un reproduit les écarts du pendule et l'autre sa vitesse. Si on les munit de miroirs oscillant dans des plans rectangulaires, et qu'on observe l'image d'une source de lumière après double réflexion, on obtiendra les figures utilisées en acoustique.

La figure est en général elliptique, mais il est facile de la

ramener à la forme circulaire en modifiant la résistance du circuit induit.

Il suffit maintenant de cacher la source par un obturateur, qui s'efface à chaque passage du courant de synchronisation. L'ensemble des points observés, dans l'intervalle de transition qui précède l'établissement du synchronisme, a pour coordonnées l'écart du pendule et la vitesse modifiée; c'est la courbe indicatrice. Une plaque sensible placée au foyer de la lunette conserve la trace de tous ces points dont la succession est bien la spirale fournie par le calcul.

539. Observation des oscillations. — Toutes les circonstances d'un mouvement oscillatoire sont déterminées par la valeur et l'époque des élongations successives. Comme la vitesse est nulle au moment des élongations, les intervalles correspondants ne pourraient être évalués avec exactitude; il est préférable de choisir les positions où le système a sa plus grande vitesse, c'est-à-dire celles qui sont voisines de l'équilibre.

Pour étudier ce mouvement, on observera, soit le passage d'un index devant une échelle divisée, soit l'image d'un trait sur un micromètre placé au foyer d'une lunette, soit l'image d'une échelle divisée sur le réticule, que cette échelle ait été tracée sur le système mobile ou provienne de la réflexion par un miroir, etc. On note les passages du système par une position déterminée et on évalue les élongations.

Quelle que soit d'ailleurs la position de repère, la différence des époques de deux passages successifs dans le *même sens* représente la période ou le double de la durée de l'oscillation simple, telle qu'on la considère habituellement.

A moins que l'amortissement ne soit rapide, cette période s'obtiendra très exactement par l'intervalle d'un grand nombre de passages. Quand les oscillations sont de très longue durée, comme celles du pendule, la méthode des *coïncidences* de Borda permet de résoudre le problème avec toute la précision désirable. D'ailleurs, la manière d'observer dépend beaucoup du caractère que présente le phénomène.

Si le mouvement est observable pendant quelque temps, un quart d'heure par exemple, on pourra déterminer la durée des oscillations de la manière suivante.

Supposons, comme dans le cas d'une aiguille aimantée, que

la durée des oscillations soit de 3 à 5 secondes et que les divisions d'une échelle passent sur le réticule d'une lunette. On choisit comme repère une division voisine de celle qui correspond à l'équilibre. Avec un compteur à pointage, on note l'époque t_0 à laquelle cette division passe sur le fil en marchant dans un certain sens, soit de gauche à droite, c'est le passage d'ordre zéro; puis on compte les oscillations suivantes et on note l'époque t_1 du 20e passage, lequel s'effectue dans le sens primitif, c'est-à-dire de la 10e période. En même temps, on a observé les divisions extrêmes qui correspondent à l'oscillation initiale et celles de la 20e, d'où l'on déduira les élongations correspondantes a_0 et a_1. Il n'est plus nécessaire de compter les oscillations suivantes, car on sait que le 40e passage aura lieu au voisinage de l'époque $t_1 + (t_1 - t_0)$. On se prépare à l'observation un peu avant et on note exactement l'époque t_2 du 40e passage, puis l'élongation correspondante a_2. On déterminera, de même, les époques t_3, t_4, t_5, et les élongations a_3, a_4, a_5 des 60e, 80e et 100e passages.

On en déduit les valeurs $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$,..... de la durée de 20 oscillations pendant les séries successives, et les élongations moyennes $\frac{a_0 + a_1}{2}$, $\frac{a_1 + a_2}{2}$,..... correspondantes.

Si les durées successives ne diffèrent pas d'une manière appréciable, pour de grandes variations dans les écarts, on en conclut que le couple directeur est proportionnel à la déviation; la durée de l'oscillation sera donnée alors par le centième de la différence totale.

Dans la plupart des cas, le couple directeur est proportionnel au sinus de la déviation; la durée d'oscillation varie alors avec l'amplitude, suivant la loi du mouvement pendulaire (**529**). La durée τ' d'une oscillation simple se déduira alors de la durée τ relative aux oscillations infiniment petites par l'équation (5)', que l'on peut écrire

$$\tau' = \tau(1 + \beta).$$

Pour simplifier les opérations, on a calculé des tables qui donnent les valeurs de la parenthèse $1 + \beta$ pour différents angles d'écart. Voici, par exemple, les valeurs de cette table.

de 2 en 2 degrés, jusqu'à 60 degrés, les quantités intermédiaires pouvant se déterminer par interpolation [1] :

Table pour la réduction des oscillations pendulaires aux angles infiniment petits.

Écart	$1+\beta$	Écart.	$1+\beta$	Écart.	$1+\beta$
2°	1,0001	22°	1,0093	42°	1,0346
4	1,0003	24	1,0111	44	1,0381
6	1,0007	26	1,0130	46	1,0418
8	1,0011	28	1,0151	48	1,0456
10	1,0019	30	1,0174	50	1,0497
12	1,0027	32	1,0199	52	1,0539
14	1,0037	34	1,0225	54	1,0584
16	1,0049	36	1,0252	56	1,0630
18	1,0062	38	1,0282	58	1,0678
20	1,0077	40	1,0313	60	1,0728

Comme l'amplitude diminue d'une manière continue, on divise chaque durée partielle $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$,..... par le nombre $1+\beta_0$, $1+\beta_1$,..... qui convient à l'écart correspondant réduit en angle et on obtient des valeurs approchées t'_1, t'_2,..... de la durée de 20 oscillations infiniment petites. Si elles ne diffèrent pas d'une manière systématique, c'est que le phénomène est régulier et la correction exacte. On prendra enfin comme durée d'oscillation la moyenne de toutes ces valeurs.

D'une manière générale, si t'_1, t'_2,..... t'_m, sont les durées réduites de m séries de n oscillations, c'est-à-dire si l'on a observé un nombre total $mn = \mathrm{N}$ d'oscillations, la durée τ relative aux amplitudes infiniment petites est

$$\tau = \frac{t'_1 + t'_2 + \cdots\cdots t'_m}{\mathrm{N}}. \tag{16}$$

Les erreurs commises sur l'époque des passages intermédiaires n'affectent pas d'une manière appréciable la valeur de τ et la précision dépend surtout de l'exactitude avec laquelle on a pointé le passage initial et le dernier. Si ces observations

[1] Daondeau et Chevalier, *Voyage de la Bonite. Observations magnétiques*, t. II, p. 9; 1846.

sont faites à $0^s,1$ près, on aura, pour un quart d'heure, une approximation relative d'environ 0,0002.

Quand il n'y a pas intérêt à vérifier l'exactitude de la correction des écarts séparément pour les différentes séries, on peut faire la réduction d'une manière plus rapide. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_m$ les nombres des oscillations infiniment petites de durées τ, qui seraient effectuées pendant les durées $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2, \ldots$ des n oscillations qui forment les séries successives; on a

$$t_1 - t_0 = p_1\tau = n\tau(1 + \beta_1),$$
$$t_2 - t_1 = p_2\tau = n\tau(1 + \beta_2), \quad \ldots.$$

En appelant $N = mn$ le nombre total des oscillations et $\tau' = \frac{t_m - t_0}{N}$ leur durée moyenne, on en déduit

$$N\tau' = \tau\Sigma p = n\tau(m + \Sigma p) = N\tau\left(1 + \frac{\Sigma\beta}{m}\right),$$

$$(17) \qquad \tau = \frac{\tau'}{1 + \frac{\Sigma\beta}{m}} = \tau'\left(1 - \frac{\Sigma\beta}{m}\right).$$

Lorsque les déviations ne dépassent pas 35°, la valeur de β se réduit sensiblement au premier terme $\frac{a^2}{16}$. Si la suite des amplitudes est assimilable à une progression géométrique, la correction se fera par une autre méthode.

En posant $\alpha = e^{-\frac{\lambda T}{2}} = e^{-\lambda\tau}$, les durées propres de n oscillations successives sont

$$\tau(1 + \beta_1), \quad \tau(1 + \beta_1\alpha), \quad \tau(1 + \beta_1\alpha^2), \quad \ldots\ldots, \quad \tau(1 + \beta_1\alpha^{n-1});$$

on a donc

$$n\tau' = \tau[n + \beta_1(1 + \alpha + \ldots\ldots + \alpha^{n-1})] = n\tau\left(1 + \frac{\beta_1}{n}\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}\right),$$

$$(18) \qquad \tau = \frac{\tau'}{1 + \frac{\beta_1}{n}\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}} = \tau'\left[1 - \frac{\beta_1}{n}\cdot\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}\right].$$

Pour déterminer le terme de correction, on prendra le rapport de deux amplitudes a' et a'' séparées par m oscillations, ou la moyenne des rapports analogues empruntés aux meilleures observations, ce qui donne $\alpha^m = \frac{\beta'}{\beta''} = \left(\frac{a'}{a''}\right)^2$.

Lorsque l'amortissement est faible, on a très sensiblement $\alpha = 1 - \lambda\tau$; si le nombre des oscillations n'est pas trop grand, de façon que le produit $n\lambda\tau$ reste de l'ordre des centièmes, on peut écrire

$$\alpha^n = 1 - n\lambda\tau + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2\tau^2 = 1 - n\lambda\tau\left(1 - \frac{n-1}{2}\lambda\tau\right),$$

$$(19) \qquad \tau = \tau'\left[1 - \beta_1\left(1 - \frac{n-1}{2}\lambda\tau\right)\right].$$

Nous prendrons comme exemple l'observation d'une boussole d'intensité horizontale faite à Pondichéry le 7 juin 1837 par Darondeau et Chevalier. Les observateurs avaient pointé 1400 oscillations par séries de 50; nous donnerons seulement les lectures relatives aux différentes centaines.

Nombre des passages.	Durée de 100 oscillations.	Écart moyen.	Durée réduite.
100	369s,3	31°,5	362s,33
200	366 ,0	25 ,0	361 ,66
300	364 ,7	19 ,5	362 ,04
400	363 ,3	15 ,5	361 ,64
500	363 ,0	12 ,5	361 ,94
600	362 ,3	9 ,75	361 ,65
700	362 ,0	7 ,75	361 ,70
800	362 ,0	6 ,0	361 ,75
900	362 ,4	4 ,5	362 ,26
1000	362 ,0	3 ,75	361 ,89
1100	362 ,0	3 ,25	361 ,93
1200	362 ,3	2 ,75	362 ,23
1300	362 ,0	2 ,25	361 ,96
1400	362 ,3	1 ,75	262 ,27
Moy.	363s,257		361s.94

La durée de l'oscillation, par la formule (16), est donc

$$\tau = 3^s,6194.$$

La réduction a été faite par les valeurs de β empruntées à la table par interpolation. La somme de ces valeurs relatives aux 14 séries est $\Sigma\beta = 0,0502$; la formule (17) donne alors

$$\tau = \frac{3^s,63257}{1 + \frac{0,0502}{14}} = \frac{3^s,63257}{1,003585} = 3^s,6196.$$

Enfin, jusqu'au 800e passage, le rapport d'un écart moyen au suivant varie, sans aucune règle, de 1,24 à 1,29 et la moyenne est 1,267 ; les déviations sont ensuite trop faibles pour qu'on en puisse déduire une évaluation approchée de l'amortissement. On a donc

$$\log.\alpha = \frac{2}{100}\log.\frac{1}{1,267}, \qquad \alpha = 0,99528 = 1 - 0,00472.$$

L'écart de la première oscillation ayant été de 35°, pour lequel $\beta_1 = 0,0238$, la formule (18) donne, avec $n = 1400$,

$$\frac{\beta_1}{n}\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{0,0238}{1400}\cdot\frac{1-0,001325}{0,00472} = 0,00360,$$

$$\tau = \frac{3^s,63257}{1,00360} = 3^s,6195.$$

Les observations sont faites avec un compteur dont on doit connaître la marche, et il ne reste plus à faire que la correction relative à la marche de ce compteur.

Toutes les méthodes conduisent pratiquement au même résultat, mais le tableau des réductions successives, malgré les différences qui tiennent aux erreurs d'observation, a l'avantage de montrer, dans le cas actuel, que la durée réduite des oscillations tend à augmenter; cet accroissement était dû à une élévation de température de l'aiguille oscillante.

Si la position d'équilibre se déplace d'une manière continue comme il arrive pour les barreaux aimantés, par suite des variations de la déclinaison, on commet à chaque lecture une erreur égale au temps que le mobile met à parcourir l'arc dont

le zéro s'est déplacé, et cette erreur ne peut être évitée qu'en notant chaque fois le passage sur la division qui correspond au zéro actuel. A cet effet, un peu avant l'observation, on dictera les valeurs de deux élongations de sens contraires à un aide, qui en déduira immédiatement, en tenant compte de l'amortissement, la division qui correspond au zéro, et le pointé sera fait sur cette division.

Cette méthode de correction suppose évidemment que les changements dans la direction d'équilibre ne sont pas sensibles pendant la durée de quelques oscillations.

Enfin on doit mettre à part les mouvements dans lesquels l'action perturbatrice est constante et toujours opposée à la vitesse (**534**), ou renferme un terme de même nature proportionnel à une puissance paire de l'écart x.

540. Méthode de Gauss. — Le mode d'observation employé par Gauss [1] s'applique à toute espèce d'oscillations, quel

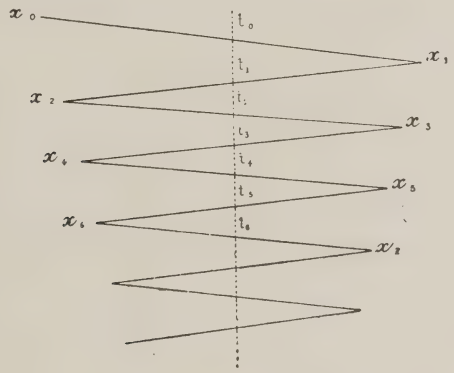


Fig. 135.

que soit l'amortissement, mais il convient surtout au cas où les oscillations sont régulières et très lentes.

Supposons, pour préciser les idées, que l'on observe l'image d'une échelle dont les divisions sont numérotées à partir d'une des extrémités. Nous désignerons par x_0, x_1, x_2, les divisions qui correspondent aux élongations successives (fig. 135); les indices pairs se rapportent aux oscillations de gauche et les indices impairs aux oscillations de droite.

[1] Gauss, *Resultate aus den Beob. des mag. Vereins, Oeuv.* 1837; t. V. p. 374.

Il faut d'abord déterminer la position d'équilibre par les oscillations elles-mêmes, sans attendre que le système arrive au repos. Pour la division p, qui correspond à l'équilibre, on peut prendre la position moyenne des milieux de deux amplitudes successives :

$$(20) \qquad p = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_2 + x_1}{2}\right) = \frac{x_0 + 2x_1 + x_2}{4}.$$

Si cette première approximation ne suffit pas, on obtient une valeur plus exacte en écrivant que trois amplitudes successives sont en progression géométrique et qu'on a

$$\frac{x_0 - p}{p - x_1} = \frac{p - x_1}{x_2 - p} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1},$$

$$(20)' \qquad p = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 + x_2 - 2x_1}.$$

L'amplitude moyenne totale des oscillations est

$$a_1 = \frac{x_0 + x_2}{2} - x_1 = \frac{x_0 + x_2 - 2x_1}{2}, \qquad \ldots\ldots$$

Pour déterminer la durée des oscillations, on fait 7 lectures successives, x_0, x_2, x_4, x_6, d'un côté, et x_1, x_3, x_5, de l'autre, correspondant aux élongations, en notant les époques t_0, t_1,..... t_5, de passage sur le réticule, dans les deux sens, d'une division voisine de p; on observe ensuite plusieurs séries semblables, à différents intervalles de temps.

Chacune des séries conduit à un tableau de la forme suivante, qui donne 5 valeurs moyennes pour l'époque d'élongation, la division d'équilibre et l'amplitude totale :

Lecture des écarts.	Époque du passage.	Époque de l'élongation.	Position du zéro.	Amplitude totale.
x_0				
	t_0			
x_1		$\frac{t_0 + t_1}{2}$	$\frac{x_0 + 2x_1 + x_2}{4}$	$\frac{x_0 + x_2 - 2x_1}{2} = a_1$
	t_1			
x_2		$\frac{t_1 + t_2}{2}$	$\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$	$\frac{2x_2 - (x_1 + x_3)}{2} = a_2$
	t_2			
x_3				

Soit n l'ordre de l'élongation initiale dans la seconde série, ou la différence des ordres de deux élongations correspondantes. On sait *a priori* si le nombre n est pair ou impair et la valeur approximative de la durée des oscillations, déduite de la première série, permet de le déterminer sans erreur.

En indiquant par un accent les quantités relatives à la seconde série, la différence des époques des élongations correspondantes dans les deux séries est successivement

$$\frac{t'_0+t'_1}{2}-\frac{t_0+t_1}{2}, \qquad \frac{t'_1+t'_2}{2}-\frac{t_1+t_2}{2}, \qquad \ldots\ldots;$$

il en résulte, pour la durée τ' d'oscillation relative à l'époque moyenne comprise entre les deux séries, 5 valeurs

$$\frac{1}{n}\left(\frac{t'_0+t'_1}{2}-\frac{t_0+t_1}{2}\right), \qquad \frac{1}{n}\left(\frac{t'_1+t'_2}{2}-\frac{t_1+t_2}{2}\right), \qquad \ldots\ldots$$

On pourra réduire aux oscillations infiniment petites, en faisant la correction de l'angle d'écart aux durées de chaque série $\frac{t_2-t_0}{2}$, $\frac{t_3-t_1}{2}$, ..., ou à la moyenne $\frac{1}{n}\left(\frac{t'_0+t'_1}{2}-\frac{t_0+t_1}{2}\right)$ des durées des oscillations correspondantes dans les séries consécutives.

Enfin, le décrément logarithmique $\lambda\tau$ relatif aux oscillations simples se déduira de deux amplitudes a' et a'' séparées par m oscillations,

$$e^{\lambda\tau}=\left(\frac{a''}{a'}\right)^m, \qquad \lambda\tau=\frac{1}{m}\mathcal{L}.\frac{a'}{a''}.$$

Si l'on considère la première amplitude a' comme connue exactement et que l'erreur absolue probable soit la même pour toutes les suivantes, on peut se proposer de choisir le nombre n d'oscillations qui donne la valeur de $\lambda\tau$ avec la plus grande approximation relative. Désignant par $d(\lambda\tau)$ l'erreur qui correspond à une erreur da'' sur la dernière amplitude a'', on a

$$\frac{d(\lambda\tau)}{\lambda\tau}=-\frac{da''}{a''\mathcal{L}.\frac{a'}{a''}}.$$

Le dénominateur du second membre, considéré comme une fonction de a'', est maximum pour la condition

$$\mathfrak{L}.\frac{a'}{a''}=1, \qquad \text{ou} \qquad m=\frac{1}{\lambda\tau}.$$

Avec la suite des observations, on détermine le décrément logarithmique, soit par les amplitudes d'une même série, soit par les amplitudes correspondantes de deux séries consécutives, lesquelles sont séparées par $n-1$ oscillations :

$$\lambda\tau=\mathfrak{L}.\frac{a_1}{a_2}=\mathfrak{L}.\frac{a_2}{a_3}=\mathfrak{L}.\frac{a_3}{a_4}=\mathfrak{L}.\frac{a_4}{a_5}=\frac{1}{4}\mathfrak{L}.\frac{a_1}{a_5},$$

$$\lambda\tau=\frac{1}{n-1}\mathfrak{L}.\frac{a_1}{a_1'}=\cdots\cdots=\frac{1}{5(n-1)}\left[\mathfrak{L}.\frac{a_1}{a_1'}+\mathfrak{L}.\frac{a_2}{a_2'}+\cdots\cdots+\mathfrak{L}.\frac{a_5}{a_5'}\right],$$

soit enfin, plus simplement, par les amplitudes moyennes a, a', a'', ... des séries différentes.

La comparaison des oscillations d'une série, ou des oscillations correspondantes de deux séries, permet de vérifier si les amplitudes varient en progression géométrique.

Nous reproduisons l'exemple donné par Gauss lui-même, comme application de la méthode, avec quelques changements dans la disposition des colonnes et en supprimant les dernières décimales qu'on doit considérer comme illusoires. Cette observation se rapporte aux oscillations d'un aimant de 25 livres sous l'influence du champ terrestre.

Les époques observées sont celles du passage du trait 1000 de l'échelle sur le réticule. On a joint au tableau la position du zéro calculée par la formule (20), quoique ces valeurs n'interviennent pas dans les calculs; mais il est nécessaire de s'assurer que la position d'équilibre n'a pas varié de quantités sensibles dans le cours d'une même série, et, par suite, dans l'intervalle de deux passages consécutifs.

Les élongations 0 et 4 donnent $42^s,20$ comme valeur approchée de la durée de l'oscillation; en divisant par cette durée l'intervalle de la quatrième élongation à la première de la série suivante, on obtient le nombre 146,98; cette dernière,

qui est en effet d'ordre impair, portera donc le numéro 147. On opérera de même pour les séries suivantes :

Ordre des élongat.	Lectures.	Epoque du passage.	Epoque de l'élongation.	Position du zéro.	Amplitude totale.
	1755,1				
0	266,0	$21^h55^m26^s,9$	$21^h55^m47^s,65$	1009,72	1487,45
1	1731,8	56 8,4	56 29,80	1009,52	1484,55
2	268,5	51,2	57 12,10	1009,42	1481,85
3	1748,9	57 33,0	57 54,25	1009,47	1478,85
4	271,6	58 15,5	58 36,45	1009.07	1474,95
	1744,2	57,4			
	497,8				
147	1502,2	23 38 49,2	23 39 10,35	1000,57	1003,15
148	500,1	39 31,5	52,55	1000,37	1000,55
149	1499,1	40 13,6	40 34,80	1000,22	997,75
150	502,6	56,0	41 17,05	1000,20	995,20
151	1496,5	41 38,1	59,20	1000,40	992,20
	506,1	42 20,3			
	645,9				
277	1341,5	1 10 12,6	1 10 33,40	994,05	694,90
278	647,3	54,2	11 15,60	993,87	693,15
279	1339,4	11 37,0	57,70	993,70	691,40
280	648,7	12 18,4	12 39,85	993,45	689,50
281	1337,0	13 1,3	13 22,15	993,35	687,30
	650,7	43,0			
	1232,1				
418	775,9	2 49 19,7	2 49 40,60	1003,72	455,65
419	1231,0	50 1,5	50 22,80	1003,57	454,85
420	776,4	44,1	51 4,95	1003,12	453,45
421	1228,7	51 25,8	47,15	1002.95	451,50
422	778,0	52 8,5	52 29,25	1002,92	449,85
	1227,0	50,0			

Les élongations correspondantes dans les deux premières séries donnent, pour la durée de 147 oscillations :

Entre les élongations	0	et	147.....	$1^h43^m22^s,70$
—	1	—	148	22 ,75
—	2	—	149	22 ,70
—	3	—	150	22 ,80
—	4	—	151	22 ,75

La moyenne $1^h43^m22^s,74$ donne $42^s,195$ pour la durée moyenne d'une oscillation dans le premier intervalle; on obtient de même $42^s,176$ pour le second intervalle, et $42^s,179$ pour le troisième. La moyenne générale est $42^s,1834$.

Entre les séries successives on trouve, pour le décrément logarithmique, 0,002689, 0,002813 et 0,002996. Ces valeurs sont légèrement croissantes; les amplitudes diminuent donc un peu plus vite que ne le comporterait la loi de la progression géométrique. On voit d'ailleurs que la position d'équilibre était nettement variable.

La distance de l'échelle était de 4775,9 millimètres. Les déviations étant ramenées à leurs valeurs angulaires, la réduction aux amplitudes infiniment petites par la formule (18) donne, pour l'intervalle qui sépare les milieux des deux séries consécutives,

Élongations.			Valeurs de τ.
2	et	149	$42^s,184$
149	—	279	42 ,171
279	—	420	42 ,176

La moyenne $42^s,177$ représente la valeur de τ avec une erreur probable inférieure à 5 millièmes de seconde. L'exactitude n'est pas supérieure à celle que donnaient les observations de Darondeau et Chevalier par une méthode de réduction plus simple.

541. Mesure des impulsions. — Quand on fait agir une force de durée très courte sur un système en équilibre et capable d'exécuter des oscillations, l'étude du mouvement ultérieur permet de déterminer la vitesse initiale du système.

Si le mouvement est sinusoïdal (**528**), cette vitesse

$$u_0 = \omega a = a\frac{2\pi}{T}$$

sera connue par l'amplitude a du mouvement et par la période T des oscillations.

Si les oscillations sont pendulaires (**529**), on a

$$u_0^2 = \frac{2C}{K}(1 - \cos a) = 4\frac{C}{K}\sin^2\frac{a}{2},$$

$$(21) \qquad u_0 = \frac{2\pi}{T}\,2\sin\frac{a}{2},$$

et la période T relative aux amplitudes très faibles se déduit de la valeur observée T′ par l'équation (5)′.

Dans le cas où les oscillations s'amortissent en restant isochrones, on aura, pour l'époque t_1 de la première élongation a_1 (**532**),

$$\omega t_1 = \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{\lambda},$$

$$a_1 = ae^{-\lambda t_1}\sin\omega t_1 = ae^{-\lambda t_1}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\lambda^2}},$$

$$(22) \quad u_0 = \omega a = a_1\sqrt{\omega^2+\lambda^2}\,e^{\lambda t_1} = \omega a_1\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}\,e^{\frac{\lambda}{\omega}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{\lambda}}.$$

Si l'amortissement est assez faible pour que le carré du rapport $\frac{\lambda}{\omega}$ soit négligeable devant l'unité, et qu'on appelle a_3 l'élongation suivante, observée du même côté, on peut écrire

$$a_1 = ae^{-\lambda t_1} = a(1 - \lambda t_1),$$

$$u_0 = \omega a = \omega a_1(1 + \lambda t_1),$$

$$a_3 = a_1 e^{-4\lambda t_1} = a_1(1 - 4\lambda t_1), \qquad a_1\lambda t_1 = \frac{a_1 - a_3}{4};$$

$$(23) \qquad u_0 = \omega\left(a_1 + \frac{a_1 - a_3}{4}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(a_1 + \frac{a_1 - a_3}{4}\right).$$

C'est la correction indiquée précédemment (**365**) pour le galvanomètre balistique.

Si l'amortissement est tel que le mouvement soit insensible après un petit nombre d'oscillations, on déterminera les pre-

miers écarts a_1, a_2, a_3, ... dans les deux sens, à des époques qui diffèrent d'une demi-période. Les expressions générales donnent alors

$$a_1 = ae^{-\lambda t_1} \sin \omega t_1 = ae^{-\frac{\lambda}{\omega}\varphi} \sin \varphi,$$

$$a_2 = a_1 e^{-\lambda \frac{T}{2}}, \quad a_3 = a_1 e^{-\lambda T}, \ldots\ldots$$

La relation $a_1 a_3 = a_2^2$ est un contrôle des observations. Il en résulte, la valeur de φ étant donnée par deux élongations successives,

$$\lambda T = \mathcal{L}.\frac{a_1}{a_3}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda T},$$

$$u_0 = \omega a = \frac{2\pi}{T \sin \varphi} a_1 e^{\frac{\lambda}{\omega}\varphi}.$$

On doit supposer enfin : 1° que le système a déjà un mouvement oscillatoire de vitesse maximum u_0 ; 2° que l'impulsion dure un certain temps ; 3° qu'elle se produit entre deux époques t_1 et t_2 voisines du passage par équilibre.

Quelle que soit la forme de cette impulsion, si la différence des angles correspondants $\delta_2 - \delta_1 = \omega(t_2 - t_1)$ est très petite, c'est-à-dire si l'intervalle de temps $\theta = t_2 - t_1$ est une petite fraction de la période T, les équations (13)' montrent que l'impulsion totale $v_0 = \omega z_m$ est la même que si elle avait lieu à l'époque moyenne $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

D'autre part, si cette époque moyenne t_m est très voisine de celle du passage à l'équilibre, il résulte aussi de l'équation (13) que la variation de vitesse initiale ne diffère que par une quantité du second ordre de la somme $u_0 + v_0 = u'_0$. Connaissant la vitesse u_0 par les oscillations primitives et u'_0 par celles qui suivent l'impulsion, on en déduira v_0.

Dans les conditions de l'équation (23), à part la variation très faible de la période, l'élongation moyenne $a'_1 + \frac{a'_1 - a'_3}{4}$ finale est $a_1 + \frac{a_1 - a_3}{4} + b_1 + \frac{b_1 - b_3}{4}$, c'est-à-dire la somme de l'élongation primitive et de celle qui correspondrait à l'impulsion v_0.

542. Méthodes de répétition. — Il résulte du même raisonnement que si l'on imprime au système deux vitesses successives u_0 et v_0 de faibles durées par rapport à la période et dont l'intervalle de succession soit de même ordre, la vitesse acquise est simplement la somme algébrique $u_0 + v_0$, au second ordre près, comme si les effets étaient simultanés.

Quand on est maître de reproduire le phénomène dans des conditions identiques et alternativement dans les deux sens, comme lorsqu'il s'agit de décharges électriques, on peut répéter l'impulsion à chaque passage du système par la position d'équilibre et obtenir ainsi des déviations beaucoup plus grandes; c'est la *méthode de multiplication*.

Le système étant lancé avec la vitesse u_0, la vitesse de sens contraire, au retour par la position d'équilibre, est

$$u_0' = u_0 e^{-2\lambda t_1} \frac{\sin(2\omega t_1 - \varphi)}{\sin\varphi} = u_0 e^{-2\lambda t_1} = u_0 \alpha.$$

Une nouvelle impulsion à ce moment donne au système la vitesse $u_0 \alpha + u_0 = u_0(1 + \alpha)$, de sorte qu'après n opérations de même nature, la vitesse finale est

$$u_0(1 + \alpha + \ldots\ldots + \alpha^{n-1}) = u_0 \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}.$$

En appelant a_0 l'élongation qui serait produite par la première impulsion sans amortissement et $a, a_1, \ldots\ldots a_n$ les élongations suivantes, on a aussi

$$\begin{aligned}
a &= a_0 e^{-\lambda t_1} = a_0 \alpha^{\frac{1}{2}}, \\
a_1 &= (a_0 \alpha + a_0)\alpha^{\frac{1}{2}} = a(1 + \alpha), \\
a_2 &= (a_1 \alpha + a_0)\alpha^{\frac{1}{2}} = a(1 + \alpha + \alpha^2), \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_n &= a(1 + \alpha + \ldots\ldots + \alpha^n) = a \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}.
\end{aligned}$$

On déterminera la raison α de cette progression par les

élongations initiale et finale, ou par deux élongations quelconques a_n et a_p, qui donnent

$$\frac{a^p}{a^n} = \frac{1 - \alpha^{p+1}}{1 - \alpha^{n+1}}.$$

La vitesse initiale est alors

$$u_0 = \omega a_0 = \omega a \alpha^{\frac{1}{2}} = \omega a_n \frac{(1 - \alpha)\alpha^{\frac{1}{2}}}{1 - \alpha^{n+1}}.$$

Si cette vitesse est assez faible, ou l'amortissement assez grand, pour que l'opération répétée indéfiniment ne donne

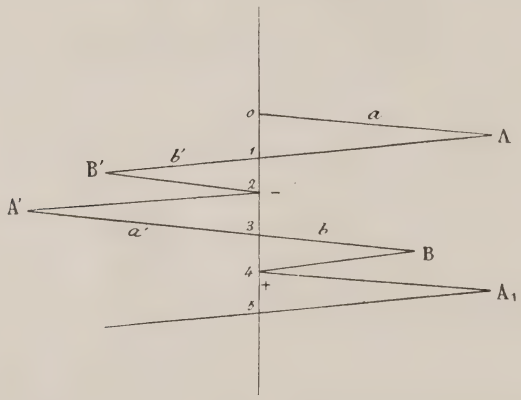


Fig. 136.

pas des élongations exagérées, on arrive bientôt à un régime définitif dans lequel la déviation est $\frac{a}{1 - \alpha} = b$ et l'on a

$$n_0 = \omega b (1 - \alpha) \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

La valeur de α sera donnée alors par l'étude des oscillations libres à la suite des impulsions.

La *méthode de recul* a été imaginée par Weber [1]. L'appareil étant lancé dans la direction positive par l'impulsion initiale, on lui laisse atteindre une première élongation A,

[1] W. Weber, *Abh. der K. Gesell. zu Göttingen*, t. I, p. 349. — *Resultate des Mag. Vereins*, 1838, p. 98.

puis l'élongation négative suivante B′ (fig. 136). Au passage de retour par l'équilibre, on donne une impulsion négative et on laisse produire les deux élongations A′ et B. Une impulsion positive est imprimée de nouveau au système quand il revient au zéro, etc. On aura alors

$$\begin{aligned}
a &= a_0 e^{-\lambda t_1} = a_0 \alpha^{\frac{1}{2}},\\
b' &= a\alpha,\\
a' &= a - b'\alpha = a(1-\alpha^2),\\
b &= a'\alpha = a\alpha(1-\alpha^2),\\
a_1 &= a - b\alpha = a(1-\alpha^2+\alpha^4), \ldots\ldots;\\
\alpha &= \frac{b'}{a} = \frac{b}{a'} = \frac{b+b'}{a+a'},
\end{aligned}$$

$$a = a' + b'\alpha = a_1 + b\alpha = \frac{1}{2}\left[a' + a_1 + (b'+b)\alpha\right] = a_0\alpha^{\frac{1}{2}}.$$

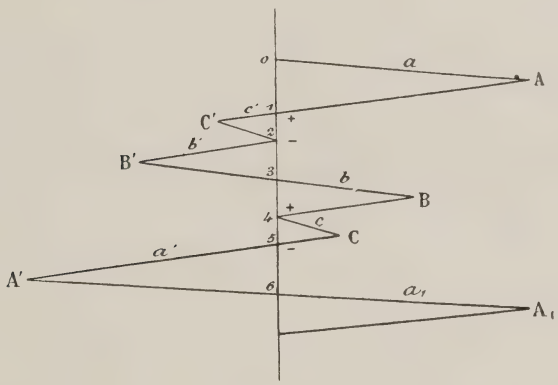


Fig. 137.

La raison α et l'amplitude a_0 seront ainsi déterminées par les distances BB′, AA′ et A′A₁, sans qu'il soit nécessaire de connaître la position du zéro.

Si les opérations sont répétées indéfiniment, de manière à produire un régime régulier, les quatre espèces d'élongations deviennent constantes et l'on a $a' = a_1$, $b' = b$.

La méthode de recul ne convient pas lorsque l'amortissement est très faible. Weber et Zöllner [1] ont employé,

[1] Weber et Zöllner, *Berichte der K. S. Gesell.*, Leipzig; 1880.

dans ce cas, une *méthode mixte*, qui consiste encore à donner des impulsions successives de sens contraires, mais qui sont alternativement en accord ou en désaccord avec la vitesse actuelle.

A la suite d'une grande élongation positive A (fig. 137), le système reçoit, au passage par l'équilibre, une impulsion positive, qui réduit l'élongation suivante en C′; au deuxième passage, une impulsion négative produit une élongation moyenne B′ et l'oscillation suivante B′B est libre. Au retour, une impulsion positive amène le système en C, puis une impulsion négative produit l'élongation A′. L'oscillation $A'A_1$ est encore libre et les mêmes opérations recommencent.

On a ainsi trois espèces d'oscillations. Si l'on pose $a'_0 = a_0 \alpha^{\frac{1}{2}}$, les élongations successives deviennent

$$\begin{aligned} c' &= a\alpha - a'_0, & b' &= a'_0 - c'\alpha, \\ b &= b'\alpha, & c &= a'_0 - b\alpha, \\ a' &= a'_0 + c\alpha, & a_1 &= a'\alpha. \end{aligned}$$

Ces observations ne se prêtent pas au calcul du rapport α, qu'on déterminera par les oscillations libres; elles donnent différentes valeurs de a'_0, parmi lesquelles l'expression

$$2a'_0 = a' + b\alpha + c(1 - \alpha) = a' + b - (b - c)(1 - \alpha),$$

n'exige pas la connaissance du zéro. Les autres relations peuvent servir de contrôle.

On atteindra encore le régime permanent, ou $a_1 = a$, après un certain nombre d'opérations.

La méthode de multiplication permet de mettre en évidence et d'évaluer des impulsions très faibles. Les deux autres comportent de graves causes d'erreurs qui tiennent à la nécessité de provoquer les impulsions successives à des époques bien déterminées; elles ne paraissent présenter aucun avantage sérieux sur l'observation directe de la première déviation et des oscillations libres qui la suivent.

543. Mouvement apériodique. — Il reste enfin à examiner le cas où l'amortissement est assez grand pour que le sys-

tème n'exécute plus d'oscillations libres [1], ce qui exige la condition (532)

$$\omega^2 < 0 \quad \text{ou} \quad C_1^2 > 4KC.$$

Posant cette fois $\gamma^2 = \lambda^2 - \frac{C}{K}$, l'équation qui détermine les exponentielles peut s'écrire

$$\rho^2 + 2\lambda\rho + \lambda^2 - \gamma^2 = 0,$$
$$\rho = -\lambda \pm \gamma,$$

et la solution de l'équation (8) devient

$$(24) \quad \begin{cases} x = e^{-\lambda t}(Ae^{\gamma t} + A'e^{-\gamma t}), \\ \dfrac{dx}{dt} = -e^{-\lambda t}[A(\lambda - \gamma)e^{\gamma t} + A'(\lambda + \gamma)e^{-\gamma t}]. \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes, nous supposerons qu'à l'époque $t = 0$ on abandonne le système à lui-même sous l'écart a avec une vitesse initiale $-v_0$ dirigée vers la position d'équilibre. On a alors $x_0 = a$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -v_0$; il en résulte

$$a = A + A',$$
$$v_0 = A(\lambda - \gamma) + A'(\lambda + \gamma);$$
$$A = \frac{a(\lambda + \gamma) - v_0}{2\gamma}, \quad A' = \frac{v_0 - a(\lambda - \gamma)}{2\gamma},$$

$$(24)' \quad \begin{cases} x = \dfrac{e^{-\lambda t}}{2\gamma}\left\{[a(\lambda + \gamma) - v_0]e^{\gamma t} - [a(\lambda - \gamma) - v_0]e^{-\gamma t}\right\}, \\ \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{e^{-\lambda t}}{2\gamma}\left\{[a(\lambda^2 - \gamma^2) - v_0(\lambda - \gamma)]e^{\gamma t} - [a(\lambda^2 - \gamma^2) - v_0(\lambda + \gamma)]e^{-\gamma t}\right\}. \end{cases}$$

Si la vitesse v_0 est nulle, le système ne revient à sa position d'équilibre qu'au bout d'un temps infini en théorie, et pratiquement assez court, sans que l'écart éprouve aucun changement de signe.

Avec la vitesse v_0, le mouvement est encore apériodique,

[1] Dubois-Raymond, *Monatsb. der K. P. Ak. der Wiss.*, 1869, 1870, 1873.

mais la valeur de x peut changer de signe. L'époque t_1 du passage à l'équilibre est

$$e^{2\gamma t_1} = \frac{a(\lambda-\gamma)-v_0}{a(\lambda+\gamma)-v_0} = \frac{v_0-a(\lambda-\gamma)}{v_0-a(\lambda+\gamma)},$$

et l'époque t_2 du plus grand écart en sens contraire

$$e^{2\gamma t_2} = \frac{\lambda+\gamma}{\lambda-\gamma}\cdot\frac{v_0-a(\lambda-\gamma)}{v_0-a(\lambda+\gamma)}.$$

Le système revient ensuite lentement à l'équilibre. Pour que la valeur de t_1 soit réelle, il faut qu'on ait $v_0 > a(\lambda+\gamma)$.

Supposons enfin que le système parte de l'équilibre avec une vitesse initiale v_0 ; il suffit de faire $a = 0$ dans les équations (24)', en changeant le signe de v_0, ce qui donne

$$(24)'' \quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{v_0}{2\gamma}e^{-\lambda t}(e^{\gamma t}-e^{-\gamma t}),\\ \frac{dx}{dt} &= \frac{v_0}{2\gamma}e^{-\lambda t}\left[(\gamma-\lambda)e^{\gamma t}+(\gamma+\lambda)e^{-\gamma t}\right].\end{aligned}\right.$$

L'époque t_1 de l'élongation est indépendante de la vitesse initiale, car on a

$$e^{2\gamma t_1} = \frac{\lambda+\gamma}{\lambda-\gamma},$$

et l'élongation α_1 est proportionnelle à v_0.

Un cas particulier intéressant est celui où γ est assez petit pour que son carré soit négligeable.

Prenant les deux premiers termes du développement de $e^{\gamma t}$ et $e^{-\gamma t}$, les équations (24) deviennent

$$(25) \quad \left\{\begin{aligned} x &= e^{-\lambda t}\left[A+A'+(A-A')\gamma t\right] = e^{-\lambda t}\left[B+B'\gamma t\right],\\ \frac{dx}{dt} &= -e^{-\lambda t}\left[B\lambda-B'\gamma(1-\lambda t)\right].\end{aligned}\right.$$

On aura, de même,

$$(25)' \quad \left\{\begin{aligned} x &= e^{-\lambda t}\left[a+(a\lambda-v_0)t\right],\\ \frac{dx}{dt} &= -e^{-\lambda t}\left[v_0+\lambda(a\lambda-v_0)t\right].\end{aligned}\right.$$

Pour $v_0 = o$, le système s'approche asymptotiquement de sa position d'équilibre. La vitesse est d'abord nulle, atteint son maximum au bout du temps déterminé par la condition $\lambda t = 1$ et décroît ensuite jusqu'à zéro.

Quand le système a reçu une vitesse initiale, il ne dépasse sa position d'équilibre que pour la condition $v_0 > a\lambda$.

Enfin, si $a = o$, il vient, en changeant le signe de v_0,

$$(25)'' \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= v_0 t e^{-\lambda t}, \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 e^{-\lambda t}(1 - \lambda t). \end{aligned} \right.$$

L'élongation a_1, à l'époque $\lambda t_1 = 1$, est égale à $\frac{v_0}{\lambda e}$.

COUPLES

544. Moments d'inertie. — Le couple qui tend à ramener vers sa position d'équilibre un appareil mobile autour d'un axe pourrait être déterminé par l'action d'un couple antagoniste, tel que celui que l'on obtiendrait par un poids attaché à l'extrémité d'un bras de levier de longueur connue ; cette méthode directe a été employée par Wertheim [1] pour étudier l'élasticité de torsion des barres métalliques, mais elle est rarement applicable. Dans la plupart des expériences, surtout quand il s'agit d'appareils légers, la valeur des couples de torsion se déduit de l'étude des oscillations.

Lorsque le couple Cx est proportionnel à l'angle d'écart x, ce qui est généralement le cas pour les oscillations de très faible amplitude, et que l'amortissement est négligeable, la période T des oscillations infiniment petites donne (**528**), en appelant N la *fréquence*, c'est-à-dire le nombre des périodes par seconde,

$$\frac{C}{K} = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = 4\pi^2 N^2.$$

[1] WERTHEIM, *Ann. de Ch. et de Phys.* (3), t. L, p. 195 et 385; 1857.

Si les oscillations sont amorties, en conservant le caractère d'isochronisme, on a (532)

$$\frac{C}{K} = \omega^2 + \lambda^2 = 4\pi^2 N^2 + \lambda^2.$$

La valeur du couple C relatif à l'unité d'angle sera ainsi déterminée par le moment d'inertie K du système et par l'étude des oscillations.

Le *moment d'inertie* d'un système rigide autour d'un axe est la somme des produits de chacune des masses m par le carré r^2 de sa distance à l'axe. On peut toujours poser

$$K = \Sigma m r^2 = k^2 \Sigma m = k^2 M.$$

La quantité k ainsi définie est le *rayon de giration ;* c'est la distance à laquelle devrait être portée la masse totale M du système pour que le moment d'inertie restât le même.

Ces moments d'inertie jouent un rôle si important dans les expériences qu'il est utile d'en rappeler ici les principales propriétés.

Considérons un système quelconque rapporté à des axes rectangulaires d'origine O. Soient x, y, z les coordonnées d'une masse élémentaire m et α, β, γ les cosinus directeurs d'une droite quelconque passant par l'origine. La distance r de l'élément m à la droite considérée est

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2,$$

et le moment d'inertie du système par rapport à cette droite

$$(1) \quad M k^2 = \alpha^2 \Sigma m (z^2 + y^2) + \beta^2 \Sigma m (x^2 + z^2) + \gamma^2 \Sigma m (y^2 + x^2) - 2\alpha\beta \Sigma m x y - 2\beta\gamma \Sigma m y z - 2\gamma\alpha \Sigma m z x.$$

Les quantités $\Sigma m\ (z^2 + y^2)$, ... sont des constantes et représentent les moments d'inertie du système par rapport aux axes de coordonnées ; les quantités $\Sigma m x y$, ... sont également des constantes et l'on peut écrire

$$M k^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\gamma\alpha - 2C'\alpha\beta.$$

Portant sur la droite une longueur égale à l'inverse du rayon de giration k et appelant ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité de cette longueur, on a

$$\alpha = k\xi, \quad \beta = k\eta, \quad \gamma = k\zeta,$$

$$(2) \qquad M = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2A'\eta\zeta - 2B\zeta\xi - 2C'\xi\eta.$$

Comme le second membre de l'équation (1) est essentiellement positif, l'équation (2) représente un ellipsoïde ; un rayon vecteur quelconque est l'inverse du rayon de giration du système par rapport à la direction correspondante.

Si les axes de coordonnées sont parallèles aux axes de

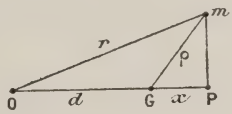


Fig. 138.

l'ellipsoïde (2), les coefficients A', B', C' sont nuls et les coefficients A, B, C positifs. Il en résulte, en posant

$$A = Mk_1^2, \quad B = Mk_2^2, \quad C = Mk_3^2,$$

$$(3) \qquad k_1^2\xi^2 + k_2^2\eta^2 + k_3^2\zeta^2 = 1.$$

Les quantités k_1, k_2, k_3 sont les rayons principaux de giration relatifs aux droites passant par l'origine. Le rayon de giration k relatif à une droite de direction (α, β, γ) est alors

$$(4) \qquad k^2 = k_1^2\alpha^2 + k_2^2\beta^2 + k_3^2\gamma^2.$$

Menons par le centre de gravité G du système (fig. 138) un plan perpendiculaire à un axe de rotation pour lequel le rayon de giration est k. Soit r la distance d'une masse m à cet axe et ρ sa distance à un axe parallèle au premier passant par le centre de gravité. En appelant d la distance OG, et x la projection GP du rayon ρ sur la droite OG, on a

$$r^2 = \rho^2 + d^2 + 2dx,$$

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m \rho^2 + d^2 \Sigma m + 2d\Sigma m x.$$

Le facteur Σmx est nul en raison des propriétés du centre de gravité ; en appelant k_0 le rayon de giration relatif à la droite considérée passant par le point G, il en résulte

$$k^2 = k_0^2 + d^2. \tag{5}$$

La valeur de k est la même pour toutes les génératrices d'un cylindre circulaire droit dont l'axe passe par le centre de gravité.

Dans le cas d'un pendule composé oscillant autour de la droite O supposée horizontale, la période T des oscillations infiniment petites a pour expression

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{k^2}{gd}.$$

La longueur l du pendule simple synchrone est

$$l = \frac{k^2}{d} = d + \frac{k_0^2}{d} = d + d'.$$

La quantité d' est la distance, sur la droite OG, du centre de gravité à un point O′ appelé *centre d'oscillation*. Comme on a $dd' = k_0^2$, il en résulte que si l'on fait osciller le système autour d'une droite parallèle à la première et passant par le point O′, la longueur du pendule simple synchrone ne serait pas changée; c'est le principe du *pendule reversible*.

545. Exemples. — Sans reproduire des calculs connus, il suffira d'indiquer la valeur des rayons de giration principaux de corps homogènes ayant certaines formes simples.

Pour un *parallélipipède rectangle*, dont les côtés sont $2a$, $2b$ et $2c$, le rayon de giration relatif à une droite parallèle au côté $2c$ est

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

Les rayons principaux de giration sont parallèles aux arêtes et respectivement proportionnels aux diagonales des faces perpendiculaires.

Lorsque l'une des dimensions transversales, b par exemple,

est très petite, comme dans le cas d'une lame allongée, on peut écrire

$$k = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{b^2}{2a^2}\right).$$

Pour un *cylindre circulaire droit*, à bases perpendiculaires à l'axe, de rayon a, le rayon de giration k_1 relatif à l'axe est égal à $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Si l'on désigne par $2l$ la longueur du cylindre, le rayon de giration k_2 par rapport à une droite perpendiculaire à l'axe est

$$k_2^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{l^2}{3}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{a^2}{l^2}\right).$$

Dans ce cas, l'ellipsoïde des rayons de giration est de révolution. Si l'on veut qu'il devienne sphérique, c'est-à-dire que tous les rayons de giration aient la même valeur, il suffira d'égaler les rayons principaux, ce qui donne la condition

$$\frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}, \qquad 2l = a\sqrt{3}.$$

Le moment d'inertie d'un *cylindre creux*, limité par des surfaces de même axe et de rayons a et a', est la différence des moments d'inertie des cylindres pleins ayant les mêmes rayons. Il en résulte

$$k_1^2 = \frac{a^2 + a'^2}{2} = \left(\frac{a + a'}{2}\right)^2\left[1 + \left(\frac{a - a'}{a + a'}\right)^2\right].$$

Si l'épaisseur $a - a' = e$ est assez petite pour que le carré du rapport $\frac{e}{a}$ soit négligeable devant l'unité, on peut écrire

$$k_1^2 = a^2\left(1 - \frac{e}{a}\right), \qquad k_1 = a\left(1 - \frac{e}{2a}\right).$$

Autour d'une perpendiculaire à l'axe, on aurait, de même,

$$k_2^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{a^2 + a'^2}{4},$$

et la condition d'égalité des deux rayons principaux de giration devient

$$4l^2 = 3(a^2 + a'^2).$$

Enfin, le rayon de giration d'une *sphère* est

$$k^2 = \frac{2}{5} a^2$$

et celui d'une sphère creuse, de rayons a et a',

$$k^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^5 - a'^5}{a^3 - a'^3}.$$

Lorsque l'épaisseur $a - a' = e$ est très petite par rapport au rayon, cette dernière expression se réduit à

$$k^2 = \frac{2}{3} a^2.$$

Le moment d'inertie ne peut être obtenu avec une grande précision par le calcul, que si la forme du corps est de construction simple et les dimensions faciles à mesurer.

Le diamètre d'une *sphère* bien régulière, par exemple, se déterminera plus exactement par la masse totale et la densité que par la mesure directe. Ce n'est pas la forme la plus avantageuse, car il est préférable de charger le moins possible les appareils oscillants et de choisir les corps qui ont pour un même poids le plus grand rayon de giration.

Coulomb se servait d'un *cylindre plein* tournant autour de son axe. Pour éviter la nécessité de régler le parallélisme, il suffit que les dimensions du cylindre satisfassent à la condition $2l = a\sqrt{3}$, auquel cas le rayon de giration est indépendant de la direction de l'axe.

Lord Kelvin recommande plutôt l'emploi d'un *cylindre creux*, reposant sur une lame mince, carrée ou circulaire, qui permette de le centrer exactement sur l'axe de rotation. Ces deux formes ont l'avantage de se prêter au travail du tour, la vérification est facile et les frottements dans l'air

très faibles. En outre, le défaut d'homogénéité de la matière a peu d'importance dans un cylindre creux, puisque toute la masse est à peu près à la même distance de l'axe.

On emploie souvent un *barreau* de grande longueur à section rectangulaire. La seule mesure importante est celle de la longueur, la dimension transversale n'intervenant que dans un terme de correction. La matière doit alors être bien homogène, car il ne suffit pas que le centre de gravité soit au milieu de la longueur pour être assuré que le rayon de giration n'est pas altéré par les variations de densité. A poids égal, le moment d'inertie d'une lame mince peut être notablement plus grand que celui d'un cylindre annulaire. Si l'on coupe en effet cet anneau suivant une génératrice pour en former une lame, le carré du rayon de giration, qui était $a^2\left(1-\frac{e}{a}\right)$, devient $\frac{\pi^2 a^2}{3}\left(1+\frac{l^2}{a^2}\right)$; pour de faibles valeurs des rapports $\frac{e}{a}$ et $\frac{l^2}{a^2}$, le moment d'inertie varie de 1 à $\frac{\pi^2}{3}=3{,}29$.

546. Déterminations expérimentales. — Lorsque le système est de forme complexe ou hétérogène, son moment d'inertie K s'obtient par comparaison avec un corps homogène de forme simple, en observant leurs oscillations autour d'un axe.

Il se présente deux cas distincts, suivant que le couple directeur, qui tend à ramener l'appareil à sa position d'équilibre, est indépendant ou non du poids du système. On peut d'ailleurs rendre l'amplitude des oscillations assez petite pour que ce couple Cx soit proportionnel à la déviation.

Dans le premier cas, on détermine la période T des oscillations ou, s'il existe un amortissement sensible, la valeur de

$$\frac{1}{p^2}=\omega^2+\lambda^2=\frac{4\pi^2}{T^2}\left(1+\frac{\lambda^2 T^2}{4\pi^2}\right).$$

On ajoute ensuite au système un corps auxiliaire, de moment d'inertie connu K', et on détermine de la même manière, par l'étude des nouvelles oscillations, la quantité

$$\frac{1}{p'^2}=\frac{4\pi^2}{T'^2}\left(1+\frac{\lambda'^2 T'^2}{4\pi^2}\right).$$

Il en résulte

$$C = \frac{K}{p^2} = \frac{K + K'}{p'^2} = \frac{K'}{p'^2 - p^2},$$

$$K = K' \frac{p^2}{p'^2 - p^2}, \qquad C = \frac{K'}{p'^2 - p^2}.$$

Si l'amortissement est négligeable, les quantités p et p' sont simplement proportionnelles aux périodes T et T', ou en raison inverse des nombres d'oscillations N et N' pendant le même temps θ, et l'on aura

$$p = \frac{T}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi N}, \qquad p' = \frac{T'}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi N'}.$$

Dans ses expériences sur le magnétisme terrestre, où le couple directeur était produit par l'action de la composante horizontale du champ sur un barreau aimanté suspendu à un fil sans torsion appréciable, Gauss [1] fixait à l'équipage mobile une règle horizontale divisée et employait, comme corps auxiliaire, *deux sphères* qu'il suspendait par des crochets de part et d'autre et à égale distance de l'axe ; on mesure exactement la distance d des points d'attache. Si m est la masse de chacune des sphères dont le rayon est a, m' la masse de chaque crochet et k' son rayon de giration par rapport à un axe vertical passant par le centre de gravité de la sphère correspondante, le moment d'inertie du système additionnel a pour valeur

$$K' = 2(m + m')\frac{d^2}{4} + 2\frac{2}{5}a^2 + 2m'k'^2;$$

le dernier terme est généralement très petit et peut être évalué d'une manière approximative.

Si l'on veut éliminer le moment d'inertie K_1 de la règle, on fera osciller le système dans trois conditions différentes : 1° sans la règle ; 2° avec la règle seule ; 3° avec la règle et les sphères. Désignant par p, p_1 et p' les valeurs relatives aux

(1) Gauss, *Intensitas vis magn.*, *Comm. Gött.*, t. VIII, 1841 ; *Œuvres*, t. V, p. 95.

trois espèces d'oscillations, les quantités C, K et K_1 seront déterminées par les équations

$$C = \frac{K}{p^2} = \frac{K + K_1}{p_1^2} = \frac{K + K_1 + K'}{p'^2} = \frac{K'}{p'^2 - p_1^2} = \frac{K_1}{p_1^2 - p^2}.$$

Il est utile de répéter la troisième observation avec d'autres valeurs de la distance d et de calculer les inconnues en combinant les différentes équations.

Dans plusieurs circonstances, il y a lieu de craindre, quel que soit le mode de suspension du système mobile, que le couple directeur ne soit pas indépendant de la charge.

On dirige alors les expériences de manière à modifier le moment d'inertie du système d'une quantité connue, sans en altérer le poids total. Il suffit que l'équipage oscillant soit composé d'une partie fixe, de moment d'inertie K, et d'une partie mobile dont le moment d'inertie prenne dans deux positions successives des valeurs connues K′ et K″ ; tel est le cas des sphères de Gauss placées à des distances différentes. On a alors

$$C = \frac{K + K'}{p'^2} = \frac{K + K''}{p''^2} = \frac{K'' - K'}{p''^2 - p'^2},$$

$$K = \frac{K''p'^2 - K'p''^2}{p''^2 - p'^2}.$$

Avec les deux sphères de Gauss, ou des masses m de forme quelconque placées successivement aux distances d' et d'' et d'une manière symétrique par rapport à l'axe de rotation, on aura simplement

$$K'' - K' = \frac{m + m'}{2}(d''^2 - d'^2).$$

Supposons enfin que le couple directeur soit dans un rapport connu avec le poids du système, que ce couple soit proportionnel au poids, par exemple, comme nous le verrons pour la suspension bifilaire. En appelant m la masse et K le moment d'inertie du système primitif, m' et K′ les mêmes

quantités relatives au corps additionnel, et h un coefficient constant, les relations

$$\frac{C}{m} = \frac{C'}{m+m'} = h$$

donnent alors, pour les deux expériences,

$$C = mh = \frac{K}{p^2}, \qquad C' = (m+m')h = \frac{K+K'}{p'^2},$$

$$h = \frac{K}{mp^2} = \frac{K+K'}{(m+m')p'^2} = \frac{K'}{(m+m')p'^2 - mp^2}.$$

547. Balance unifilaire. — La balance unifilaire, ou *balance de torsion*, a été imaginée par Coulomb qui en a montré les précieuses ressources pour la mesure des petites forces [1]; elle se compose essentiellement d'un fil élastique, ordinairement de métal, fixé à sa partie supérieure et soutenant un système quelconque tel qu'une aiguille légère terminée par une boule électrisée, un barreau aimanté, une sphère métallique, un plateau, etc.

Le fil est attaché par sa partie supérieure à un tambour divisé; ce tambour, mobile en face d'un repère ou d'un vernier, permet de mesurer la rotation qu'on imprime à l'extrémité du fil. Lorsque le système est libre et n'a pas par lui-même de couple directeur, la position d'équilibre correspond au cas où le fil est sans torsion. S'il existe une action extérieure, comme celle du champ terrestre sur un aimant, on peut toujours, par une rotation convenable du tambour, amener le système dans la position qu'il prendrait sous la seule action directrice. Cette condition est évidemment réalisée si la position d'équilibre ne change pas quand on supprime l'action extérieure, quand, par exemple, on remplace le barreau aimanté par un barreau de cuivre de même poids. Tout déplacement angulaire α du corps, à partir de cette position, détermine une torsion de même angle dans le fil. En outre, si l'on a fait tourner le micromètre supérieur d'un

[1] Coulomb, *Mém. des savants étrangers*, t. X; 1777.

angle A compté en sens contraire, la torsion totale du fil est la somme algébrique $A + \alpha$ des deux angles.

548. Lois de la torsion. — Si le fil porte un système soustrait à toute action étrangère et qu'on abandonne l'appareil à lui-même après l'avoir écarté de sa position d'équilibre, il exécute une série d'oscillations plus ou moins amorties. Les expériences de Coulomb ont montré que, dans des limites assez étendues, ces oscillations sont très sensiblement isochrones. Il en résulte que le couple qui tend à ramener le fil tordu à sa position d'équilibre est proportionnel à l'angle d'écart x; on peut donc le représenter par Cx.

La constante C représente le couple qui serait nécessaire pour tordre le fil d'un angle égal à l'unité, si la loi de proportionnalité s'étend jusqu'à cette limite ; c'est le *coefficient de torsion du fil*. L'expérience montre que sa valeur est sensiblement indépendante du poids du corps suspendu, autrement dit, de la tension du fil.

Lorsque le fil est cylindrique et de section circulaire, de longueur l et de diamètre d, on peut écrire, en désignant par μ une constante,

$$C = \mu \frac{d^4}{l}. \tag{6}$$

Le coefficient de torsion d'un fil est donc en raison inverse de sa longueur et proportionnel à la quatrième puissance du diamètre, ou au carré de la section ; le facteur constant μ ne dépend que de la nature du fil et de sa température.

Pour $d = 1$ et $l = 1$, on aurait $C = \mu$. La valeur μ est donc l'expression numérique du couple capable de tordre d'un angle égal à l'unité un cylindre ayant un centimètre de diamètre et un centimètre de hauteur. Ce coefficient μ est le quotient d'une force par une surface, ses dimensions sont $L^{-1}MT^{-2}$; il ne diffère que par un facteur numérique de ce qu'on appelle ordinairement la *rigidité* ou le *second module d'élasticité*.

Considérons, en effet, un cylindre droit de section S, et supposons que, l'une des bases étant fixée d'une manière invariable, on soumette tous les éléments de l'autre à des forces tangentielles, égales et parallèles, dont la somme est F.

Chaque section parallèle aux bases se déplace d'une quantité proportionnelle à sa distance à la base fixe ; le cylindre s'incline donc d'un angle α indépendant de sa hauteur. La déformation étant très faible, l'angle α est proportionnel à la force par unité de section et l'on peut écrire

$$\alpha = \frac{1}{\varphi}\frac{F}{S}, \quad \frac{F}{S} = \alpha\varphi.$$

Le coefficient φ est le second module d'élasticité ; il représente physiquement la force qui serait nécessaire pour incliner, d'un angle égal à l'unité, un cylindre dont la section serait égale à l'unité.

Supposons maintenant qu'un cylindre circulaire, de longueur l et de diamètre d, soit tordu d'un angle x ; chacune des génératrices primitives devient une hélice. La base inférieure étant fixe, le déplacement d'un point de la base supérieure, situé à une distance r de l'axe, est égal à rx, et l'inclinaison de l'hélice correspondante sur l'axe est $\alpha = \frac{rx}{l}$; la réaction élastique par unité de surface est $\alpha\varphi$ et son moment par rapport à l'axe $\alpha\varphi r$.

Le moment des réactions relatives à la surface d'une couronne circulaire comprise entre les rayons r et $r + dr$ a pour valeur $2\pi\alpha\varphi r^2 dr$.

Enfin, le couple de torsion Cx est l'intégrale de cette expression étendue à toute la base du cylindre, ce qui donne

$$C = \frac{2\pi\varphi}{x}\int \alpha r^2 dr = \frac{2\pi\varphi}{l}\int r^3 dr = \frac{\pi}{32}\varphi\frac{d^4}{l},$$

$$\mu = \frac{\pi}{32}\varphi.$$

549. Coefficients d'élasticité. — Les fils élastiques ont de si nombreuses applications dans les appareils de torsion qu'il est utile d'examiner de plus près les propriétés des différentes substances auxquelles on peut avoir recours.

Lorsqu'une tige cylindrique est tendue par un poids compris entre certaines limites, elle éprouve un allongement tem-

poraire δ proportionnel à sa longueur primitive l, au poids tenseur P et en raison inverse de la section S :

$$\delta = \frac{lP}{ES}.$$

Le coefficient E, que l'on appelle *premier module d'élasticité*, ou module d'Young, représenterait la tension nécessaire, par unité de section, pour doubler la longueur du cylindre ; il a les mêmes dimensions que le second module φ.

En fait, on ne tarde pas à dépasser les limites d'élasticité et le cylindre, une fois déchargé, ne reprend plus ses dimensions primitives, il a éprouvé un allongement permanent qui modifie ses propriétés.

Quand on augmente la charge, il arrive enfin que le fil se rompt. La *ténacité* est la tension maximum T par unité de section correspondant à la rupture; c'est encore une grandeur de mêmes dimensions.

La détermination du coefficient de torsion C d'un fil, ou du second module φ, par les méthodes qui précèdent, ne laisse pas que de présenter des difficultés sérieuses.

Les fils de métal doivent être recuits avec le plus grand soin, de manière à faire disparaître toute trace de torsion antérieure ; sans cette précaution, la position d'équilibre se déplacerait avec le temps et la réaction élastique ne serait pas la même de part et d'autre.

Les expériences de Coulomb tendent à montrer que le coefficient C est indépendant de la tension, mais cette loi n'est qu'approchée. En réalité l'élasticité d'un fil diminue quand la tension augmente, déduction faite de la variation qui résulte des changements de longueur et de diamètre [1].

Un fil tordu d'abord, puis laissé libre, conserve une torsion résiduelle qui disparaît ensuite lentement. D'après M. Wiedemann [2], cet effet se produirait même sous les angles les plus petits ; dans le mouvement oscillatoire d'un système suspendu par un fil métallique, la position d'équilibre serait à chaque instant déplacée par les oscillations.

(1) Sir W. Thomson (Lord Kelvin), *Encyc. Brit.*, article « *Elasticity* », § 81.

(2) G. Wiedemann, *Wied. Ann.*, t. VI, p. 485; 1879.

De même, les oscillations ne sont pas absolument isochrones; la période croît avec l'angle d'écart, de sorte que la rigidité est d'autant plus grande qu'on la détermine par des oscillations de moindre amplitude. On peut attribuer à la même cause une partie des écarts entre les valeurs des coefficients trouvés par la méthode des oscillations ou par la méthode statique; ces derniers, qui sont les plus petits, ont toujours été déduits de torsions plus considérables.

La rigidité diminue quand on maintient la torsion. Dans une expérience citée par lord Kelvin, une torsion permanente de 10 tours faisait perdre, à un fil de cuivre de $3^{m},50$ de longueur et de $0^{c}.154$ de diamètre, la fraction 0,05 de sa rigidité; pour 100 tours, la diminution dépassait 0,1 et elle croissait d'une manière plus lente jusqu'à la rupture du fil. Un allongement permanent produit le même effet.

Une autre remarque importante, due à lord Kelvin, est que la rigidité d'un fil diminue temporairement après une longue période d'oscillations; il se produit dans le métal une sorte de *fatigue élastique*.

Les amplitudes successives varient sensiblement en progression géométrique, au moins entre certaines limites, car l'amortissement croît d'une manière manifeste pour les grands écarts. La cause retardatrice est donc à peu près proportionnelle à la vitesse. Le frottement de l'air n'y intervient que pour une faible part; le phénomène est dû à une sorte de *viscosité* métallique, qui est l'analogue du frottement dans les liquides. Un corps ne peut changer de forme, fût-il absolument élastique, sans qu'il y ait dépense ou dissipation d'énergie. La viscosité augmente avec la tension et la fatigue du fil; toutes choses égales, les oscillations s'éteignent plus vite avec un fil maintenu pendant longtemps en vibration que s'il était resté en repos pendant le même temps.

La viscosité du zinc est exceptionnellement grande et on ne peut jamais, avec un fil de ce métal, compter qu'un très petit nombre d'oscillations.

Les propriétés élastiques des métaux sont ainsi très complexes [1] et varient beaucoup avec le mode de préparation

[1] W. Peddie, *Phil. Mag.* [5], t. XXXVIII, p. 36; 1894.

et le degré de pureté; les résultats obtenus par divers observateurs présentent les plus grandes divergences.

Les nombres du tableau suivant, que l'on doit ainsi considérer à titre d'indications approximatives, sont rapportés au centimètre et au poids du gramme. Pour avoir leurs valeurs en unités C.G.S., c'est-à-dire en dynes par centimètre carré, il suffit de les multiplier par g, ou 981.

Nature du métal.	1er module d'Young. E	Rigidité 2e module. φ	Ténacité. T	$\frac{E}{\varphi}$	$\frac{\varphi}{T}$	$\frac{E}{T}$	$\sqrt{\frac{E}{T}}$
Aluminium	673.10^6	$265,2.10^6$	»	2,54	»	»	»
Argent	742 »	271,8 »	$2,96.10^6$	2,73	91,8	250	15,8
Or	813 »	281,0 »	2,70 »	2,89	104,1	301	17,3
Zinc	767 »	338,4 »	1,58 »	2,27	214,0	485	22,0
Laiton	988 »	350,5 »	3,43 »	2,82	102,0	288	17,0
Bronze (1)	1038 »	314,5 »	2,56 »	3,30	122,8	405	20,1
Pl.-Arg. (2)	1050 »	369,9 »	»	2,84	»	»	»
Cuivre	1200 »	440,6 »	4,22 »	2,72	104,4	284	16,8
Maillechort	1300 »	493,7 »	»	2,63	»	»	»
Platine	1490 »	692,7 »	3,50 »	2,15	189,0	426	20,7
Fer	2000 »	773,1 »	6,40 »	2,59	136	312	17,6
Acier	2040 »	644,6 »	7,50 »	3,16	86,0	272	16,5

Le rapport des modules E et φ s'écarte peu de la valeur 3 que M. Voigt attribue aux corps parfaitement isotropes.

Toutes choses égales d'ailleurs, un fil sera d'autant plus sensible que, pour un couple de torsion déterminé, il pourra porter la plus grande charge, c'est-à-dire que le rapport des coefficients φ et T sera plus petit. L'argent semble préférable à ce point de vue et il présente d'autres qualités qui l'ont fait souvent employer dans les appareils de torsion, mais sa viscosité paraît un peu trop grande.

550. Influence de la température. — Les propriétés élastiques varient beaucoup avec la température. D'après les expériences de M. Kolhrausch (3) sur quelques métaux, le coefficient de torsion à la température t s'obtient en multi-

(1) Alliage formé de 88 Cuivre + 12 Étain.
(2) Alliage formé de 2 Argent + 1 Platine.
(3) F. Kolhrausch, *Pogg. Ann.* [3], t. CXLI, p. 481; 1870.

pliant sa valeur à zéro, par un facteur de la forme $1 - \alpha t - \beta t^2$. On aurait, par exemple :

	α	β
Fer	$4,47.10^{-4}$	$5,2.10^{-7}$
Cuivre	5,20	2,8
Laiton	4,28	13,4

Comme le coefficient de torsion, pour un même fil à différentes températures, est proportionnel à son volume, si λ est le coefficient de dilatation linéaire, le coefficient C relatif à la température t sera donné, en fonction de sa valeur C_0 à zéro, par la formule

$$C = C_0(1 - \alpha t - \beta t^2)(1 + 3\lambda t) = C_0[1 - (\alpha - 3\lambda)t].$$

Pour le cuivre, on a $3\lambda = 0,51.10^{-4}$; la variation résultant du changement d'élasticité est donc 10 fois plus grande que celle qui est due à la dilatation.

551. Fils de verre et de quartz. — Fils de cocon. — On a quelquefois remplacé les fils métalliques par des fils de *verre*, que l'on étire aisément d'une grande finesse et d'un diamètre assez régulier; leur viscosité est plus grande que celle des métaux tels que le fer, l'argent ou l'aluminium.

M. Boys [1] a ainsi étudié les fils de différents minéraux fusibles; il les prépare en attachant une flèche au corps et lançant la flèche quand l'action du chalumeau a produit une goutte de matière en fusion.

Le *quartz* est la substance qui paraît donner les meilleurs résultats. On obtient ainsi des fils parfaitement cylindriques dont le diamètre peut être inférieur à $0^{mm},002$ ou même $0^{mm},0003$, c'est-à-dire moindre qu'une longueur d'onde lumineuse. C'est avec ces fils de quartz que M. Boys a répété avec une grande habileté la célèbre expérience de Cavendish sur la densité de la terre.

Le verre conserve encore des traces sensibles de déforma-

[1] C.-V. Boys, *Phil. Mag.* [6], t. XXIII, p. 489; 1887; t. XXXVII, p. 463; 1894. — *Phil. Trans. L. R. S.* t. CLXXXVI, A., p. 1; 1895.

tion résiduelle, mais plus faible quand il a été réduit. Pour un fil tordu d'une circonférence et maintenu dans cet état pendant une minute, la position d'équilibre ultérieure a changé d'environ 0,0004 de la torsion primitive et cette altération est réduite au tiers au bout de trois minutes.

Avec un fil de quartz, le déplacement du zéro est huit fois moindre et se réduit encore d'un tiers en quatre minutes.

Pour le quartz fondu [1], le premier module d'Young rapporté au poids du gramme serait 528.10^6 et la rigidité 294.10^6. Les fils fins ont une tenacité voisine de 5.10^6, c'est-à-dire comparable à celle du fer.

Les fils de *soie*, tels qu'ils sortent du cocon, sont bien cylindriques, très réguliers et très résistants.

D'après les nombres cités par Coulomb [2], un fil simple peut porter 10 grammes sans se rompre. Un petit cylindre de cuivre de 1 pouce de longueur ($2^c,707$) pesant 6 grains ($0^{gr},3187$), suspendu à un fil de cocon de 1 pouce de long, avait une période de 180 secondes. On déduit de ces nombres que le coefficient de torsion d'un fil de soie simple de 1 centimètre de longueur est, en unités C. G. S., de 0,003254.

Un fil d'argent de même coefficient n'aurait qu'un diamètre de $0^{mm},00595$ et ne pourrait supporter un poids supérieur à $0^{gr},818$, tandis que le fil de cocon peut porter jusqu'à 10 grammes, c'est-à-dire 13 fois plus. Pour la même charge, il faudrait une section 13 fois plus grande; le coefficient de torsion serait alors 169 fois celui du fil de cocon.

L'influence de la température et de l'état hygrométrique sur les fils de soie seraient deux fois moindres environ que sur les cheveux [3].

Ces propriétés montrent l'avantage des fils de cocon dans toutes les suspensions, comme celle des aimants, où le système mobile a par lui-même une force directrice et où il y a intérêt à diminuer autant que possible celle de la suspension. En associant ces fils parallèlement entre eux et de manière que tous éprouvent sensiblement la même tension, on peut obtenir un faisceau aussi résistant qu'il est nécessaire et

(1) R. Threlfall, *Ph. Mag.* [5], t. XXX, p. 99; 1890.
(2) Coulomb, *Mém. de l'Acad. des sc.* pour 1777.
(3) Fresnel, *Ann. de chim. et de phys.* [2], t. XXVI, p. 367; 1824.

dont le couple de torsion est à peu près la somme des couples relatifs à chacun des fils.

Ajoutons que l'on doit d'abord laver ces fils à l'eau chaude pour enlever la matière agglutinante de la surface.

Les fils de *cocon d'araignée*, si employés pour la construction des micromètres, pourraient aussi servir dans les appareils de suspension, mais ils ont l'inconvénient d'être trop élastiques, car on peut aisément tripler leur longueur sans risquer de les rompre.

D'une manière générale, quand on cherche à diminuer le couple de torsion, un faisceau de fils parallèles vaut toujours mieux qu'un seul fil ayant la même section totale. Si l'on pouvait négliger l'effet provenant de la distance des points d'attache, le couple résultant serait, avec un fil unique, proportionnel au carré de la section, c'est-à-dire au carré n^2 du nombre des fils équivalents, et par suite n fois plus grand que le couple constitué par ces n fils.

552. Balance bifilaire. — On peut au contraire, profiter de la distance même des fils pour produire le couple de torsion. Tel est le principe de la *balance bifilaire*, employée d'abord par Snow Harris [1] mais en réalité introduite dans la pratique par les travaux de Gauss et de Weber [2].

Dans la balance bifilaire, le système mobile est suspendu à deux fils voisins dont les points d'attache en haut et en bas sont habituellement à la même hauteur. Lorsque l'appareil est dévié de sa position d'équilibre, le poids du système donne naissance à un couple horizontal qui tend à le ramener à sa direction primitive.

Nous supposerons d'abord que les deux fils de suspension sont égaux entre eux, les deux points d'attache supérieurs B et B′ (fig. 139) à la même hauteur, et que le centre de gravité du corps suspendu est sur la verticale qui passe par le milieu O de la distance des deux points d'attache A et A′ des extrémités inférieures des fils. Si les fils n'ont pas de torsion propre, l'équilibre existe quand les quatre points d'attache sont dans le même plan vertical, les lignes AA′ et BB′ étant parallèles, et que, par suite, les deux fils sont symétriques

(1) Snow Harris, *Phil. Trans.*, 1836. p. 417.
(2) Gauss et Weber, *Resultate aus den Beob. des Magn. Vereins*, 1837.

par rapport à la verticale passant par le centre de gravité du système.

Lorsqu'on fait tourner le levier AA′ d'un angle x autour de la droite OO′, son milieu O s'élève en O_1 et les fils prennent les positions BA_1 et $B'A'_1$. Appelant h la distance $O'O_1 = BD$,

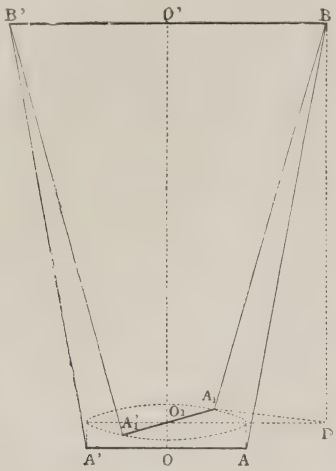


Fig. 139.

l la longueur AB des fils, $2a$ et $2b$ les distances AA′ et BB′ des points d'attache, on a

$$h^2 = l^2 - \overline{A_1D}^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos x,$$

$$= l^2 - (b-a)^2 - 4ab\sin^2\frac{x}{2},$$

$$h\,dh = -ab\sin x\,dx.$$

Si Q est le moment par rapport à l'axe du couple nécessaire pour maintenir cette déviation x, le travail $Q\,dx$ du couple relatif à une rotation infiniment petite est égal et contraire au travail correspondant de la pesanteur sur le poids P du système, ce qui donne

$$Q\,dx = -P\,dh = P\frac{ab\sin x}{h}\,dx,$$

$$(7) \qquad Q = P\frac{ab\sin x}{h}.$$

Lorsque les deux fils sont à peu près parallèles dans la position d'équilibre, on fera $a = b$ et il reste

$$(8) \qquad Q = P\frac{a^2}{l}\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2}\sin^2\frac{x}{2}}}.$$

Dans la plupart de ces cas, les distances a et b sont très petites par rapport à la longueur l des fils, et l'on peut écrire

$$(9) \qquad Q = \frac{Pab}{l}\sin x = C'\sin x.$$

Le facteur C' peut être appelé *coefficient de torsion* du bifilaire ; c'est le couple qui produirait une déviation de 90°. Ce couple est proportionnel à la charge, au produit des distances des points d'attache et en raison inverse de la longueur des fils.

La torsion ne peut pas dépasser 90°, parce que le couple irait ensuite en diminuant. Snow Harris évitait cette restriction en employant un long bifilaire dont il réunissait les fils à différentes hauteurs par plusieurs traverses, de longueurs égales à la distance des points de suspension ; l'appareil constituait ainsi une série de bifilaires ajoutés bout à bout. Pour n bifilaires identiques et une déviation totale x, le couple de torsion serait

$$n\frac{Pab}{l}\sin\frac{x}{n} = nC'\sin\frac{x}{n}.$$

On peut encore tenir compte de la rigidité des fils, laquelle n'est pas toujours négligeable. Lorsque le système éprouve une déviation x, chacun des fils est tordu sensiblement du même angle. Si donc ils étaient sans torsion dans la position initiale, il suffit d'ajouter au couple $C'\sin x$ les deux couples de torsion Cx qui agissent dans le même sens ; l'équation d'équilibre devient alors

$$Q = C'\sin x + 2Cx = C'\sin x\left[1 + 2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right].$$

Comme l'angle x est inférieur à 90°, si le rapport des facteurs C et C′ est très petit, on peut considérer les termes compris dans la parenthèse comme constants. Le système obéit encore sensiblement à la loi du sinus et le coefficient de torsion C_1 devient

$$C_1 = C'\left(1 + 2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right) = C' + 2C.$$

Les conditions de symétrie ne peuvent jamais être remplies d'une manière absolue et il est nécessaire d'examiner les conséquences d'un défaut d'ajustement. Quel que soit le mode d'attache, la position d'équilibre correspond au cas où

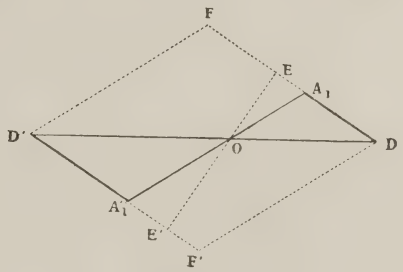


Fig. 140.

les fils sont dans un même plan vertical contenant le centre de gravité du système. Pour une déviation x produite par un couple extérieur, les composantes verticales des tensions des fils font équilibre au poids, les composantes horizontales constituent un couple qui, avec les couples de torsion, fait équilibre au couple extérieur ; ces composantes sont donc égales, parallèles et de sens contraires.

Il résulte de là que si on projette le système sur un plan horizontal (fig. 140), les projections des deux fils A_1D et A'_1D' sont toujours parallèles; les projections DD' et $A_1A'_1$ des lignes qui joignent les points d'attache se coupent en O, sur la verticale qui passe par le centre de gravité du système, et sont partagées par ce point en parties inversement proportionnelles aux composantes verticales des tensions.

Soient p et p' ces composantes verticales, q la valeur commune des composantes horizontales, h et h' les projections

verticales des deux fils, λ et λ' leurs projections horizontales, enfin $2a$ et $2b$ les projections des distances des points d'attache; on a les relations

$$P = p + p', \qquad q = p\frac{\lambda}{h} = p'\frac{\lambda'}{h'}.$$

D'autre part, en appelant k la perpendiculaire commune EE' aux projections des deux fils, on a aussi

$$4ab\sin x = (\lambda + \lambda')k = qk\left(\frac{h}{p} + \frac{h'}{p'}\right),$$

car les deux premières expressions représentent la surface du parallélogramme DFD'F'.

Le moment Q du couple des forces q a pour valeur

$$(10) \qquad Q = qk = \frac{4ab}{\frac{h}{p} + \frac{h'}{p'}}\sin x;$$

cette formule se réduit à l'expression (7) pour $h = h'$ et $p' = p$, c'est-à-dire quand les conditions de symétrie sont remplies.

En appelant z la distance verticale des milieux des deux lignes qui joignent les points d'attache, on peut écrire

$$h = z(1 - \varepsilon), \qquad h' = z(1 + \varepsilon).$$

Posons de même, en remarquant que la plus grande valeur de p correspond à la plus petite valeur de h,

$$p = \frac{P}{2}(1 + \delta), \qquad p' = \frac{P}{2}(1 - \delta);$$

il en résulte

$$\frac{h}{p} + \frac{h'}{p'} = \frac{2z}{P}\left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \delta} + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \delta}\right) = \frac{4z}{P}\,\frac{1 + \varepsilon\delta}{1 - \delta^2},$$

$$(11) \qquad Q = P\frac{ab}{z}\,\frac{1 - \delta^2}{1 + \varepsilon\delta}\sin x.$$

Comme δ est un nombre positif, le maximum de Q correspond à $\delta = 0$. Les conditions de symétrie sont donc celles pour lesquelles l'appareil a le minimum de sensibilité, c'est-à-dire celles qui donnent les oscillations les plus rapides. On utilise cette propriété pour achever le réglage.

En général, les points d'attache supérieurs sont à la même hauteur et, d'autre part, le levier AA' est par construction

perpendiculaire à la droite qui joint son milieu au centre de gravité du système mobile ; il ne reste plus alors qu'à donner aux fils la même longueur. La difficulté n'existe pas si on ne conserve que deux points d'attache, en haut ou en bas, avec un fil unique qui passe de l'autre côté sur une poulie.

Si le fil est fixé à ses points d'attache de manière que le premier élément, à chaque bout, soit maintenu vertical, il ne reste plus rigoureusement rectiligne [1]. Sous l'action d'un couple horizontal, le système subit alors un déplacement moindre que si le fil était parfaitement flexible. Pour une suspension symétrique, l'extrémité inférieure d'un fil flexible se déplacerait, l'autre extrémité étant supposée fixe, d'une quantité $u = \frac{q}{p} l$. Quand les deux éléments extrêmes sont maintenus verticaux, on trouve que le déplacement a sensiblement pour valeur

$$u_1 = \frac{q}{p}\left(l - 2\sqrt{\frac{EK}{p}}\right) = u\left[1 - \frac{2}{l}\sqrt{\frac{EK}{p}}\right],$$

expression dans laquelle E désigne le premier module d'élasticité et K le moment d'inertie de la section du fil par rapport à un axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire au plan de flexion.

Dans le cas d'un fil à section circulaire de rayon r, on a $4K = \pi r^4$ et, par suite,

$$2\sqrt{\frac{EK}{p}} = r^2\sqrt{\frac{E\pi}{p}};$$

la correction revient donc à diminuer la longueur du fil d'une quantité indépendante de cette longueur.

Si on désigne par $T' = \alpha T$ la ténacité pratique du métal, c'est-à-dire le poids qu'on peut faire supporter sans inconvénient à un fil d'un centimètre carré de section, on peut poser

$$p = \pi r^2 T' = \pi r^2 \alpha T.$$

Le terme de correction devient alors $r\sqrt{\frac{E}{\alpha T}}$. Dans le cas où la charge est moitié de celle qui produirait la rupture, $\alpha = 0,5$

[1] F. Kohlrausch, *Wied., Ann.* t. XVII, p. 741; 1882.

et le Tableau du n° **549** montre que la valeur du radical est au plus égale à 30; la correction de longueur est voisine de 15 fois le diamètre du fil.

D'ailleurs le couple de torsion du bifilaire sera déterminé le plus souvent par les oscillations, et la valeur expérimentale renfermera en bloc toutes les corrections. Les formules qui précèdent ne seraient utiles que si l'on voulait calculer le coefficient du bifilaire au moyen de ses dimensions.

La suspension bifilaire a sur l'unifilaire l'avantage d'être beaucoup moins sensible aux variations de la température, car le seul effet est la dilatation qui modifie les distances des points d'attache et la longueur des fils. Le coefficient de torsion étant proportionnel au produit des deux premières longueurs et en raison inverse de la dernière, il serait possible, par un choix convenable de la nature des corps, d'établir une compensation complète; mais cette précaution est superflue. Si les fils et les traverses sont en un même métal, la variation est proportionnelle au coefficient de dilatation: elle n'est pas le trentième de celle qui résulterait, pour l'unifilaire, du changement d'élasticité correspondant à la même variation de température.

553. Comparaison de l'unifilaire et du bifilaire. — Supposons qu'on veuille suspendre un système de poids P, en lui donnant une force directrice déterminée.

Si l'on fait usage d'un bifilaire à fils parallèles de diamètre d et distants de $2a$, on aura

$$C' = \frac{Pa^2}{l} + 2\mu\frac{d^4}{l}.$$

Le diamètre du fil étant déterminé, comme plus haut, par la condition que la tension soit αT, il en résulte

$$C' = \frac{d^4}{l}\left(\frac{\pi a^2}{2d^2}\alpha T + 2\mu\right).$$

Pour la même charge, l'unifilaire doit avoir une section double, c'est-à-dire un diamètre égal à $d\sqrt{2}$, et le coefficient de torsion est $C = 4\mu\frac{d^4}{l}$; par suite

$$\frac{C'}{C} = \frac{\pi a^2}{8d^2}\frac{\alpha T}{\mu} + \frac{1}{2}.$$

Ce rapport serait égal à l'unité pour la condition

$$\frac{a^2}{d^2} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mu}{\alpha T} = \frac{\varphi}{8\alpha T}, \qquad \frac{2a}{d} = \sqrt{\frac{\varphi}{2\alpha T}}.$$

Si l'on fait encore $2\alpha = 1$, le Tableau montre que, pour la plupart des métaux usuels, la valeur du radical est voisine de 10 ; il en résulte que, dans les conditions comparables, l'unifilaire et le bifilaire ont la même sensibilité quand la distance des fils du dernier est 10 fois leur diamètre. On arriverait à un résultat très différent avec des fils non métalliques, par exemple des fils de cocon.

Malgré les avantages du bifilaire, au point de vue des variations de température, ce mode de suspension semble avoir été toujours considéré comme se prêtant moins bien aux mesures absolues que la balance unifilaire, sans doute à cause de sa construction plus compliquée.

Cependant c'est le seul appareil dont le couple de torsion puisse être déterminé directement par ses dimensions. Il est vrai qu'on doit alors connaître avec une grande précision les distances des points d'attache. Comme l'épaisseur du fil lui-même introduit dans la mesure de ces distances une cause d'incertitude, il faut qu'elles soient un peu grandes, ce qui diminue beaucoup la sensibilité. M. F. Kolhrausch a construit ainsi une suspension bifilaire de dimensions exceptionnelles, avec des fils de 2 mètres et demi de longueur, et dans laquelle la distance des points d'attache, qui atteignait plusieurs centimètres, pouvait être mesurée directement à l'aide d'une division micrométrique.

CHAPITRE DEUXIÈME

PROPRIÉTÉS DES COURANTS CIRCULAIRES

554. Bobines cylindriques. — Nous considérerons principalement les bobines circulaires cylindriques, formées par un fil métallique couvert d'une matière isolante et enroulé dans une *gorge* de section rectangulaire. Ces bobines sont les plus faciles à construire, celles qui se prêtent le mieux aux mesures et au calcul et, par suite, celles dont il convient de faire usage dans les appareils de mesures absolues.

Une bobine cylindrique simple (**355**), formée par une couche de spires équidistantes, avec un fil de retour, équivaut à un système de courants circulaires équidistants normaux à l'axe. Le champ d'une pareille bobine traversée par un courant est égal, en chaque point, à l'induction magnétique d'un cylindre de mêmes dimensions aimanté uniformément. Si la bobine comprend plusieurs couches successives, dont les rayons varient en progression arithmétique, le champ produit, au moins en dehors des couches mêmes, s'évaluera également par l'induction d'un cylindre aimanté équivalent. Cette assimilation suppose l'enroulement bien régulier.

L'enroulement d'un fil est *homogène* quand les spires de chaque couche sont équidistantes ainsi que les couches successives, et l'enroulement est *uniforme* quand la distance des couches successives est égale à celle des spires.

On admettra, pour le calcul, que le courant est concentré dans chaque fil sur l'axe même du conducteur. Les résultats obtenus dans cette hypothèse sont exacts quand il s'agit de courants rectilignes (**317**) ; ils sont toujours très approchés tant que le diamètre des fils est très petit par rapport au

rayon de courbure du circuit, et qu'on ne considère pas l'action en un point trop voisin du fil.

Les propriétés d'une bobine doivent se déduire des différentes données qui en définissent les dimensions et le mode de construction. Supposant l'enroulement homogène et la gorge de section rectangulaire, nous appellerons :

y le rayon du fil nu, z l'épaisseur de l'isolant ;

L la longueur du fil comptée suivant son axe ;

d et ρ la masse spécifique et la résistivité du métal, σ la section droite du fil ;

a' et a'' les rayons intérieur et extérieur de la bobine ;

$2c$ l'épaisseur de la gorge suivant le rayon : $2c = a'' - a'$;

$2b$ la longueur de la gorge suivant l'axe ;

ω la section méridienne de la gorge : $\omega = 2b(a'' - a') = 4bc$;

a la distance de l'axe au milieu de la section : $2a = a' + a''$;

U le volume de la gorge : $U = 2\pi(a''^2 - a'^2)b = 2\pi a\omega$;

V le volume du métal et V′ le volume des fils couverts ;

$P = Vd$ la masse du métal ;

n_1 et n_2 le nombre des spires par unité de longueur suivant l'axe de la bobine et suivant le rayon, ou h_1 et h_2 leurs distances correspondantes : $n_1 h_1 = n_2 h_2 = 1$;

N le nombre total des spires : $N = n_1 n_2 \omega = 4 n_1 n_2 bc$.

Ces données permettront de déterminer les autres éléments, ainsi que les propriétés électriques de la bobine.

Laissant de côté, pour le moment, les effets d'induction, nous aurons à calculer :

1° La résistance totale R du fil ;

2° La surface totale S, c'est-à-dire la somme des surfaces limitées par les différentes spires, ou le moment magnétique de la bobine pour l'unité de courant ;

3° Le champ électromagnétique G de la bobine en chaque point, pour l'unité de courant.

555. Longueur du fil. — Rayon moyen. — Si le pas h_1 des spires est très petit par rapport au diamètre de la bobine, la longueur d'une spire, dont la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe est une circonférence de rayon r, peut s'écrire

$$\sqrt{4\pi^2 r^2 + h_1^2} = 2\pi r \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 n_1^2 r^2}} = 2\pi r \left(1 + \frac{1}{8\pi^2 n_1^2 r^2}\right) \quad (1)$$

Dans la plupart des cas, le terme de correction est négligeable et on peut confondre la spire avec sa circonférence de projection.

La *circonférence moyenne* des spires d'une bobine est la moyenne des circonférences de toutes les spires ; le *rayon moyen* est donc la moyenne de tous les rayons, c'est-à-dire la distance a du milieu de la gorge à l'axe de la bobine, et la longueur totale du fil est

$$(1) \qquad L = 2\pi a N = 2\pi a n_1 n_2 \omega = n_1 n_2 U = 8\pi n_1 n_2 a b c.$$

Si l'on tient compte de l'obliquité des spires, cette expression doit être multipliée par $1 + \frac{1}{8\pi^2 n_1^2 a^2}$.

556. Volume et masse du fil. — Lorsque l'enroulement est uniforme, $n_1 = n_2$, on peut considérer chaque fil comme occupant, dans la section méridienne de la gorge, le milieu d'un carré dont le côté est h_1.

Le fil nu occupe une fraction $n_1^2 \pi y^2$ de la surface du carré et la section totale du fil couvert une fraction $n_1^2 \pi (y+z)^2$ de la surface de la gorge. Chacune de ces fractions est maximum quand les fils se touchent : le côté du carré est alors égal au diamètre du fil et la dernière fraction a pour valeur $\frac{\pi}{4}$.

Le rapport du volume total du fil à celui de la gorge étant égal à celui des sections, on a, pour des fils en contact,

$$(2) \qquad \frac{V'}{U} = \frac{V}{U}\left(\frac{y+z}{y}\right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

$$(3) \qquad P = Vd = \frac{\pi}{4} U d \left(\frac{y}{y+z}\right)^2.$$

Lorsque l'épaisseur z de l'isolant est dans un rapport constant δ avec le rayon y du fil, le poids du métal est simplement proportionnel au volume de la gorge.

Lorsque les fils sont en contact et l'enroulement uniforme, on a $h_1 = 2(y+z)$ et, par suite,

$$(4) \qquad U = h_1^2 L = \frac{L}{n_1^2} = 4(y+z)^2 L.$$

La longueur totale L est égale au quotient du volume de la gorge par le diamètre du fil couvert.

557. Résistance. — D'une manière générale, la résistance de la bobine a pour expression

$$R = \rho \frac{L}{\pi y^2} = \rho \frac{L}{\sigma}.$$

Pour des fils en contact, avec enroulement uniforme,

$$(5) \qquad R = \rho \frac{L}{\pi y^2} = \rho \frac{n_1^2 U}{\pi y^2} = \rho \frac{U}{4\pi (y+z)^2 y^2} = \rho \frac{V}{\sigma^2}.$$

Si le rapport δ est constant, la résistance est proportionnelle au volume du fil, ou de la gorge, et en raison inverse du carré de la section. La première conclusion est évidente. On peut arriver directement à la seconde en remarquant que, si l'on réduit de moitié le diamètre du fil, la section devient quatre fois moindre et, pour remplir le même volume de gorge, la longueur doit être quadruplée; la résistance est donc multipliée par 16.

558. Surface. — Moment magnétique. — La surface électromagnétique d'une bobine est la somme des projections, sur un plan perpendiculaire à l'axe, des surfaces entourées par toutes les spires; c'est le moment magnétique de la bobine pour l'unité de courant.

La surface d'une spire de rayon r est πr^2. S'il existe p couches, r_0 étant le rayon de la première, et qu'on représente par $r = r_0 + \alpha$ celui d'une couche quelconque, on a

$$\Sigma r^2 = p r_0^2 + 2 r_0 \Sigma \alpha + \Sigma \alpha^2.$$

Le rayon a_1 du *cercle moyen*, dont la surface est la moyenne de celles de toutes les spires, est défini par l'équation

$$(6) \qquad a_1^2 = r_0^2 + 2 r_0 \frac{\Sigma \alpha}{p} + \frac{\Sigma \alpha^2}{p}.$$

D'autre part, le rayon moyen a donne

$$a = r_0 + \frac{\Sigma \alpha}{p}, \qquad a^2 = r_0^2 + 2 r_0 \frac{\Sigma \alpha}{p} + \left(\frac{\Sigma \alpha}{p}\right)^2.$$

La surface totale S de la bobine est égale à $N\pi a_1^2$ et on peut écrire

$$a_1^2 = a^2 + \frac{\Sigma\alpha^2}{p} - \left(\frac{\Sigma\alpha}{p}\right)^2.$$

Si l'enroulement est homogène, les rayons successifs varient comme les termes d'une progression arithmétique dont la raison est h_2 et l'on devra donner à la quantité α la suite des valeurs o, h_2, $2h_2$, ... $(p-1)h_2$. On a alors

$$\Sigma\alpha = h_2\frac{(p-1)p}{2}, \quad \Sigma\alpha^2 = h_2^2\frac{(p-1)p(2p-1)}{2.3};$$

$$\left(\frac{\Sigma\alpha}{p}\right)^2 = \frac{p^2h_2^2}{4}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2, \quad \frac{\Sigma\alpha^2}{p} = \frac{p^2h_2^2}{3}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{2p}\right).$$

Il en résulte, en tenant compte de la relation $2c = ph_2 = \frac{p}{n_2}$,

$$\frac{\Sigma\alpha^2}{p} - \left(\frac{\Sigma\alpha}{p}\right)^2 = \frac{c^2}{3}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{c^2}{3}\left(1-\frac{1}{4n_2^2c^2}\right),$$

$$(7) \qquad a_1^2 = a^2 + \frac{c^2}{3}\left[1-\frac{1}{4n_2^2c^2}\right].$$

Si les spires sont assez serrées pour que le dernier terme de correction soit négligeable, le rayon a_1 ne dépend que des dimensions de la gorge.

Dans ce cas, pour une gorge donnée, la surface de la bobine est proportionnelle au nombre des spires et, par suite, en raison inverse de la section du fil.

Pour un fil donné et des volumes semblables de la gorge, la surface est, d'une part, proportionnelle au nombre des spires, c'est-à-dire à la section de la gorge et, d'autre part, à la surface du cercle moyen ; elle varie donc comme la quatrième puissance du rapport des dimensions homologues.

559. Champ électromagnétique. — Imaginons d'abord que la gorge soit remplie par une masse métallique homogène et le courant réparti uniformément dans la section méridienne ; la *densité du courant* sera l'intensité par unité de surface.

Supposons maintenant que, par une série de lignes, les unes suivant des rayons, les autres perpendiculaires, on partage la section méridienne en carrés égaux de côté h_1; le nombre de ces carrés par unité de surface sera n_1^2. On divisera ensuite la masse métallique en une série d'anneaux de même axe isolés les uns des autres et correspondant aux carrés de la section méridienne ; cette opération ne change rien à la distribution du courant, ni à son action extérieure.

Si chacun des anneaux est parcouru par l'unité de courant, la densité du courant est n_1^2 et le champ G en chaque point est proportionnel à n_1^2, c'est-à-dire qu'il varie en raison inverse de la surface des carrés élémentaires.

En remplaçant chaque anneau par un fil qui occupe la partie centrale du carré correspondant, on constituera une bobine à enroulement uniforme. Si chaque fil est parcouru par la quantité d'électricité qui traversait précédemment le carré, la densité du courant n'est plus uniforme, mais sa valeur moyenne reste la même, quel que soit d'ailleurs le diamètre du fil.

D'un autre côté, si le courant est réparti uniformément dans la section du fil, son action extérieure est sensiblement la même, que l'on suppose le fil réduit à son axe ou qu'il ait pour diamètre le côté du carré.

De même, la différence des actions exercées par la bobine, quand on y remplace le fil cylindrique par un conducteur à section carrée, est négligeable pour tout point situé à une grande distance relativement au diamètre du fil.

Il en résulte que, pour une gorge donnée et, par suite, pour un poids donné de métal, si le rapport δ est constant, l'intensité du champ en chaque point varie en raison inverse du carré du diamètre du fil, ou encore (**558**) proportionnellement à la racine carrée de la résistance.

Cette conséquence conduit à une remarque curieuse. Si R est la résistance de la bobine et I l'intensité du courant, l'énergie calorifique W dégagée dans chaque unité de temps est égale à RI^2. Comme la résistance R est proportionnelle à n_1^4, ou au carré G^2, l'énergie calorifique W est proportionnelle au produit G^2I^2, c'est-à-dire au carré du champ de la bobine pour le courant I. Il en résulte que si, faisant varier

le diamètre du fil, on modifie l'intensité de manière que le champ reste le même, le travail calorifique de la bobine restera aussi constant [1].

560. Action sur l'axe. — Le potentiel d'un courant est le même que celui d'un feuillet magnétique uniforme de même contour dont la puissance est égale à l'intensité du courant. Le champ magnétique d'un courant circulaire, de rayon r et d'intensité égale à l'unité, en un point P de l'axe situé à une distance x du centre, est (**353**), en posant $u^2 = x^2 + r^2$,

$$\frac{2S}{u^3} = \frac{2\pi r^2}{u^3}.$$

L'action du courant par unité de longueur, ou son *action spécifique*, est donc

$$(8) \qquad f = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi r^2}{u^3} = \frac{r}{u^3}.$$

Pour une bobine de longueur $2b$ et de rayon r, recouverte par une couche de n_1 spires par unité de longueur et traversée par l'unité du courant, l'expression du champ magnétique est (**355**), en appelant α et β les angles sous lesquels on voit du point P les rayons extrêmes de la bobine,

$$(9) \quad G = 2\pi n_1(\cos\beta - \cos\alpha) = 2\pi n_1\left[\frac{x+b}{\sqrt{r^2+(x+b)^2}} - \frac{x-b}{\sqrt{r^2+(x-b)^2}}\right].$$

On peut, dans cette formule, donner à x des valeurs absolues, plus grandes ou plus petites que b, suivant que le point P est à l'extérieur ou à l'intérieur de la bobine.

Dans le cas d'un enroulement homogène, la couche d'épaisseur dr contient un nombre $n_1 n_2 dr$ de spires par unité de longueur ; l'action de la bobine est alors

$$G = 2\pi n_1 n_2 \int_{a'}^{a''} \left(\frac{x+b}{\sqrt{r^2+(x+b)^2}} - \frac{x-b}{\sqrt{r^2+(x-b)^2}}\right) dr,$$

$$(10) \quad \frac{G}{2\pi n_1 n_2} = (x+b)\mathcal{L}.\frac{a''+\sqrt{a''^2+(x+b)^2}}{a'+\sqrt{a'^2+(x+b)^2}} - (x-b)\mathcal{L}.\frac{a''+\sqrt{a''^2+(x-b)^2}}{a'+\sqrt{a'^2+(x-b)^2}}.$$

[1] Marcel Deprez, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. XCIV, p. 431 ; 1882.

On a ainsi, au centre de la bobine, où $x = 0$,

$$(11)\quad G_0 = 4\pi n_1 n_2 b \mathcal{L}.\frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b^2}} = \pi \frac{N}{c} \mathcal{L}.\frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b^2}} = 2\pi \frac{N}{a_2}.$$

La quantité a_2, définie par la condition

$$(12)\qquad \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2c} \mathcal{L}.\frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b^2}},$$

représente le *rayon de la spire d'action moyenne* relativement au centre.

Les rayons extrêmes a'' et a' étant égaux à $a \pm c$, si on peut négliger les quatrièmes puissances des rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, il reste simplement

$$(12)'\qquad a_2 = a\left[1 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{3}\right)\right].$$

561. Influence de la gorge [1]. — La longueur du fil étant donnée, ainsi que le rayon a' du noyau, on peut chercher les dimensions de la gorge qui donne le champ maximum au centre de la bobine, pour un enroulement uniforme, c'est-à-dire choisir les quantités a'' et b qui rendent G_0 maximum.

Au lieu de résoudre ce problème par les méthodes ordinaires des maxima, on y arrivera plus simplement par les considérations suivantes.

Il est évident que, si le maximum est obtenu, l'action spécifique moyenne de la couche extérieure est la même que celle de la tranche latérale, sans quoi il y aurait avantage à transporter les spires d'une région sur l'autre.

Or l'action au centre de la couche extérieure, dont le rayon est a'', a pour valeur, d'après l'équation (9), $4\pi n_1 \frac{b}{\sqrt{a''^2 + b^2}}$. Comme la longueur du fil est $2\pi a'' \times 2 n_1 b = 4\pi a'' n_1 b$, l'action spécifique est $\frac{1}{a''\sqrt{a''^2 + b^2}}$.

[1] W. Weber, *Galvanométrie. Abh. der K. G. der Wiss. zu Gött.*, t. X; 1861-1862.

Une couronne de la couche latérale, comprise entre les rayons r et $r+dr$, renferme un nombre $n_1 dr$ de spires ; l'action de cette couche sur le centre est

$$2\pi n_1 \int \frac{r^2 dr}{u^3} = 2\pi n_1 \int \frac{r^2 dr}{(b^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi n_1 \left[\mathcal{L}.(r+\sqrt{b^2+r^2}) - \frac{r}{\sqrt{b^2+r^2}} \right]_{a'}^{a''}.$$

La longueur du fil est $\int 2\pi r . n_1 dr = \pi n_1 (a''^2 - a'^2)$, de sorte que l'action spécifique a pour expression

$$\frac{2}{a''^2 - a'^2} \left[\mathcal{L}.\frac{a''+\sqrt{a''^2+b^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b^2}} - \frac{a''}{\sqrt{a''^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a'^2+b^2}} \right].$$

En égalant les deux actions spécifiques, on trouve ainsi, pour la condition du maximum,

$$(13) \qquad \mathcal{L}.\frac{a''+\sqrt{a''^2+b^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b^2}} = \frac{3a''^2 - a'^2}{2a''\sqrt{a''^2+b^2}} - \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b^2}}.$$

Si l'on y joint l'équation (4), qui donne la valeur de L, on pourra déterminer les dimensions a'' et b de la bobine.

562. Bobine d'action maximum. — Sans changer les dimensions de la gorge, on peut chercher encore quels doivent être la longueur et le diamètre du fil, pour qu'avec une source donnée, le champ magnétique soit maximum au centre de la bobine. Il est nécessaire de faire intervenir ici les éléments de la source, qui est définie par sa force électromotrice E et par sa résistance propre R', en y comprenant la résistance du circuit extérieur.

Le champ du courant au centre de la bobine est

$$F_0 = G_0 I = G_0 \frac{E}{R+R'}.$$

La condition du maximum de cette expression s'obtient facilement dans le cas d'un enroulement uniforme, quand on suppose le fil nu ou l'épaisseur de l'isolant proportionnelle au rayon du fil et que toutes les spires sont en contact. En

effet, si on remplace le fil primitif de la bobine par un autre fil de diamètre m fois plus petit, de manière à remplir toujours la gorge, les nouvelles valeurs de R et de G_0 deviennent $m^4 R$ et $m^2 G_0$ et celle du champ magnétique au centre

$$F_0 = \frac{E m^2 G_0}{m^4 R + R'} = \frac{E G_0}{m^2 R + \frac{R'}{m^2}}.$$

Le facteur m étant ici la seule variable, la condition du maximum est $R' = m^4 R$.

Il faut donc que *la résistance de la bobine soit égale à la résistance du circuit extérieur.*

Il en serait de même pour la décharge produite par une variation φ du flux d'induction dans le circuit, car la quantité q d'électricité est $(R + R')q = \varphi$ et l'impulsion sur une aiguille placée au centre est proportionnelle à $G_0 q$.

La condition de l'égalité des résistances est indépendante de la forme de la bobine. Elle serait encore vraie si le diamètre du fil, au lieu d'être uniforme, variait d'une spire à l'autre, pourvu que le rapport des diamètres dans les deux bobines que l'on compare fût le même en tous les points.

Dans le cas général, on remplacera la résistance R par sa valeur $\rho \frac{L}{\pi y^2}$. Si le volume U de la gorge reste constant, la valeur de G_0 est proportionnelle à la longueur du fil et on peut la remplacer par gL, ce qui donne

$$F_0 = E \frac{gL}{\frac{\rho}{\pi}\frac{L}{y^2} + R'} = E \frac{g}{\frac{\rho}{\pi y^2} + \frac{R'}{L}}.$$

Le dénominateur de la dernière expression est minimum pour la condition

$$2\frac{\rho}{\pi}\frac{dy}{y^3} + \frac{R' dL}{L} = 0, \quad \text{ou} \quad 2R\frac{dy}{y} + R'\frac{dL}{L} = 0.$$

Comme le produit $L(y+z)^2$ est constant (**556**), on a aussi

$$2\frac{dy + dz}{y + z} + \frac{dL}{L} = 0.$$

Si l'épaisseur z est proportionnelle à y, on retrouve la condition $R = R'$. Si cette épaisseur est constante, il reste

$$\frac{R}{R'} = \frac{y}{y+z},$$

c'est-à-dire que *la résistance de la bobine doit être à la résistance extérieure comme le diamètre du fil nu est au diamètre du fil couvert* [1]. Ce résultat est encore indépendant de la forme de la gorge.

La résistance totale du fil étant déterminée par l'une des conditions précédentes, on pourra calculer le diamètre et la longueur du fil dont il faut couvrir la bobine.

Dans le premier cas, on a

$$\rho \frac{L}{\pi y^2} = R', \quad U = 4(y+z)^2 L = 4y^2(1+\delta)^2 L;$$

$$y^4 = \frac{U\rho}{4\pi R'(1+\delta)^2}, \quad L = \frac{\pi R'}{\rho} y^2.$$

Dans le second cas,

$$\rho \frac{L}{\pi y^2} = \frac{y}{y+z} R', \quad U = 4(y+z)^2 L;$$

$$y^4 \left(1 + \frac{z}{y}\right) = \frac{U\rho}{4\pi R'}, \quad L = \frac{4\pi^2 R'^2}{U\rho^2} y^6.$$

Si l'on désigne par y_0^4 le second membre de l'avant-dernière équation, la valeur approchée y_0 est le rayon qu'il faudrait prendre pour le fil, si l'épaisseur z de l'isolant était nulle. On résoudra cette équation par approximations successives, en commençant par donner une valeur arbitraire à y dans la parenthèse du premier membre, y_0 par exemple.

563. Forme la plus avantageuse de la gorge. — Nous avons supposé jusqu'ici la section de la gorge rectangulaire, mais on voit aisément que cette forme n'est pas la plus avantageuse. L'action d'une spire étant, toutes choses égales, en raison inverse de son rayon, il y a intérêt manifeste à multi-

[1] Schwendler, *Phil. Mag.* (4), t. XXXIII, p. 29; 1867.

plier celles qui correspondent aux plus petits rayons, dont l'effet est prédominant. On n'est pas maître de diminuer sans limite le rayon des premières spires : d'abord il faut un noyau pour porter les fils et, dans les bobines destinées aux galvanomètres, on doit en outre ménager autour de l'axe la place nécessaire au mouvement de l'aimant.

Quant au contour de la gorge, un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut (**561**) montre que la meilleure forme correspond au cas où toutes les spires situées sur la surface ont la même action spécifique sur l'aimant, sans quoi

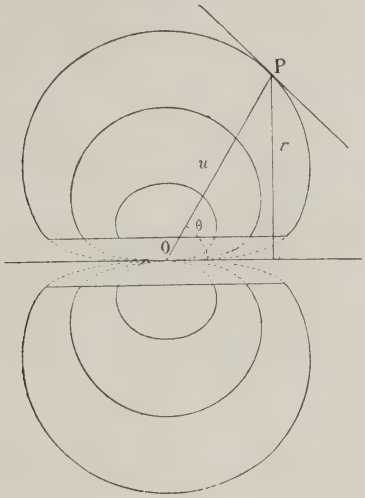


Fig. 141.

il y aurait avantage à déplacer quelques-uns des fils pour les reporter sur un autre point.

Soit P (fig. 141) un point du contour de la section méridienne, r le rayon de la spire correspondante, u le rayon vecteur OP et θ son angle avec l'axe. L'action spécifique (8) de la spire au point O devant être la même, quelle que soit la position du point P sur la courbe, celle-ci sera définie, en appelant c une constante, par l'équation

$$(14) \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{r}{u^3} = \frac{\sin\theta}{u^2}, \qquad u^2 = c^2 \sin\theta.$$

La courbe représentée par cette équation a la forme d'un

cercle écrasé suivant le diamètre vertical. Sa tangente est verticale au point d'intersection avec la droite dont le coefficient angulaire est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La figure indique la forme des courbes successives pour des valeurs de c croissant en progression arithmétique ; les parties pointillées correspondent au vide central ménagé pour l'aimant.

Le paramètre c sera, en général, déterminé par la résistance et les dimensions que l'on veut donner à la bobine.

Le volume engendré par la surface méridienne limitée à la courbe de paramètre c a pour expression

$$\int 2\pi u \sin\theta . u\,du\,d\theta = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^u u^2\,du = \frac{2}{3}\pi c^3 \int_0^\pi \sin^{\frac{5}{2}}\theta\,d\theta .$$

Ce volume est proportionnel au cube du paramètre et peut être représenté par Ac^3.

D'autre part, la cavité réservée à l'intérieur de la bobine, y compris le noyau, est habituellement cylindrique. En la désignant par Aa^3, le volume réel de la bobine est donc $A(c^3 - a^3)$. Pour un enroulement uniforme et des fils en contact, on aura donc

$$(15) \qquad U = A(c^3 - a^3) = 4(y+z)^2 L = \frac{L}{n_1^2} = \frac{\pi y^2}{\rho n_1^2} R.$$

Le champ total au centre est

$$G_0 = \int \frac{dL}{u^2} \sin\theta = \int \frac{dL}{c^2}.$$

Considérant aussi le volume U comme une fonction de L, on déduit des équations (15)

$$dU = 3Ac^2\,dc = \frac{dL}{n_1^2},$$

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} dG_0 &= \frac{dL}{c^2} = 3An_1^2\,dc = \frac{3A}{4(y+z)^2}\,dc, \\ dR &= \frac{\rho}{\pi y^2}\,dL = \rho\,\frac{3A}{4\pi}\,\frac{c^2}{y^2(y+z)^2}\,dc. \end{aligned} \right.$$

Si l'on assimile le vide intérieur au volume décrit par la courbe de paramètre a, il en résulte

$$G_0 = 3An_1^2(c-a). \tag{17}$$

Le volume U et la résistance R permettront ainsi de déterminer le paramètre c du contour, le diamètre du fil, sa longueur et la valeur de G_0.

564. Fil de diamètre variable. — Il serait préférable, tout en conservant la même gorge et la même résistance totale, de diminuer le diamètre du fil dans les premières couches pour l'augmenter d'une manière progressive dans les couches suivantes ; on aurait ainsi le double avantage d'augmenter le nombre des spires les plus efficaces et de réduire les plus éloignées qui le sont moins.

En supposant qu'on se donne les valeurs de R, R′ et U, on peut se proposer de déterminer le diamètre y du fil pour chacune des couches semblables d'épaisseur dc, de manière à rendre maximum l'expression

$$F_0 = E\frac{G_0}{R+R'}.$$

Considérons l'une de ces couches correspondant aux deux valeurs c et $c+dc$ du paramètre. Si on y change le diamètre du fil, la constante de la bobine éprouvera une variation dG_0 et la résistance une variation correspondante dR ; le champ magnétique au centre devient $F_0+\delta F_0$ et, en négligeant les quantités du second ordre, il en résulte

$$\delta F_0 = E\frac{G_0}{R+R'}\left[\frac{dG_0}{G_0}-\frac{dR}{R+R'}\right].$$

La condition du maximum de δF_0 est évidemment

$$\frac{\frac{d}{dy}\cdot dG_0}{\frac{d}{dy}\cdot dR} = \frac{G_0}{R+R'} = C^{te}.$$

Les expressions (16) donnent alors, en supposant constante l'épaisseur z de l'isolant,

$$\frac{d}{dy}\,dG_0 = -\frac{3A}{2(y+z)^3}\,dc,$$

$$\frac{d}{dy}\,dR = -\rho\,\frac{3A}{2\pi}\,\frac{c^2(2y+z)}{y^3(y+z)^3}\,dc.$$

La condition cherchée équivaut donc à

$$c^2\,\frac{2y+z}{y^3} = C^{te};$$

le diamètre du fil croît moins vite que le paramètre c.

Si l'épaisseur de l'isolant est proportionnelle au diamètre du fil, ce diamètre dans chaque couche doit être aussi proportionnel au paramètre correspondant.

Dans cette dernière hypothèse, si l'on pose $y = \alpha c$, on a

$$(18)\quad \begin{cases} dG_0 = \dfrac{3A}{4\alpha^2(1+\delta)^2}\cdot\dfrac{dc}{c^2}, \quad dR = \rho\,\dfrac{3A}{4\pi\alpha^4(1+\delta)^2}\cdot\dfrac{dc}{c^2}; \\ G_0 = \dfrac{3A}{4\alpha^2(1+\delta)^2}\cdot\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{a}{c}\right), \quad R = \rho\,\dfrac{3A}{4\pi\alpha^4(1+\delta)^2}\cdot\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{a}{c}\right). \end{cases}$$

L'influence des couches extérieures diminue très rapidement, quand l'épaisseur de la bobine augmente, et le champ magnétique au centre est sensiblement en raison inverse du paramètre de la courbe qui limite la cavité.

Par le même raisonnement que plus haut (**562**) on trouverait que l'action maximum correspond au cas où la résistance de la bobine est égale à celle du circuit extérieur [1].

565. Champ magnétique d'une couche circulaire. — Supposons d'abord qu'un cercle de rayon a soit couvert par une couche magnétique homogène, de densité égale à l'unité. Le potentiel P de cette couche en un point dont les coordonnées x et y, dans le plan méridien correspondant, sont rapportées au centre du cercle et à son axe, comme axe des x,

[1] Ayrton et Perry, *Journal of the S. of teleg. Eng.*, t. VII, p. 297; 1878.

peut être développé en fonction des puissances croissantes de y (**262**); on a alors, en posant

$$u^2 = a^2 + x^2,$$

$$P = 2\pi\left[u - x - \frac{y^2}{2^2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{y^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{d^4u}{dx^4} - \cdots\right].$$

Les dérivées successives de u par rapport à x intervenant dans tous les problèmes qui s'en déduisent, nous les représenterons, pour abréger l'écriture, par $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$. Les premières valeurs sont

$$u_1 = \frac{x}{u}, \quad u_2 = \frac{a^2}{u^3}, \quad u_3 = -\frac{3a^2x}{u^5},$$

$$u_4 = \frac{3a^2(4x^2 - a^2)}{u^7}, \quad u_5 = -\frac{3.5a^2x(3a^2 - 4x^2)}{u^9},$$

$$u_6 = \frac{3^2 5a^2(a^4 - 12a^2x^2 + 8x^4)}{u^{11}}, \quad u_7 = \frac{3^2 5a^2x(-35a^4 + 140a^2x^2 - 56x^4)}{u^{13}}.$$

On a d'ailleurs, en général,

$$u_{n+1} = \frac{\partial u_n}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{x}{u}\frac{\partial u_n}{\partial u} + \frac{\partial u_n}{\partial x}.$$

Le potentiel P et les composantes (X_a, Y_a) du champ correspondant peuvent alors s'écrire

$$(19) \qquad P = 2\pi\left[u - x - \frac{y^2}{2^2}u_2 + \frac{y^4}{(2.4)^2}u_4 - \cdots\cdots\right],$$

$$(20) \quad \begin{cases} X_a = -\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2\pi\left[1 - u_1 + \dfrac{y^2}{2^2}u_3 - \dfrac{y^4}{(2.4)^2}u_5 + \cdots\cdots\right], \\ Y_a = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2\pi y\left[\dfrac{2}{2^2}u_2 - \dfrac{4y^2}{(2.4)^2}u_4 + \cdots\cdots\right]. \end{cases}$$

Les séries sont évidemment convergentes lorsque le rapport $\frac{y}{u}$ est inférieur à l'unité.

Une autre manière de traiter le problème consiste à faire usage des polynomes de Legendre (**118**).

Si l'on désigne par r le rayon vecteur du point considéré, par θ l'angle de ce rayon avec l'axe, et que l'on pose $\mu = \cos\theta$, les polynomes X_n sont des fonctions de μ, et l'équation de Laplace donne la condition générale

$$n(n+1)X_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial X_n}{\partial\mu}\right] = 0,$$

$$(21) \qquad \int_\mu^1 X_n\,d\mu = \frac{1-\mu^2}{n(n+1)}\frac{\partial X_n}{\partial\mu} = \frac{1-\mu^2}{n(n+1)}X'_n.$$

Chacun des polynomes et sa dérivée se déduisent des valeurs précédentes par les relations connues

$$(22) \quad X_{n+1} = \mu X_n - \frac{1-\mu^2}{n+1}X'_n, \quad X'_{n+1} = (n+1)X_n + \mu X'_n.$$

On a ainsi, pour $\theta = 0$ ou $\mu = 1$,

$$X_n = 1, \quad X'_{2n} = n(2n+1), \quad X'_{2n+1} = (n+1)(2n+1),$$

et, pour $\theta = 90^\circ$ ou $\mu = 0$,

$$X_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}, \quad X_{2n+1} = 0,$$

$$X'_{2n} = 0, \quad X'_{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}.$$

Nous reproduirons également les premières valeurs :

$$X_1 = \mu, \qquad X'_1 = 1,$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \qquad X'_2 = 3\mu,$$

$$X_3 = \frac{\mu}{2}(5\mu^2 - 3), \qquad X'_3 = \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1),$$

$$X_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{5.7}{2}\mu^4 - 3.5\mu^2 + \frac{3}{2}\right), \qquad X'_4 = \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3),$$

$$X_5 = \frac{\mu}{4}\left(\frac{7.9}{2}\mu^4 - 5.7\mu^2 + \frac{3.5}{2}\right), \qquad X'_5 = \frac{15}{8}(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1),$$

$$X_6 = \frac{1}{8}\left(\frac{7.9.11}{2.3}\mu^6 - \frac{5.7.9}{2}\mu^4 + \frac{3.5.7}{2}\mu^2 - \frac{5}{2}\right); \qquad X'_6 = \frac{21}{8}\mu(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5).$$

Le potentiel P peut être représenté suivant que $r \lesseqgtr a$, par l'une des séries (262)

$$(19)' \left\{ \begin{aligned} P &= 2\pi a\left[1 - X_1\frac{r}{a} + \frac{1}{2}X_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \ldots - (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}X_{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right] \\ P &= 2\pi a\left[\frac{1}{2}\frac{a}{r} - \frac{1}{2.4}X_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n+2)}X_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\right]. \end{aligned} \right.$$

Pour calculer les composantes (X_a, Y_a) du champ correspondant, on utilisera les relations

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r\cos\theta = \mu r, \quad y = r\sin\theta;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \mu, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta;$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1-\mu^2}{r}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\mu\sin\theta}{r};$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial x} = X_n'\frac{1-\mu^2}{r}, \quad \frac{\partial X_n}{\partial y} = -X_n'\frac{\mu\sin\theta}{r}.$$

Dans le cas de $r > a$, on aura alors, en tenant compte des relations (22) et désignant par S la surface πa^2 du cercle,

$$(20)' \left\{ \begin{aligned} X_a &= \frac{2S}{r^2}\left[\frac{X_1}{2} - \frac{1.3}{2.4}X_3\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}X_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right], \\ Y_a &= \frac{2S}{r^2}\sin\theta\left[\frac{X_1'}{2} - \frac{1}{2.4}X_3'\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n+2)}X_{2n+1}'\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right]. \end{aligned} \right.$$

Pour les points situés dans le plan de la couche, en particulier, auquel cas $\mu = 0$, la valeur de X_a est nulle et les autres se réduisent à

$$P_0 = \frac{S}{r}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right\},$$

$$Y_0 = \frac{S}{r^2}\left\{1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n+1}\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right\}.$$

566. Champ d'un courant circulaire. — Le potentiel V d'un feuillet magnétique uniforme, d'unité de puissance, limité au

contour du cercle, ou le potentiel de l'unité de courant qui suivrait le contour (**261**), est alors égal à $-\frac{\partial P}{\partial x}$, c'est-à-dire à la valeur précédemment calculée pour la composante X_a parallèle à l'axe. Les composantes X et Y du champ magnétique correspondant ont alors pour expressions

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{\partial X_a}{\partial x},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial X_a}{\partial y}.$$

On a ainsi, par les équations (20),

$$(23)\quad \begin{cases} X = 2\pi\left[u_2 - \frac{y^2}{2^2}u_4 + \frac{y^4}{(2.4)^2}u_6 - \cdots\right] \\ Y = -2\pi y\left[\frac{2}{2^2}u_3 - \frac{4y^2}{(2.4)^2}u_5 + \frac{6y^4}{(2.4.6)^2}u_7 \cdots\right], \end{cases}$$

et par les équations (20)',

$$(23)'\quad \begin{cases} X = \frac{2S}{r^3}\left[X_2 - \frac{3}{2}X_4\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdots + (-1)^n \frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}X_{2n+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right], \\ Y = \frac{2S}{r^3}\sin\theta\left[\frac{X'_2}{2} - \frac{1.3}{2.4}X'_4\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}X'_{2n+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right]. \end{cases}$$

Dans le plan du courant, où $x = 0$ et $\mu = 0$, on a $V = 0$ et $Y = 0$; suivant que le point est intérieur ou extérieur, la valeur de la composante X se réduit à

$$(24)\quad \begin{cases} X_0 = \frac{2\pi}{a}\left[1 - \frac{3}{2^2}\cdot\frac{y^2}{a^2} + \frac{3^2 5}{(2.4)^2}\cdot\frac{y^4}{a^4} - \frac{3^2 5^2 7}{(2.4.6)^2}\cdot\frac{y^6}{a^6} + \cdots\cdots\right], \\ X_0 = -\frac{S}{r^3}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\left[\frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right\}. \end{cases}$$

Lorsque le point est assez rapproché du plan du courant pour que l'on puisse négliger les termes de l'ordre de x^3 ou, en posant $\theta = 90^\circ - \delta$, les termes en δ^3, on peut écrire

$$(25)\quad \begin{cases} X = X_0 - \dfrac{2\pi}{a}\cdot\dfrac{x^2}{a^2}\left[\dfrac{3}{2} - \dfrac{3^2 5}{2.2^2}\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{3^2 5^2 7}{2.(2.4)^2}\cdot\dfrac{y^4}{a^4} - \dots\right], \\ X = X_0 + \dfrac{3S}{r^3}\,\delta^2\left[1 + \dfrac{3.5}{2^2}\cdot\dfrac{a^2}{r^2} + \dfrac{3.5^2 7}{(2.4)^2}\cdot\dfrac{a^4}{r^4} + \dots\right]; \\ Y = \dfrac{2\pi xy}{a^3}\left[2\dfrac{3}{2^2} - 4\dfrac{3^2 5}{(2.4)^2}\dfrac{y^2}{a^2} + 6\dfrac{3^2 5^2 7}{(2.4.6)^2}\cdot\dfrac{y^4}{a^4} - \dots\right], \\ Y = \dfrac{2S}{r^3}\,\delta\left[\dfrac{3}{2} + \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{3.5}{2}\dfrac{a^2}{r^2} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{3.5.7}{2.4}\cdot\dfrac{a^4}{r^4} + \dots\right]. \end{cases}$$

Si l'on borne les séries (23) aux termes du quatrième ordre de l'ordonnée y, en remplaçant les dérivées de u par leurs valeurs, il en résulte

$$(26)\quad \begin{cases} X = \dfrac{2S}{u^3}\left[1 - \dfrac{3}{2^2}\dfrac{4x^2 - a^2}{u^2}\dfrac{y^2}{u^2} + \dfrac{3^2 5}{(2.4)^2}\cdot\dfrac{a^4 - 12a^2x^2 + 8x^4}{u^4}\dfrac{y^4}{u^4}\right], \\ Y = \dfrac{3S}{u^3}\cdot\dfrac{xy}{u^2}\left[1 + \dfrac{5}{2.4}\dfrac{(3a^2 - 4x^2)}{u^2}\dfrac{y^2}{u^2}\right]. \end{cases}$$

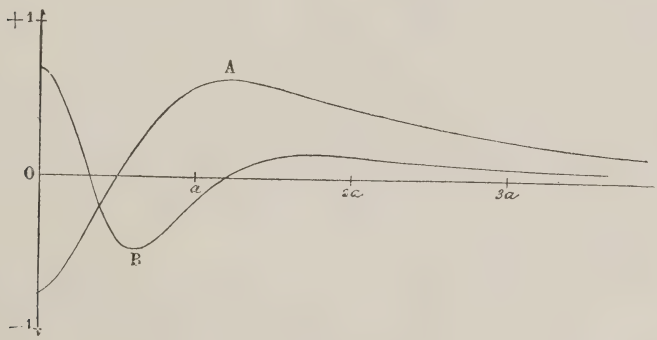


Fig. 142.

En écrivant la valeur de X sous la forme

$$X = \frac{2S}{u^3}\left(1 + A\frac{y^2}{a^2} + B\frac{y^4}{a^4}\right),$$

les facteurs A et B sont des nombres dont les valeurs en fonction de x ont été représentées sur la figure 142 par les courbes A et B.

Le facteur A est négatif et égal à 0,75 pour $x = 0$, c'est-à-dire que la composante X est un minimum au centre par

rapport au plan du courant. Ce facteur devient nul quand $x = 0,5\,a$ et prend sa valeur maximum 0,6 pour $x = 1,22\,a$.

Le facteur B, d'abord positif, s'annule pour les abscisses $x = 0,3\,a$ et $x = 1,187\,a$; il atteint sa valeur maximum négative quand $x = 0,586\,a$, c'est-à-dire au voisinage de l'abscisse pour laquelle le facteur A s'annule. Ce terme de correction est le plus souvent négligeable.

A part les termes d'ordre supérieur au second, les dérivées partielles de ces composantes par rapport à x sont

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2\pi\left(u_3 - \frac{y^2}{4}u_5\right) = -6\frac{Sx}{u^5}\left[1 + \frac{5}{4}\cdot\frac{3a^2 - 4x^2}{u^2}\cdot\frac{y^2}{u^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 2\pi\left(u_4 - \frac{y^2}{4}u_6\right) = -6\frac{S}{u^5}\left[\frac{a^2 - 4x^2}{u^2} + \frac{15}{4}\frac{a^4 - 12a^2x^2 + 8x^4}{u^4}\cdot\frac{y^2}{u^2}\right];$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\pi y u_4 = 3\frac{S}{u^4}\cdot\frac{a^2 - 4x^2}{u^2}\cdot\frac{y}{u},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\pi y u_5 = -15\frac{Sx}{u^6}\cdot\frac{3a^2 - 4x^2}{u^2}\cdot\frac{y}{u}.$$

La valeur de X va en décroissant d'une manière continue depuis le plan du cercle jusqu'à l'infini. La première dérivée, nulle pour $x = 0$, est constamment négative ; le point où elle est maximum varie de position avec y, mais reste toujours assez voisin du plan du cercle.

La valeur de Y, nulle pour $x = 0$, atteint son maximum pour $2x = a$, puis décroît jusqu'à zéro. La dérivée seconde est nulle pour $x = 0$ et pour $4x^2 = 3a^2$. Cette dernière valeur correspond au maximum négatif de la première dérivée.

567. Potentiel d'une calotte sphérique. — Les propriétés des courants circulaires peuvent encore s'exprimer d'une autre manière par les polynomes de Legendre.

Considérons une couche sphérique homogène S, limitée par un cercle HK (fig. 143) de rayon a et de centre O. Soit C le centre de la sphère, u son rayon, A le pôle de la calotte, et M_0 un point de l'axe situé à la distance x du centre C.

La distance $\rho = MM_0$ d'un point quelconque M de la surface au point M_0 s'exprimera, en fonction de l'angle θ que

fait le rayon correspondant CM avec l'axe de la calotte, par la relation

$$\rho^2 = u^2 + x^2 - 2ux\cos\theta.$$

Suivant que $x \lessgtr u$, le potentiel en M_0 d'un élément dS de la surface, situé au voisinage du point M, s'exprimera par l'une ou l'autre des séries convergentes

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dS}{\rho} &= \frac{dS}{u}\left[1 + \frac{x}{u}X_1 + \frac{x^2}{u^2}X_2 + \cdots\right] \\ &= \frac{dS}{x}\left[1 + \frac{u}{x}X_1 + \frac{u^2}{x^2}X_2 + \cdots\right]. \end{aligned}\right.$$

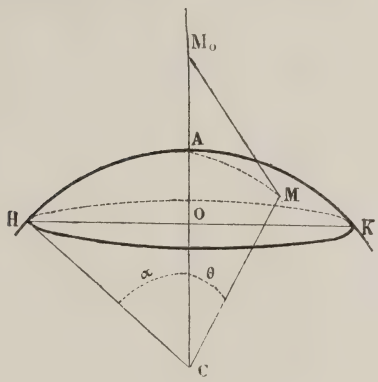


Fig. 143.

Posant encore $\mu = \cos\theta$ et appelant φ l'angle du méridien CMM_0 avec un méridien fixe, on a

$$dS = u^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -u^2\, d\mu\, d\varphi.$$

Si l'on désigne par α la valeur de l'angle θ relative au contour HK, le potentiel P_0 de la calotte au point M_0 s'obtiendra en intégrant les expressions (27) de 0 à 2π, par rapport à φ, et, par rapport à μ, de 1 à $\mu = \cos\alpha$. Il en résulte

$$\begin{aligned} P_0 &= 2\pi u\left[\int_\mu^1 d\mu + \frac{x}{u}\int_\mu^1 X_1\, d\mu + \frac{x^2}{u^2}\int_\mu^1 X_2\, d\mu + \cdots\right] \\ &= 2\pi\frac{u^2}{x}\left[\int_\mu^1 d\mu + \frac{u}{x}\int_\mu^1 X_1\, d\mu + \frac{u^2}{x^2}\int_\mu^1 X_2\, d\mu + \cdots\right]. \end{aligned}$$

La relation (21) permet d'éliminer toutes les intégrales. En se rappelant que la valeur limite de μ est $\cos\alpha$, on aura

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} P_0 &= 2\pi u\left[1-\mu+\frac{x}{u}\frac{1-\mu^2}{1.2}X_1'(\alpha)+\frac{x^2}{u^2}\frac{1-\mu^2}{2.3}X_2'(\alpha)+\cdots\right]\\ &= 2\pi\frac{u^2}{x}\left[1-\mu+\frac{u}{x}\frac{1-\mu^2}{1.2}X_1'(\alpha)+\frac{u^2}{x^2}\frac{1-\mu^2}{2.3}X_2'(\alpha)+\cdots\right].\end{aligned}\right.$$

568. Feuillet sphérique. — Le potentiel V_0 au point M_0 d'un feuillet magnétique uniforme de même surface S et de puissance égale à l'unité, ou de l'unité de courant qui suivrait le contour HK, est égal (**261**) à $-\frac{1}{u}\frac{\partial(xP_0)}{\partial x}$. On obtient ainsi

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} V_0 &= -2\pi\left[1-\mu+\frac{x}{u}\frac{1-\mu^2}{1}X_1'(\alpha)+\cdots+\left(\frac{x}{u}\right)^n\frac{1-\mu^2}{n}X_n'(\alpha)\right]\\ &= 2\pi(1-\mu^2)\left[\frac{1}{2}\frac{u^2}{x^2}X_1'(\alpha)+\cdots+\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{u}\right)^{n+1}X_n'(\alpha)\right].\end{aligned}\right.$$

On en déduira, par le théorème de Legendre (**262**) la valeur du potentiel V en un point situé à la distance r du centre C de la sphère, dans une direction qui fait l'angle θ avec l'axe du système. Remplaçant dans les expressions (29) la quantité μ par sa valeur $\cos\alpha$, il en résulte

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} V &= -2\pi\left\{1-\cos\alpha+\sin^2\alpha\left[\frac{r}{u}X_1'(\alpha)X_1(\theta)+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{r}{u}\right)^n X_n'(\alpha)X_n(\theta)\right]\right\}\\ &= 2\pi\sin^2\alpha\left[\frac{1}{2}\frac{u^2}{r^2}X_1'(\alpha)X_1(\theta)+\cdots+\frac{1}{n+1}\left(\frac{u}{r}\right)^{n+1}X_n'(\alpha)X_n(\theta)\right].\end{aligned}\right.$$

La première série est convergente pour les points dans l'intérieur de la sphère ($r < u$) et la seconde pour les points extérieurs. Sur la surface même, les deux séries ont la même valeur si $\theta > \alpha$, c'est-à-dire si le point considéré est en dehors de la surface S du feuillet. Pour $\theta < \alpha$, c'est-à-dire sur le feuillet lui-même, la différence des deux séries est égale à 4π.

L'avantage de ces nouvelles formules, pour certaines applications, consiste à rapporter le potentiel d'un courant circulaire à une origine quelconque C située sur l'axe de symétrie.

Quand on fait $u = a$ et $\sin\alpha = 1$, auquel cas le point C coïncide avec le centre O du cercle, les polynomes $X'_n(\alpha)$ ont des valeurs très simples (**565**) et on retrouve la formule (27).

569. Champ d'une bobine simple. — Le champ d'une bobine cylindrique de longueur $2b$, comprenant n spires par unité de longueur et parcourue par l'unité de courant, est égal à l'induction d'un cylindre aimanté uniformément (**354**), dont l'intensité d'aimantation serait n.

Si le point considéré est extérieur à la bobine, le champ est le même que celui de deux surfaces magnétiques A et A′ de densités constantes $+n$ et $-n$ qui couvriraient les bases.

Les quantités P, X_a et Y_a données par les équations (19) et (20) sont des fonctions de x que l'on peut écrire

$$P = 2\pi f(x), \qquad X_a = 2\pi[1 + f_1(x)], \qquad Y_a = 2\pi f_2(x).$$

Si l'on reporte l'origine des coordonnées au centre de la bobine, on devra y remplacer x par $x - b$ pour la surface A, et par $x + b$ pour la surface A′. Cette dernière étant négative, le potentiel extérieur de la bobine et les composantes du champ sont

$$(31) \qquad \begin{cases} V = 2\pi n[f(x-b) - f(x+b)]; \\ X = 2\pi n[f_1(x-b) - f_1(x+b)], \\ Y = 2\pi n[f_2(x-b) - f_2(x+b)]. \end{cases}$$

Pour l'intérieur, le champ est la résultante de la valeur $4\pi n$ qui conviendrait à une bobine illimitée (**355**) et du champ produit par les bases. On reconnaîtrait encore aisément que les expressions (31) conviennent aux deux cas, suivant que x est plus grand ou plus petit que b.

De même, les expressions (20)′ sont des fonctions des variables r et θ que l'on peut écrire

$$X_a = 2S\varphi_1(r, \theta), \qquad Y_a = 2S\varphi_2(r, \theta).$$

Désignant par r' et θ' les valeurs qui correspondent à la couche négative, on aura

$$(32) \qquad \begin{cases} X = 2nS[\varphi_1(r,\theta) - \varphi_1(r,\theta')], \\ Y = 2nS[\varphi_1(r,\theta) - \varphi_2(r,\theta')]. \end{cases}$$

Il est clair que $\varphi_1(r,\theta) = -\varphi_1(r,\pi-\theta)$ et $\varphi_2(r,\theta) = \varphi_2(r,\pi-\theta)$.

Pour un point situé à la distance r_0 dans le plan moyen de la bobine, la composante Y est nulle et

$$X_0 = -4nS\varphi_1(r_0, \theta_0).$$

Lorsque l'angle θ_0 est très grand, c'est-à-dire le point très éloigné par rapport à la longueur $2b$ de la bobine, la valeur de $\varphi_1(r_0, \theta_0)$ se réduit à $\frac{\cos\theta_0}{2r_0^2} = \frac{b}{2r_0^3}$; il reste alors

$$X_0 = -\frac{2bnS}{r_0^3} = -\frac{NS}{r_0^3}.$$

Les expressions (32) ne conviennent pas pour le champ intérieur, parce que le rayon vecteur r n'est pas toujours supérieur au rayon a.

570. Bobine à plusieurs couches. — Si l'on considère une bobine simple de rayon r, en posant

$$u^2 = r^2 + (x-b)^2, \qquad v^2 = r^2 + (x+b)^2$$

et remplaçant les dérivées de u et v par leurs valeurs, les composantes (31) du champ deviennent

$$X_r = 2\pi n\left[\frac{x+b}{v} - \frac{x-b}{u} + \frac{3}{4}\left(\frac{x+b}{v^5} - \frac{x-b}{u^5}\right)r^2y^2 + \cdots\right].$$

$$Y_r = \pi n r^2 y\left[\frac{1}{u^3} - \frac{1}{v^3} + \frac{3}{8}\left\{\frac{4(x+b)^2 - r^2}{v^7} - \frac{4(x-b)^2 - r^2}{u^7}\right\}y^2 + \cdots\right].$$

Pour une bobine d'épaisseur dr, dont l'enroulement est homogène, on remplacera dans ces expressions n par $n_1 n_2 dr$. L'intégration par rapport à r, entre les limites a' et a'', donnera ensuite les composantes X et Y de l'action magnétique d'une bobine d'épaisseur $a'' - a'$.

Si on représente ces composantes par

$$X = A_0 + A_2y^2 + A_4y^4 + \cdots,$$
$$Y = B_1y + B_3y^3 + \cdots,$$

le premier terme A_0 est évidemment la valeur du champ sur l'axe donnée par l'équation (10). On a alors

$$A_2 = \frac{3}{2}\pi n_1 n_2 \int_{a'}^{a''} \left(\frac{x+b}{[r^2+(x+b)^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{x-b}{[r^2+(x-b)^2]^{\frac{5}{2}}} \right) r^2 dr,$$

$$= \frac{\pi n_1 n_2}{2} \left\{ \frac{1}{x+b} \left[\frac{r^3}{[r^2+(x+b)^2]^{\frac{3}{2}}} \right]_{a'}^{a''} - \frac{1}{x-b} \left[\frac{r^3}{[r^2+(x-b)^2]^{\frac{3}{2}}} \right]_{a'}^{a''} \right\};$$

$$B_1 = \pi n_1 n_2 \int_{a'}^{a''} \left(\frac{1}{[r^2+(x-b)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[r^2+(x+b)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) r^2 dr.$$

Une intégration analogue a été faite précédemment (**561**); il en résulte

$$B_1 = \pi n_1 n_2 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a'}{\sqrt{a'^2+(x-b)^2}} - \dfrac{a'}{\sqrt{a'^2+(x+b)^2}} \\ - \dfrac{a''}{\sqrt{a''^2+(x-b)^2}} + \dfrac{a''}{\sqrt{a''^2+(x+b)^2}} \\ + \mathcal{L}.\dfrac{a''+\sqrt{a''^2+(x-b)^2}}{a'+\sqrt{a'^2+(x-b)^2}} - \mathcal{L}.\dfrac{a''+\sqrt{a''^2+(x+b)^2}}{a'+\sqrt{a'^2+(x+b)^2}} \end{array} \right\}.$$

Dans le plan moyen, où $x=0$, la composante X se réduit à

$$X = \frac{2\pi N}{a_2} + \frac{\pi n_1 n_2}{b} \left[\frac{a''^3}{(a''^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \right] y^2 + \ldots,$$

expression dans laquelle a_2 représente le rayon de la spire d'action moyenne par rapport au centre (**560**).

La valeur de B_1 est alors nulle et la composante Y est du troisième ordre en y.

571. Cas particuliers. — En vue de certaines applications, il est avantageux de remplacer les séries (20) ou (23) par d'autres expressions qui ne renferment plus les puissances de u en dénominateur.

Les valeurs des composantes parallèles à l'axe seront surtout utiles à considérer.

1° Lorsque la distance x est moindre que le rayon a, les

dérivées successives de u peuvent être exprimées à l'aide du développement en série convergente

$$u = a\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} \ldots - (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}\right].$$

On a alors (**566**), pour un courant circulaire de rayon r,

$$\begin{aligned} X_r = \frac{2\pi}{r}\Big\{ & 1 - \frac{1.3}{2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1.3.5}{2.4}\frac{x^4}{r^4} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6}\frac{x^6}{r^6} + \ldots \\ & + \frac{1}{2^2}\frac{y^2}{r^2}\left[1^2 3 - \frac{1.3^2 5}{2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1.3.5^2 7}{2.4}\frac{x^4}{r^4} - \frac{1.3.5.7^2 9}{2.4.6}\frac{x^6}{r^6} + \ldots\right] \\ (33) \quad & + \frac{1}{(2.4)^2}\frac{y^4}{r^4}\left[1^2 3^2 5 - \frac{1.3^2 5^2 7}{2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1.3.5^2 7^2 9}{2.4}\frac{x^4}{r^4} + \ldots\right] \\ & + \frac{1}{(2.4.6)^2}\frac{y^6}{r^6}\left[1^2 3^2 5^2 7 - \frac{1.3^2 5^2 7^2 9}{2}\frac{x^2}{r^2} + \ldots\right] + \ldots\Big\}. \end{aligned}$$

Pour une bobine à gorge rectangulaire, de dimensions $2b$ et $2c$, il suffira de multiplier cette expression par $n_1 n_2 dx\, dr$ et d'intégrer ensuite, par rapport à x, entre les limites $x - b$ et $x + b$ et, par rapport à r, entre $a - c$ et $a + c$.

Au voisinage du *plan moyen* de la bobine, si l'on peut négliger les rapports des quantités c^4, b^4 et x^6 aux puissances correspondantes du rayon moyen a, on aura, en général,

$$\int \frac{dr}{rn} = \frac{2c}{an}\left[1 + \frac{n(n+1)}{2.3}\frac{c^2}{a^2}\right], \quad \int x^n dx = 2bx^{n-2}\left[x^2 + \frac{n(n-1)}{2.3}b^2\right].$$

La composante X devient alors, en posant

$$\alpha = \frac{y^2}{a^2}, \quad \gamma = \frac{c^2}{2.3a^2}, \quad \beta = \frac{b^2 + 3x^2}{2.3a^2}, \quad \delta = \frac{(2b^2 + x^2)x^2}{4.6.a^4},$$

$$\begin{aligned} X = \frac{2N\pi}{a}\Big\{ & 1 + 1.2\gamma - 1.3\beta + 1.3^2 5\delta \\ & + \frac{3}{2^2}\alpha\left[1 + 3.4\gamma - 3.5\beta + 3.5^2 7\delta\right] \\ (34) \quad & + \frac{3^2 5}{(2.4)^2}\alpha^2\left[1 + 5.6\gamma - 5.7\beta + 5.7^2 9\delta\right] \\ & + \frac{3^2 5^2 7}{(2.4.6)^2}\alpha^3\left[1 + 7.8\gamma - 7.9\beta + 7.9^2 11\delta\right] + \ldots\Big\} \end{aligned}$$

2° La valeur du champ à une *grande distance* par rapport au rayon de la bobine se déterminera d'une manière analogue, en partant de la série convergente

$$u = x\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x\left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} - \cdots - (-1)^n \frac{1.3\cdots(2n-3)}{2.4\cdots 2n}\left(\frac{a}{x}\right)^{2n}\right].$$

On a alors, pour un courant de rayon r,

$$\begin{aligned} X_r = \frac{2\pi r^2}{x^3}\Big\{ & 1 - \frac{3}{2}\frac{r^2}{x^2} + \frac{3.5}{2.4}\frac{r^4}{x^4} - \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{r^6}{x^6} + \cdots \\ & - \frac{1}{2^2}\frac{y^2}{x^2}\left[\frac{1}{2}2.3.4 - \frac{1.3}{2.4}4.5.6\frac{r^2}{x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}6.7.8\frac{r^4}{x^4} - \cdots\right] \\ (35)\quad & + \frac{1}{(2.4)^2}\frac{y^4}{x^4}\left[\frac{1}{2}2.3.4.5.6 - \frac{1.3}{2.4}4.5.6.7.8\frac{r^2}{x^2} + \cdots\right] \\ & - \frac{1}{(2.4.6)^2}\frac{y^6}{x^6}\left[\frac{1}{2}2.3.4.5.6.7.8 - \frac{1.3}{2.4}4.5.6.7.8.9.10\frac{r^2}{x^2} + \cdots\right] + \cdots\Big\}. \end{aligned}$$

Si on peut négliger les quatrièmes puissances des rapports $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{a}$ et le rapport $\frac{c^2}{x^2}$, qui est de même ordre, une double intégration donne, pour une bobine homogène,

$$\begin{aligned} X = \frac{2N\pi a^2}{x^3}\Big\{ & 1 + \frac{c^2}{3a^2} + \frac{2b^2}{x^2} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{x^2} \\ (36)\qquad & - \frac{3.4}{2^2}\frac{y^2}{x^2}\left[1 + \frac{c^2}{3a^2} + \frac{5.6}{2.3}\frac{b^2}{x^2} - \frac{5.6}{2.4}\frac{a^2}{x^2}\right] \\ & + \frac{3.4.5.6}{(2.4)^2}\frac{y^4}{x^4}\left[1 + \frac{c^2}{3a^2} + \frac{7.8}{2.3}\frac{b^2}{x^2} - \frac{7.8}{2.4}\frac{a^2}{x^2}\right] - \cdots\Big\}. \end{aligned}$$

Cette composante tend à devenir en raison inverse du cube de la distance, comme on pouvait le voir directement par l'assimilation de la bobine à un aimant.

3° Dans l'intérieur d'une bobine simple de *grande longueur* par rapport à son rayon r, le champ est sensiblement uniforme et sa composante axiale est

$$X_r = 4\pi n - (X_a + X'_a),$$

X_a et X'_a désignant les valeurs absolues relatives aux bases A et A′ où la densité magnétique serait n.

En posant $u^2 = r^2 + (b-x)^2$, les séries (23) peuvent alors être développées en fonction du rapport

$$p = \frac{r}{b-x}, \quad \text{qui donne} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p^2}{r},$$

$$u_1 = \frac{b-x}{u} = (1+p^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1.3}{2.4}p^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}p^6 + \cdots$$

On en déduira les valeurs successives des dérivées qui entrent dans l'expression de X_a ; il suffira ensuite d'y changer le signe de x pour avoir celle de X'_a. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} X_r = 4\pi n \Big\{ & 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2}\left(1 + \frac{2.3}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^4}{b^4}\left(1 + \frac{4.5}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \cdots \\ & - \frac{y^2 r^2}{2^2 b^4}\left[\frac{1}{2}2.3\left(1 + \frac{4.5}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{1.3}{2.4}4.5\frac{r^2}{b^2}\left(1 + \frac{6.7}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \cdots\right] \\ (37) \quad & + \frac{y^4 r^2}{(2.4)^2 b^6}\left[\frac{1}{2}2.3.4.5\left(1 + \frac{6.7}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{1.3}{2.4}4.5.6.7\frac{r^2}{b^2}\left(1 + \frac{8.9}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \cdots\right] \\ & - \frac{y^6 r^2}{(2.4.6)^2 b^8}\left[\frac{1}{2}2.3.4.5.6.7\left(1 + \frac{8.9}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \cdots\right] + \cdots \Big\}. \end{aligned}$$

La composante X relative à une bobine homogène s'obtiendra en remplaçant n par $n_1 n_2 dr$, puis intégrant entre les limites $a-c$ et $a+c$. Si l'on néglige les quatrièmes puissances des rapports $\frac{x}{b}$ et $\frac{c}{a}$, on obtient

$$\begin{aligned} X = \frac{2N\pi}{b} \Big\{ & 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2} + 3\frac{x^2}{b^2}\right) + \frac{3}{8}\frac{a^4}{b^4}\left(1 + 2\frac{c^2}{a^2} + 10\frac{x^2}{b^2}\right) \\ (38) \quad & - \frac{y^2 a^2}{2^2 b^4}\left[3\left(1 + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2} + 10\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{15}{2}\frac{a^2}{b^2}\left(1 + 2\frac{c^2}{a^2} + 21\frac{x^2}{b^2}\right)\right] \\ & + \frac{15}{16}\frac{y^4 a^2}{b^6}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2} + 21\frac{x^2}{b^2}\right) - \cdots \Big\}. \end{aligned}$$

Lorsque les rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{x}{b}$ et $\frac{a^2}{b^2}$ sont de même ordre, il reste simplement, au même degré d'approximation,

$$\begin{aligned} X = \frac{2N\pi}{b}\Big[& 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} + \frac{3}{8}\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{4}{9}\frac{c^2}{a^2} - 4\frac{x^2}{b^2}\right) \\ (39) \quad & - \frac{3}{4}\frac{a^2 y^2}{b^4}\left(1 - \frac{5}{2}\frac{a^2}{b^2}\right) + \frac{15}{16}\frac{a^2 y^4}{b^6}\Big]. \end{aligned}$$

572. Méthode de Maxwell. — Quand on veut passer de l'action d'un courant unique à celle d'une bobine, il est quelquefois plus avantageux, au lieu d'employer les quadratures comme dans les paragraphes précédents, d'appliquer la méthode suivante indiquée par Maxwell.

Soit P une fonction de deux variables α et β, dont les limites sont $\pm p$ et $\pm q$; on se propose d'en calculer la valeur moyenne

$$\overline{P} = \frac{1}{4pq}\int_{-p}^{+p} d\alpha \int_{-q}^{+q} P\, d\beta.$$

Si P_0 est la valeur de P pour $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, on peut développer cette fonction par la formule de Taylor

$$P = P_0 + \alpha\left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)_0 + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial \beta}\right)_0 + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}\right)_0 + \cdots.$$

Quand on effectue ensuite les intégrations entre les limites indiquées, tous les termes de degré impair en p et q disparaissent et il reste

$$\overline{P} = P_0 + \frac{1}{2.3}\left[p^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}\right)_0 + q^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2}\right)_0\right]$$
$$+ \frac{2}{3.4.5}\left[p^4\left(\frac{\partial^4 P}{\partial \alpha^4}\right)_0 + 2p^2q^2\left(\frac{\partial^4 P}{\partial \alpha^2\,\partial \beta^2}\right)_0 + q^4\left(\frac{\partial^4 P}{\partial \beta^4}\right)_0\right] + \cdots.$$

Si l'on applique cette formule au premier terme de X dans l'équation (23), lequel représente l'action sur l'axe d'un courant circulaire, pour en déduire la valeur relative à une bobine d'enroulement homogène, on remplacera a par $a+\alpha$, x par $x+\beta$, les valeurs de p et q étant c et b. Il en résulte alors, en posant

$$P = u_2 = \frac{(a+\alpha)^2}{\left[(a+\alpha)^2 + (x+\beta)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\overline{P} = \frac{a^2}{u^3}\left[1 + \frac{a^2(4x^2 - a^2)}{2u^4}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{2x^4 - 11a^2x^2 + 2a^4}{6u^4}\cdot\frac{c^2}{a^2} + \cdots\right],$$

et la valeur de X pour la bobine est $2\pi N\overline{P}$.

Pour un point situé en dehors de l'axe, si l'on s'arrête aux termes du second ordre en y, il suffit de considérer comme constant le second terme de la première équation (23). La valeur relative à la bobine est alors

$$(40) \qquad X = 2\pi N\left[\overline{P} + \frac{a^2}{u^3}\,\frac{3(4x^2 - a^2)y^2}{4u^4}\right].$$

573. Valeurs moyennes. — Imaginons que, dans un système de révolution autour d'un axe, on considère la valeur moyenne que prend une fonction U sur la surface d'un cercle de rayon y ayant même axe que le système.

Si la fonction U en un point quelconque est représentée par une expression de la forme

$$U = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots + A_n y^n,$$

dans laquelle les quantités A sont des fonctions de x, il suffit de remarquer que la valeur moyenne d'un terme quelconque sur le cercle est

$$\frac{A_n}{\pi y^2}\int_0^y 2\pi y^n y\,dy = 2A_n\,\frac{y^n}{n+2}.$$

La valeur moyenne de la fonction U est donc

$$U_m = A_0 + 2\left(A_1\frac{y}{3} + A_2\frac{y^2}{4} + \cdots + A_n\frac{y^n}{n+2}\right).$$

Les expressions précédentes détermineront ainsi, soit la valeur moyenne du potentiel d'une surface magnétique, soit celle de la composante axiale du champ produit par un courant circulaire ou par une bobine.

574. Action sur une aiguille aimantée. — Dans l'étude des propriétés du galvanomètre, en particulier pour la boussole des tangentes (**363**), nous aurons à considérer l'action exercée sur une aiguille aimantée par le courant d'une bobine.

Si le champ de la bobine était uniforme, ou l'aiguille infiniment petite, l'action électromagnétique se réduirait à un couple ; il n'en est pas de même en général, mais on peut toujours supposer que le centre de l'aiguille est fixe et ne tenir compte que du couple directeur.

Soit BB′ (fig. 144), un courant circulaire de rayon a, dont le centre est en O, Ox son axe, A_2A_1 une aiguille dont le milieu P est sur l'axe de la bobine à une distance x du centre. Appelant $2l$ la longueur de l'aiguille, $x+\delta$ et y les coordonnées du pôle A_1, celles du pôle A_2 sont $x-\delta$ et $-y$; nous supposerons ces pôles égaux à l'unité.

Désignons par X_1, Y_1 et X_2, Y_2 les composantes du champ du cadre, pour l'unité de courant, aux points A_1 et A_2. Comme

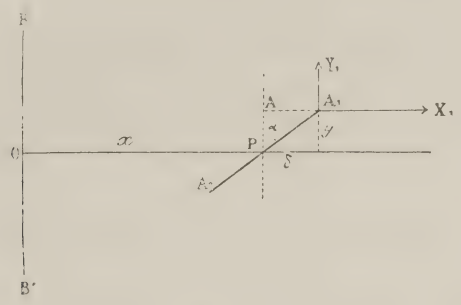


Fig. 144.

les pôles A_1 et A_2 sont de signes contraires, le couple C correspondant est

$$C=(X_1+X_2)y-(Y_1-Y_2)\delta.$$

D'un autre côté, appelant X et Y les composantes du champ au point A, dont les coordonnées sont x et y, on a

$$X_1=X+\delta\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\delta^2}{1.2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\delta^3}{1.2.3}\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}+\frac{\delta^4}{1.2.3.4}\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}+\ldots,$$

$$Y_1=Y+\delta\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\delta^2}{1.2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\delta^3}{1.2.3}\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}+\frac{\delta^4}{1.2.3.4}\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}+\ldots.$$

Les valeurs de X_2 et Y_2 se déduiraient des précédentes en changeant le signe de δ; il en résulte

$$X_1+X_2=2\left[X+\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\delta^4}{24}\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}+\ldots\right],$$

$$Y_1-Y_2=2\delta\left[\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}+\ldots\right].$$

Les équations (23) donnent, en bornant le développement aux termes du 5e ordre en δ et y,

$$X_1 + X_2 = 4\pi\left[u_2 - \frac{y^2}{4}u_4 + \frac{y^4}{(2.4)^2}u_6 + \frac{\delta^2}{2}\left(u_4 - \frac{y^2}{4}u_6\right) + \frac{\delta^4}{24}u_6\right],$$

$$Y_1 - Y_2 = -2\pi y\delta\left[u_4 - \frac{y^2}{8}u_6 + \frac{\delta^2}{6}u_6\right];$$

$$C = 4\pi y\left[u_2 + \left(\delta^2 - \frac{y^2}{4}\right)u_4 + \frac{1}{64}(y^4 - 12y^2\delta^2 + 8\delta^4)u_6\right].$$

En appelant α l'angle que fait l'axe magnétique A_2A_1 avec le plan du courant, on a $\delta = l\sin\alpha$ et $y = l\cos\alpha$.

Comme le produit $2l$, qui vient en facteur commun, représente le moment magnétique m de l'aiguille, il en résulte

$$(41)\quad C = 2\pi m\cos\alpha\left[u_2 + \frac{5\sin^2\alpha - 1}{4}l^2u_4 + \frac{1 - 14\sin^2\alpha + 21\sin^4\alpha}{64}l^4u_6\right].$$

Quand on fait $x = 0$, c'est-à-dire quand le milieu de l'aiguille est au centre du cadre, le couple se réduit à

$$C = \frac{2\pi m\cos\alpha}{a}\left[1 + \frac{3}{4}(1 - 5\sin^2\alpha)\frac{l^2}{r^2} + \frac{45}{64}(1 - 14\sin^2\alpha + 21\sin^4\alpha)\frac{l^4}{r^4}\right].$$

Lorsque le cadre est formé par une bobine à gorge rectangulaire, il faut remplacer le terme principal $2\pi u_2$ par la valeur de G que donne l'équation (10). Quant aux termes de correction compris dans la parenthèse de l'expression (41), il suffira en général, à moins que l'aiguille n'ait une longueur notable par rapport au diamètre du cadre, de prendre pour les quantités a et u les valeurs qui correspondent au rayon moyen de la bobine.

Si l'aiguille, supposée symétrique, ne peut pas être réduite à deux pôles, il est facile de voir que l'on doit remplacer les facteurs l^2 et l^4 par $\frac{\Sigma\mu\lambda^3}{\Sigma\mu\lambda}$ et $\frac{\Sigma\mu\lambda^5}{\Sigma\mu\lambda}$, μ désignant la masse magnétique située à une distance λ de l'axe de rotation.

Le terme principal, dans l'expression du couple, représente le moment de l'action que subirait l'aiguille dans un champ uniforme dont l'intensité serait la même qu'au point P.

Le premier terme de correction dans la parenthèse est proportionnel au facteur $(1 - 5\sin^2\alpha)$. Ce facteur est positif et égal à l'unité pour $\alpha = 0$; il s'annule pour $5\sin^2\alpha = 1$ ou $2\tang\alpha = 1$, c'est-à-dire pour un angle de $26^\circ 4'$. Il devient ensuite négatif et atteint la valeur 1,5 pour $\alpha = 45^\circ$.

Le second terme, proportionnel à $(1 - 14\sin^2\alpha + 21\sin^4\alpha)$, est nul pour $\alpha = 4^\circ 40'$ et $\alpha = 35^\circ 49'$. Ce facteur est positif et égal à l'unité pour $\alpha = 0$, passe par un minimum égal à $-\frac{4}{3}$, vers $19^\circ 28'$, et reprend la même valeur positive vers $43^\circ 36'$. Dans la plupart des cas, ce terme sera négligeable.

575. Bobine de Gaugain. — Différents artifices peuvent être employés pour faire disparaître le second terme de l'expression (41) du couple; dans ce cas, l'effet est sensiblement le même que si le champ était uniforme.

Une première méthode consiste à disposer les expériences de façon que l'aiguille fasse toujours avec le cadre un angle voisin de 26°, qui rend le facteur $(1 - 5\sin^2\alpha)$ très petit.

Un autre moyen est de placer le centre de l'aiguille à une distance égale à la moitié du rayon du cercle, $2x = a$, condition qui annule le facteur u_4.

Gaugain avait trouvé par expérience [1] que, dans un galvanomètre ainsi constitué, la tangente de la déviation est très exactement proportionnelle à l'intensité du courant, c'est-à-dire que le couple est proportionnel au cosinus de la déviation. Partant de cette remarque, il avait construit des bobines ayant la forme d'un tronc de cône tel que la tangente du demi-angle au sommet fût égale à 2. Si on place le centre de l'aiguille au sommet du cône, la condition précédente sera satisfaite pour toutes les spires, mais cette disposition présente de grandes difficultés pratiques pour l'enroulement du fil et le centrage de l'aiguille. Il est plus avantageux de combiner des bobines à section rectangulaire de manière à réaliser un champ très sensiblement uniforme.

576. Cadres de von Helmholtz. — Si l'on considère deux circonférences B_1 et B_2 (fig. 145) de même rayon r, ayant même axe O_1O_2 et parcourues par des courants parallèles, on

[1] Gaugain, *Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, t. XXXVI, p. 191; 1853.

voit aisément, par raison de symétrie, qu'au point O, milieu de la distance O_1O_2, la composante X parallèle à l'axe est un minimum ou un maximum relativement aux points situés sur l'axe, ou dans un plan perpendiculaire à l'axe, et que la composante Y est nulle dans le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par ce point O. Le champ est donc sensiblement uniforme au voisinage du point O, et le couple produit par les deux courants, sur une aiguille aimantée située dans cette région, est sensiblement le même que si l'aiguille était centrée ; on supprimera ainsi une difficulté de réglage.

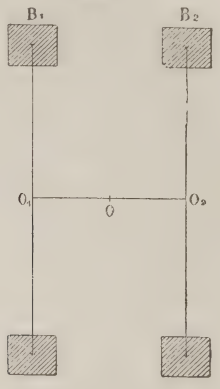


Fig. 145.

En outre, si la distance des cadres est égale au rayon r, les dérivées de u deviennent

$$u_2 = \frac{r^2}{u^3} = \frac{8}{5r\sqrt{5}}, \quad u_4 = 0,$$

$$u_6 = \frac{3^3 5}{2}\,\frac{r^6}{u^{11}} = \frac{3^3 5}{2}\,\frac{r^2}{u^3}\cdot\frac{r^4}{u^8}.$$

La composante X du champ des deux cadres est alors

$$(42) \qquad X = 4\pi\frac{r^2}{u^3}\left[1 - \frac{3^3 5}{2^3 4^2}\,\frac{r^4 y^4}{u^8}\right] = \frac{32\pi}{5r\sqrt{5}}\left[1 - \frac{54}{125}\cdot\frac{y^4}{r^4}\right].$$

Telle est la disposition imaginée par von Helmholtz [1].

[1] Wiedemann, *Galvanismus*, Bd II, p. 225 (2e éd.).

L'état du champ magnétique est représenté par la figure 146 empruntée à Maxwell; les deux systèmes de lignes orthogo-

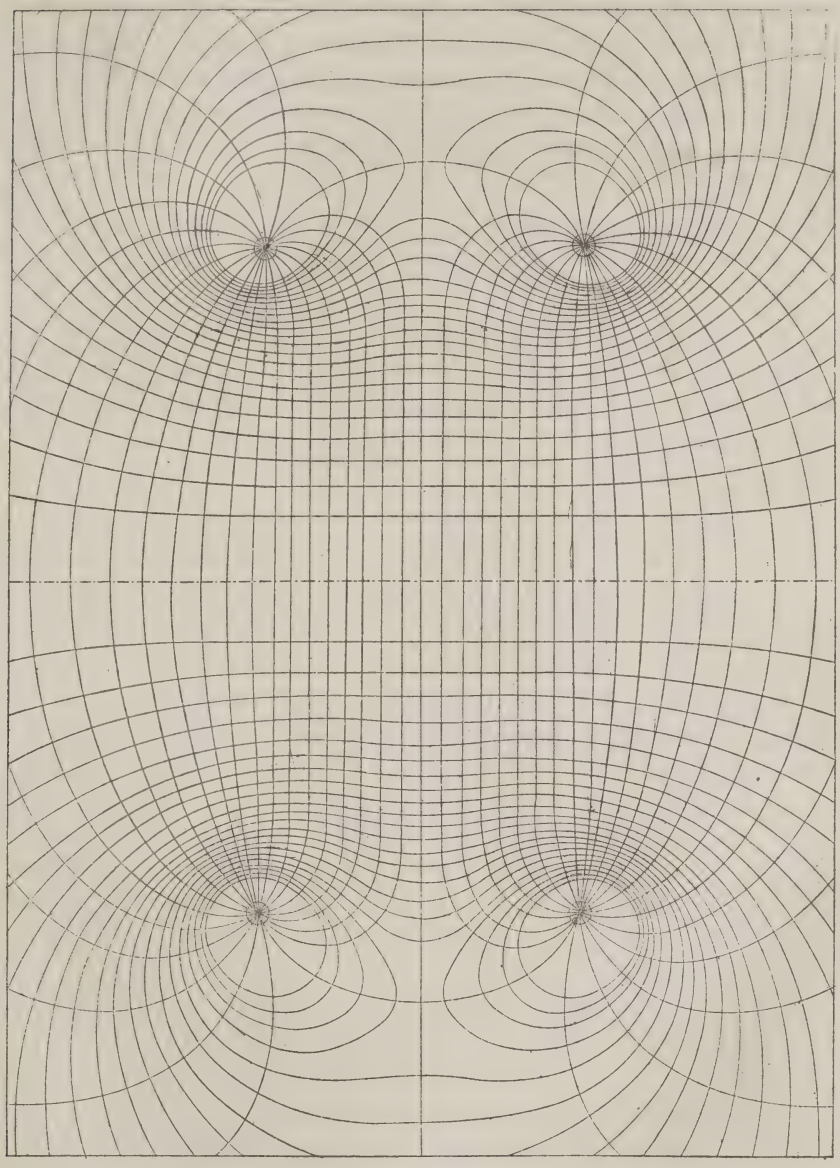


Fig. 146.

nales représentent, soit les lignes de force, soit l'intersection du plan de figure par les surfaces de niveau.

Le premier facteur de l'expression (42) représente la valeur G_0 du champ au centre O du système. Si on remplace les courants circulaires par des bobines de dimensions $2b$ et $2c$, chacune d'elles contenant N spires, et qu'on s'en tienne aux termes du second ordre, on pourra remplacer r par le rayon moyen a dans le terme de correction; le terme en c^2 disparaît alors comme ayant en facteur $a^2 - 4x^2$ et la valeur relative au point O devient

$$G_0 = \frac{32 N\pi}{5a\sqrt{5}}\left[1 - \frac{1}{15}\frac{b^2}{a^2}\right].$$

Si l'on pousse l'approximation jusqu'aux termes du quatrième ordre, on trouve que le terme en y^2 renferme le facteur $(31b^2 - 36c^2)$; on fera disparaître ce terme en choisissant la section de la gorge de manière que

$$\frac{b}{c} = \frac{6}{\sqrt{31}} = 1{,}079.$$

Il ne restera alors du quatrième ordre que le terme en y^4, lequel a pour valeur $-\frac{54}{125}\frac{y^4}{a^4}$.

577. Bobine à quatre cercles. — On obtient une solution plus complète du problème au moyen de quatre courants circulaires ayant même axe et symétriques deux à deux par rapport à un point de cet axe.

Nous supposerons que ces courants, de rayon r et r', aux distances x et x' du centre de symétrie, sont situés sur une sphère de rayon a. Si les courants sont de même sens, les composantes du champ parallèles à l'axe s'ajoutent. Désignant par p le rapport du nombre de spires des grands circuits à celui des petits, on peut choisir deux des trois quantités r, r', p de manière à annuler les deux premiers termes de correction, c'est-à-dire la somme des valeurs de u_4 et u_6 relatives aux quatre courants. Comme $u = a$ pour tous les courants, cette double condition est exprimée par les équations

$$pr^2(4x^2 - r^2) + r'^2(4x'^2 - r'^2) = 0,$$

$$pr^2(r^4 - 12r^2x^2 + 8x^4) + r'^2(r'^4 - 12r'^2x'^2 + 8x'^4) = 0.$$

Si l'on pose $r = ma$ et $r' = m'a$, ce qui donne

$$x^2 = a^2 - r^2 = a^2(1 - m^2), \quad x'^2 = a^2(1 - m'^2),$$

ces équations deviennent

$$pm^2(4 - 5m^2) + m'^2(4 - 5m'^2) = 0,$$
$$pm^2(21m'^4 - 28m^2 + 8) + m'^2(21m'^4 - 28m'^2 + 8) = 0.$$

Retranchant deux fois la première de la seconde, on peut remplacer la dernière par l'équation plus simple

$$pm^4(7m^2 - 6) + m'^4(7m'^2 - 6) = 0.$$

On en déduit

$$p = -\frac{m'^2}{m^2} \cdot \frac{4 - 5m'^2}{4 - 5m^2} = -\frac{m'^4}{m^4} \cdot \frac{7m'^2 - 6}{7m^2 - 6},$$

$$\frac{m^2(7m^2 - 6)}{4 - 5m^2} = \frac{m'^2(7m'^2 - 6)}{4 - 5m'^2} = \frac{6 - 7(m^2 + m'^2)}{5};$$

$$m'^2 = \frac{4}{7} \cdot \frac{7m^2 - 6}{5m^2 - 4}, \quad p = \frac{32}{49} \cdot \frac{7m^2 - 6}{m^2(5m^2 - 4)^3}.$$

On remarquera que m et m' sont les sinus des angles α et α' sous lesquels on voit du centre les deux rayons r et r'; leurs carrés doivent donc être compris entre zéro et l'unité.

Pour que la valeur de p soit positive, avec ces conditions, il faut que l'on ait $7m^2 - 6 > 0$ ou $7m'^2 - 4 < 0$.

578. Bobine à trois cercles. — Un cas particulier remarquable est celui où $7m'^2 = 4 = 7\sin^2\alpha'$, d'où $m = 1$ et $p = \frac{32}{49}$; les deux cercles de rayon r forment alors une seule bobine de rayon a, dont le nombre N des spires est un multiple q de 64, si chacun des petits cercles a $N' = 49q$ spires, soit en tout $N + 2N' = 162q$ spires.

Le rayon de ces petits cercles étant $a\sin\alpha'$, le champ magnétique au centre est alors

$$G_0 = \frac{2\pi}{a}(N + 2N'\sin\alpha') = \frac{2\pi}{a}\,120q = \frac{20}{27} \cdot \frac{2\pi}{a}(N + 2N').$$

D'autre part, dans une bobine sphérique contenant n spires par unité de longueur, le champ intérieur est uniforme et égal à $\frac{8}{3}\pi n = \frac{2\pi}{a}\frac{4na}{3}$ (357). Cet enroulement sphérique serait difficile à réaliser, tandis que les dispositions précédentes en fournissent à peu près l'équivalent.

Le nombre des spires sur la sphère étant $2na$, si l'on veut que le champ magnétique au centre soit le même que celui d'une bobine à trois cercles, il faut qu'on ait

$$\frac{4na}{3} = 120q, \qquad 2na = 180q = \frac{10}{9}(N + 2N').$$

Pour la sphère, si on pose $r = a\cos\theta$, ou $x = a\sin\theta$, le nombre des spires dans l'intervalle dx est $ndx = na\cos\theta\, d\theta$ et la longueur des spires correspondantes $2\pi rndx = 2\pi na^2\cos^2\theta\, d\theta$. La longueur totale du fil est donc

$$L = 2\pi na^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta = n\pi^2 a^2 = 2\pi a.q.45\pi = 2\pi aq.141,4.$$

Pour la bobine à trois cercles, la longueur totale L′ de l'ensemble des spires serait

$$L' = 2\pi a(N + 2N'\sin\alpha') = 2\pi aq\left(64 + \frac{196}{\sqrt{7}}\right) = 2\pi aq.138.$$

L'égalité des champs au centre exigerait donc sur la sphère un plus grand nombre de spires et un fil plus long que dans la bobine à trois cercles.

579. **Bobines annulaires.** — Dans une bobine *annulaire* (356) contenant N spires, le flux de force qui traverse un élément dS de la section, situé sur une circonférence de longueur l, pour l'unité de courant, est égal à $4\pi N\frac{dS}{l}$. La valeur moyenne du champ sur une surface S est donc

$$F_m = \frac{4\pi N}{S}\int\frac{dS}{l}.$$

Si la surface S est un cercle de rayon a dont le centre soit situé à une distance R de l'axe de la bobine, on a

$$\int \frac{dS}{l} = R - \sqrt{R^2 - a^2} = R\left[1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}\right],$$

$$F_m = \frac{4N}{a^2} R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}\right) = \frac{2N}{R}\left[1 + \frac{1}{4}\frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{8}\frac{a^4}{R^4} + \cdots\right].$$

Si la section est une ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$, l'un perpendiculaire et l'autre parallèle à l'axe de l'anneau, le champ moyen est le même que pour une section circulaire de rayon a, car la première intégrale a pour expression

$$\int \frac{dS}{l} = \frac{b}{a}(R - \sqrt{R^2 - a^2}).$$

Pour un anneau à section rectangulaire, de côtés $2a$ et $2b$, on aurait encore

$$F_m = \frac{N}{a} \mathcal{L}. \frac{R + a}{R - a} = \frac{2N}{R}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{5}\frac{a^4}{R^4} + \cdots\right].$$

Cette valeur moyenne du champ est aussi indépendante de la dimension b; il en serait de même pour toute section symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe.

CHAPITRE TROISIÈME

COEFFICIENTS D'INDUCTION

580. Courants parallèles. — Dans un grand nombre de cas, les courants parcourent des conducteurs à section constante qui suivent des directions parallèles, soit rectilignes, soit suivant des courbes dont le rayon de courbure est très grand par rapport au diamètre de la section. On peut alors assimiler leurs différentes parties à des systèmes rectilignes et examiner le cas de n conducteurs cylindriques de sections $S_1, S_2, \ldots S_n$, parcourus par des courants $I_1, I_2, \ldots I_n$, les uns dans un sens et formant une somme I, les autres en sens contraire et formant une somme égale $-I$. Les deux groupes de conducteurs sont reliés à leurs extrémités, pour fermer le circuit, mais on supposera ces jonctions assez éloignées pour qu'elles ne modifient pas le champ dans la région considérée.

Quand il s'agit de courants superficiels, leur distribution est la même que celle de l'électricité dans le problème correspondant d'électrostatique (**410**).

Considérons, par exemple, deux cylindres à sections circulaires de rayon ρ et ρ', dont l'un sert pour l'aller et l'autre pour le retour du courant.

Dans le problème correspondant (**120**) de deux lignes électrisées parallèles, à la distance $2a$, dont la charge par unité de longueur est $\pm\lambda$, le potentiel sur la surface d'un cylindre défini par le rapport k^2 est

$$V = 2\lambda \mathcal{L}. \frac{r'}{r} = 2\lambda \mathcal{L}. k^2.$$

Les deux cylindres étant supposés extérieurs l'un à l'autre,

le potentiel est positif sur l'un d'eux et négatif sur l'autre ; la différence de ces potentiels est donc $2\lambda\mathcal{L}.k^2k'^2$, et le coefficient de self-induction l, pour l'unité de longueur, est

$$(1) \qquad l = 2\mathcal{L}.k^2k'^2 = 2\mathcal{L}.\frac{\left(a+\sqrt{a^2+\rho^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2+\rho'^2}\right)}{\rho\rho'}.$$

Les distances des axes au milieu de la longueur $2a$ (**121**) étant $\sqrt{a^2+\rho^2}$ et $\sqrt{a^2+\rho'^2}$, la distance D de ces axes est

$$D = \sqrt{a^2+\rho^2} + \sqrt{a^2+\rho'^2}.$$

On déduit de cette relation, comme au n° **122**,

$$2D\sqrt{a^2+\rho^2} = D^2+\rho^2-\rho'^2, \qquad 2D\sqrt{a^2+\rho^2} = D^2+\rho'^2-\rho^2,$$
$$4a^2D^2 = (D+\rho+\rho')(D+\rho-\rho')(D-\rho+\rho')(D-\rho-\rho').$$

La valeur du produit $2aD$ étant donnée par cette dernière expression, on trouve aisément que l'équation (1) peut s'écrire

$$(1)' \qquad l = 2\mathcal{L}.\frac{D^2-\rho^2-\rho'^2+2aD}{2\rho\rho'}.$$

Lorsque les rayons ρ et ρ' sont égaux, il reste

$$(1)'' \qquad l = 2\mathcal{L}.\frac{D^2-2\rho^2+D\sqrt{D^2-4\rho^2}}{2\rho^2}.$$

Si les rayons ρ et ρ' sont assez petits pour que les carrés de leurs rapports à la distance D soient négligeables devant l'unité, on a simplement

$$(2) \qquad l = 2\mathcal{L}.\frac{D^2}{\rho\rho'}.$$

Lorsque les courants sont homogènes, on peut encore, au moins comme première approximation, appliquer les considérations simples appliquées précédemment (**402** à **411**). Le flux de force moyen émis par un conducteur à section circulaire dans son propre circuit, pour l'unité de courant et

l'unité de longueur, est égal à 0,5. Dans la surface intermédiaire, comptée jusqu'à l'axe du second conducteur, le flux de force est (**316**)

$$2\int_{\rho}^{D-\rho}\frac{dr}{r} = 2\mathcal{L}.\frac{D-\rho}{\rho}.$$

Le même calcul étant appliqué au second conducteur, dont le flux de force est de même sens dans la région considérée, on aura ainsi

$$(3) \qquad l = 1 + 2\mathcal{L}.\frac{(D-\rho)(D-\rho')}{\rho\rho'}.$$

En négligeant les rapports des rayons à la distance δ, on retrouve la formule (2) augmentée de l'unité, conformément à la règle déjà utilisée.

581. Moyennes distances géométriques. — Cette manière de traiter le problème est insuffisante, surtout quand les milieux sont magnétiques. Maxwell a recours aux propriétés générales du champ électromagnétique et le calcul renferme alors des grandeurs particulières qu'il importe de définir.

Supposons qu'un conducteur cylindrique de section S soit parcouru par un courant uniforme I de densité σ.

L'action produite par le filet σdS sur l'unité de courant parallèle qui coupe la section au point P, à la distance r, est dirigée suivant la droite r et égale à $-2\sigma\frac{dS}{r}$. Cette action a pour potentiel, à une constante près, $2\sigma dS\mathcal{L}.r$ et le potentiel relatif au courant total est

$$V = 2\sigma\int dS\mathcal{L}.r,$$

expression qu'on peut écrire, en posant $S\mathcal{L}.R_p = \int dS\mathcal{L}.r$,

$$(4) \qquad V = 2\sigma S\mathcal{L}.R_p = 2I\mathcal{L}.R_p.$$

La grandeur R_p ainsi définie est la *moyenne distance géométrique* du point P à la surface S.

De même, si S_1 et S_2 sont les sections de deux conducteurs cylindriques parallèles parcourus par les courants

uniformes I_1 et I_2 de densités σ_1 et σ_2, l'action du filet $\sigma_1 dS_1$ sur le filet $\sigma_2 dS_2$ situé à la distance r est $-2\sigma_1\sigma_2 \frac{dS_1\, dS_2}{r}$ et son potentiel $2\sigma_1\sigma_2 dS_1 dS_2 \mathcal{L}.r$. Le potentiel relatif à l'action réciproque des deux conducteurs est l'intégrale de cette expression, ou, en posant

$$S_1 S_2 \mathcal{L}.R_{1.2} = \iint dS_1\, dS_2 \mathcal{L}.r,$$

$$(5) \qquad V = 2\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \mathcal{L}.R_{1.2} = 2 I_1 I_2 \mathcal{L}.R_{1.2}.$$

La quantité $R_{1.2}$ est la moyenne distance géométrique des surfaces S_1 et S_2 situées dans le même plan.

Enfin, si les éléments dS_1 et dS_2 appartiennent à la même surface S et qu'on écrive

$$S^2 \mathcal{L}.R = \iint dS_1\, dS_2 \mathcal{L}.r,$$

la quantité R représente la moyenne distance géométrique de tous les points de la surface S.

Si $R_{a.c}$ et $R_{b.c}$ sont les moyennes distances géométriques de deux figures A et B à une troisième C et $R_{(a+b).c}$ la moyenne distance géométrique de la somme des figures A et B à la troisième, il résulte de la définition même que l'on a

$$(A+B)\mathcal{L}.R_{(a+b).c} = A\mathcal{L}.R_{a.c} + B\mathcal{L}.R_{b.c}.$$

Cette relation permet de déterminer la moyenne distance géométrique d'une figure à une autre quand on connaît les valeurs relatives aux différentes parties de la première.

Nous donnerons quelques exemples de ce problème:

1° Soit x la perpendiculaire abaissée du point P sur la direction d'une *droite* de longueur a, s la distance d'un élément ds de la droite au pied de la perpendiculaire et s_0 celle de l'extrémité la plus voisine. La moyenne distance géométrique du point à la droite est

$$a\mathcal{L}.R_p = \int ds\, \mathcal{L}.r = \int ds\, \mathcal{L}.\sqrt{x^2+s^2},$$

$$a\mathcal{L}.R_p = \left[s\mathcal{L}.\sqrt{x^2+s^2} - s + x \operatorname{arc\,tg}\frac{s}{x} \right]_{s_0}^{s_0+a}.$$

Lorsque la valeur de s_0 est nulle, il reste

$$\mathcal{L}.\mathrm{R}_p = \mathcal{L}.\sqrt{a^2+x^2} - 1 + \frac{x}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}.$$

2° En multipliant cette expression par $a\,dx$, on aura la moyenne distance géométrique du point au rectangle $a\,dx$ et une intégration donnera la valeur relative à un *rectangle* de dimensions finies. On a ainsi, pour le sommet P d'un rectangle dont les côtés sont a et b,

$$2\mathcal{L}.\mathrm{R}_p + 3 = 2\mathcal{L}.\sqrt{a^2+b^2} + \frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \frac{b}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}.$$

Si le point considéré occupe une position quelconque, on décomposera la surface en quatre rectangles ayant un sommet en ce point et on fera la somme ou la différence des termes, suivant que le point est à l'intérieur ou à l'extérieur.

3° Le champ produit par un courant uniforme, qui parcourt un cylindre dont la section est une couronne circulaire, est nul à l'intérieur et en raison inverse de la distance à l'axe pour un point extérieur.

Il résulte alors de l'équation (4) que la moyenne distance d'un point à une *circonférence* est égale à la distance au centre, si le point est extérieur, constante et égale au rayon si le point est intérieur.

4° Pour une *couronne* limitée par les rayons a_1 et a, la moyenne distance d'un point extérieur est encore égale à la distance au centre.

Si le point est intérieur, la moyenne distance est constante et la même que pour le centre, ce qui donne

$$\pi(a^2-a_1^2)\mathcal{L}.\mathrm{R}_p = \int_{a_1}^{a} 2\pi r\,dr\,\mathcal{L}.r = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\mathcal{L}.r - \frac{r^2}{4}\right]_{a_1}^{a},$$

$$\mathcal{L}.\mathrm{R}_p = \frac{a^2\mathcal{L}.a - a_1^2\mathcal{L}.a_1}{a^2-a_1^2} - \frac{1}{2}.$$

5° La moyenne distance géométrique d'une couronne à une figure quelconque est égale à la moyenne distance du centre à la figure, si celle-ci est extérieure.

Si la figure est comprise dans la couronne, la moyenne distance géométrique est la même que celle du centre à la figure considérée.

6° Pour un point situé dans un *cercle* de rayon a, à la distance r du centre, la moyenne distance s'obtiendra en considérant le point comme extérieur au cercle de rayon r et intérieur à la couronne complémentaire; on a alors

$$\mathcal{L}.R_p = \mathcal{L}.a - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

ce qui donne, pour le centre, $R_0 = ae^{-\frac{1}{2}} = 0{,}60663\,a$.

7° La moyenne distance géométrique de *deux cercles* extérieurs l'un à l'autre, d'après l'équation (5), est égale à la distance de leurs centres, puisque l'action des courants correspondants est en raison inverse de cette distance.

8° La moyenne distance géométrique d'un point à une droite permet de déterminer la moyenne distance géométrique de tous les points d'une *droite* de longueur a, ce qui donne

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.a - \frac{3}{2}, \qquad \text{ou} \qquad R = ae^{-\frac{3}{2}} = 0{,}22312\,a.$$

9° On a, de même, pour un *rectangle* de côtés a et b,

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.\sqrt{a^2+b^2} - \frac{1}{6}\frac{a^2}{b^2}\mathcal{L}.\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\mathcal{L}.\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$$
$$+\frac{2}{3}\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \frac{2}{3}\frac{b}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b} - \frac{25}{12},$$

et, pour un carré de côté a,

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.a + \frac{1}{3}\mathcal{L}.2 + \frac{\pi}{3} - \frac{25}{12} = \mathcal{L}.a - 0{,}80508,$$
$$R = 0{,}44705\,a.$$

10° La moyenne distance géométrique de tous les points d'une *couronne* de rayons a et a_1 se déduira de la moyenne distance géométrique d'un point à la couronne, ce qui donne

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.a - \frac{a_1^2}{(a^2-a_1^2)^2}\mathcal{L}.\frac{a}{a_1} + \frac{1}{4}\frac{3a_1^2-a^2}{a^2-a_1^2}.$$

Il en résulte, pour un *cercle* de rayon a,

$$R = a e^{-\frac{1}{4}} = 0{,}7788\, a,$$

et, pour une *circonférence*, $R = a$.

582. Self-induction de conducteurs parallèles. — Quand il s'agit de conducteurs cylindriques parallèles, la force électromotrice en chaque point est, par raison de symétrie, parallèle à la direction commune, que nous prendrons pour axe des z. Dans ce cas, les composantes F et G du potentiel vecteur (**432**) sont nulles et toutes les propriétés dépendent de la composante H, qui est une fonction des coordonnées x et y.

L'énergie potentielle des courants (**435**) se réduit au terme qui renferme le produit Hw. La composante w du courant en chaque point étant égale à la densité σ, l'énergie W du milieu, entre deux plans perpendiculaires à la direction commune et séparés par l'unité de distance, se réduit à

$$W = \frac{1}{2}\iint H\sigma\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int H\sigma\, dS.$$

D'autre part, l'énergie intrinsèque du système par unité de longueur, pour le courant I, est $\frac{1}{2} l I^2$ (**374**); il en résulte

$$(6) \qquad l I^2 = \int H\sigma\, dS.$$

L'intégrale doit être prise dans toute l'étendue du plan des xy, mais les éléments ne diffèrent de zéro que pour les points où le courant existe, c'est-à-dire dans les sections mêmes des conducteurs.

Sur chacune d'elles S_1, la valeur de H se compose de plusieurs parties distinctes : l'une H_1 due au courant propre du conducteur, les autres, $H_{2.1}$, $H_{3.1}$,..... qui proviennent des courants extérieurs.

Nous supposerons que les courants sont homogènes, leur distribution primitive étant réglée par la condition d'équilibre, et qu'on a $I_1 = \sigma_1 S_1$, $I_2 = \sigma_2 S_2$, ...

Considérons d'abord les milieux non magnétiques.

Le champ produit par un élément de courant σdS, en un point P situé à la distance r, est $2\frac{\sigma dS}{r}$. Si ce point se trouve sur l'axe des x, le champ est de direction opposée à l'axe des y. D'après les équations (A) du n° **432**, la valeur dH du potentiel vecteur produit par ce courant est

$$Y = -2\frac{\sigma dS}{r} = \frac{d(dH)}{dr}$$

ou, à une constante près, qui disparaîtra finalement par la condition que la somme algébrique des courants soit nulle,

$$dH = -2\sigma dS \mathcal{L}.r.$$

Sur la section S_1, le potentiel vecteur produit par l'ensemble des autres éléments $\sigma dS'_1$ du même conducteur est

$$H_1 = -2\sigma_1 \int dS'_1 \mathcal{L}.r$$

et le terme correspondant de l'intégrale (6) devient, en désignant par R_1 la moyenne distance géométrique de la section considérée,

$$\int H_1 \sigma_1 dS_1 = -2\sigma_1^2 \int dS_1 dS'_1 \mathcal{L}.r = -2I_1^2 \mathcal{L}.R_1.$$

Au même point, la valeur de $H_{2.1}$ est l'intégrale des termes relatifs aux éléments $\sigma_2 dS_2$ du conducteur de section S_2, ce qui donne

$$H_{2.1} = -2\int \sigma_2 dS_2 \mathcal{L}.r = -2\sigma_2 \int dS_2 \mathcal{L}.r,$$

$$\int H_{2.1}\sigma_1 dS_1 = -2\sigma_1\sigma_2 \iint dS_1 dS_2 \mathcal{L}.r = -2I_1 I_2 \mathcal{L}.R_{1.2}.$$

Si l'on fait le même raisonnement pour les autres conducteurs, en remarquant qu'un terme tel que $I_1 I_2 \mathcal{L}.R_{1.2}$ paraît deux fois, pour S_1 et pour S_2, il reste finalement

$$(7) \qquad lI^2 = -2\Sigma I_1^2 \mathcal{L}.R_1 - 2\Sigma I_1 I_2 \mathcal{L}.R_{1.2}^2.$$

Les rapports des courants partiels au courant total étant déterminés par la loi d'Ohm, on en déduira la valeur de l.

Lorsque les sections sont circulaires, de rayons ρ_1, ρ_2, ..., la moyenne distance géométrique $R_{1.2}$ est simplement la distance $D_{1.2}$ des centres et $\mathfrak{L}.R_1 = \mathfrak{L}.\rho_1 - 0,25$; on a alors

$$(8) \qquad l I^2 = \Sigma \frac{I_1^2}{2} - 2\Sigma I_1^2 \mathfrak{L}.\rho_1 - 2\Sigma I_1 I_2 \mathfrak{L}.D_{1.2}.$$

S'il n'existe que deux conducteurs, auquel cas $I_1 = -I_2 = I$, la formule (8) se réduit à

$$(7) \qquad l = 2\mathfrak{L}.\frac{R_{1.2}^2}{R_1 R_2},$$

et pour des sections circulaires de rayons ρ et ρ', dont les centres sont à la distance D,

$$(8) \qquad l = 1 + 2\mathfrak{L}.\frac{D^2}{\rho\rho'}.$$

Cette expression ne diffère sensiblement de la formule approchée (3) que pour des conducteurs très voisins.

Si les sections sont de même diamètre et en contact, $D = \rho + \rho' = 2\rho$ et, par suite,

$$l = 1 + 2\mathfrak{L}.4 = 3,7726.$$

C'est la moindre valeur qui corresponde à un double fil, replié sur lui-même, comme ceux que l'on emploie pour construire des bobines de résistance dont on cherche à diminuer autant que possible l'induction propre.

Lorsque les fils, supposés en contact, sont couverts d'une matière isolante d'épaisseur z, le rayon du métal étant désigné comme précédemment par y, la distance des axes est $D = 2(y+z)$ et l'équation (8)' donne

$$l = 1 + 4\mathfrak{L}.\frac{2(y+z)}{y} = 3,7726 + 4\mathfrak{L}.\left(1 + \frac{z}{y}\right).$$

On diminuerait beaucoup l'induction propre d'un fil double,

même couvert d'isolant, par l'emploi de lamelles métalliques très minces appliquées l'un sur l'autre.

Quand les fils d'une bobine sont ainsi rapprochés au contact, chacun d'eux occupant la place d'un carré circonscrit dont le côté est $2(y+z)$, la moyenne distance géométrique R du carré est

$$\mathcal{L}.R' = \mathcal{L}.2(y+z) - 0,80508 = \mathcal{L}.(y+z) - 0,11194.$$

Toutes choses égales, l'excès du coefficient de self-induction produit par l'emploi d'un fil couvert à section circulaire, par rapport à un fil carré nu qui occuperait le même emplacement est, par unité de longueur,

$$2[\mathcal{L}.R' - \mathcal{L}.R] = 2\left[\mathcal{L}.\frac{y+z}{y} + \frac{1}{4} - 0,11194\right] = 2\left[\mathcal{L}.\frac{y+z}{y} + 0,13806\right].$$

583. Milieux magnétiques. — Supposons enfin que les conducteurs aient des perméabilités magnétiques $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots$ et soient placés dans un milieu de perméabilité μ_0. Les valeurs de $H_{2.1}, \ldots.$, relatives à l'action réciproque de deux conducteurs différents, doivent être multipliées par la perméabilité μ_0 du milieu dans lequel elle s'exerce.

Les sections étant supposées circulaires, le champ magnétique dans le conducteur S_1 à la distance r du centre est $2\pi\sigma_1 r$, l'induction $2\pi\mu_1\sigma_1 r$ et l'on a

$$H_1 = C - 2\pi\mu_1\sigma_1 \int_{\rho_1}^{r} r\,dr = C + \pi\mu_1\sigma_1(\rho_1^2 - r^2).$$

Le potentiel vecteur devant être continu, la constante C représente la valeur $-2\mu_0 I_1 \mathcal{L}.\rho_1$, qui correspond à la surface, dans le milieu extérieur, ce qui donne

$$H_1 = -2\mu_0 I_1 \mathcal{L}.\rho_1 + \mu_1 I_1\left(1 + \frac{r^2}{\rho_2^1}\right).$$

Il faut ensuite multiplier cette expression par $\sigma_1 dS_1$ et l'intégrer pour toute la surface S_1 ou, ce qui revient au même, multiplier par $\sigma_1 S_1 = I_1$ la valeur moyenne de H_1 relative à cette surface.

Comme la valeur moyenne de r^2 est $\frac{\rho_1^2}{2}$, il en résulte

$$\int H_1 \sigma_1 \, dS_1 = -2\mu_0 I_1^2 \mathcal{L}.\rho_1 - \frac{\mu_1 I_1^2}{2},$$

$$(9) \qquad lI^2 = \frac{\mu_1 I_1^2 + \mu_2 I_2^2}{2} - 2\mu_0 \Sigma I_1^2 \mathcal{L}.\rho_1 - 2\mu_0 \Sigma I_1 I_2 \mathcal{L}.D_{1.2}^2.$$

Pour deux conducteurs de perméabilités μ et μ', il reste

$$(9)' \qquad l = \frac{\mu + \mu'}{2} + 2\mu_0 \mathcal{L}.\frac{D^2}{\rho\rho'}.$$

Toutefois, cette expression de Maxwell ne paraît pas suffisante lorsque la perméabilité est très grande, comme pour le cas du fer, parce que les conducteurs s'aimantent par le passage du courant et qu'alors les lignes de force ne sont plus tangentes à leur contour en tous les points.

Si l'on fait $\mu' = \mu_0 = 1$, c'est-à-dire si l'un des conducteurs est seul magnétique, on aurait, d'après M. Potier [1],

$$l = \frac{1 + \mu}{2} + 2\mathcal{L}.\frac{D^2}{\rho\rho'} - 2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\mathcal{L}.\frac{D}{d},$$

expression dans laquelle d désigne la distance du centre O de la section du premier conducteur au point conjugué du centre O′ de la section du second par rapport à la circonférence de rayon ρ.

La correction que l'on devrait ainsi apporter à la formule $(9)'$ est très notable, car on a, en tenant compte de la relation de conjugaison

$$dD = \rho^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{D}{d} = \frac{D^2}{\rho^2},$$

$$l = \frac{1 + \mu}{2} + 2\mathcal{L}.\frac{\rho}{\rho'} + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}.\frac{D^2}{\rho^2}.$$

Dans le cas de rayons égaux, le dernier terme est 2μ fois moindre que le terme correspondant de $(9)'$.

[1] A. Potier, *Traduction franç.* de Maxwell, t. II, p. 372; 1889.

584. Induction mutuelle de deux cadres circulaires. — Nous supposerons que le milieu n'est pas magnétique et nous négligerons d'abord l'épaisseur des fils. D'une manière générale, si l'on considère deux circuits plans de surfaces S et S′ et que X_m soit la valeur moyenne de la composante normale à la surface S′ du champ produit par le circuit S, pour l'unité de courant, le coefficient d'induction mutuelle est

$$M = X_m S'.$$

Les formules établies dans le chapitre précédent pour le champ magnétique d'un courant circulaire (566) permettront ainsi de traiter le cas de cadres circulaires.

Considérons deux circuits circulaires et de même axe, de rayon a et a' et à la distance x.

D'après les équations (23) et la remarque du n° 573, on a

$$X_m = 2\pi\left[u_2 - \frac{a'^2}{2^2}\frac{u_4}{2} + \frac{a'^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{u_6}{3} - \ldots\ldots\right],$$

$$M = 2\pi S'\left[u_2 - \frac{a'^2}{2^2}\frac{u_4}{2} + \frac{a'^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{u_6}{3} - \ldots\ldots\right],$$

ou, en ne prenant que les termes en a'^4,

$$(10)\quad M = \frac{2SS'}{u^3}\left[1 - \frac{3}{2^3}\frac{4x^2 - a^2}{u^2}\cdot\frac{a'^2}{u^2} + \frac{3.5}{(2.4)^2}\frac{a^4 - 12a^2x^2 + 8x^4}{u^4}\cdot\frac{a'^4}{u^4}\right].$$

De même, les différentes valeurs obtenues pour les composantes du champ des bobines donneraient directement l'induction mutuelle entre ces bobines et un cadre circulaire.

585. Deux bobines de même axe. — Connaissant le flux de force $\pi y^2 X_m$ d'une bobine sur un cercle coaxial de rayon y, on en déduira l'induction mutuelle de deux bobines.

Si l'on distingue par un accent les données relatives à la seconde bobine, le flux total émané de la première et qui traverse les différentes spires de la seconde, s'obtiendra en multipliant l'expression précédente par $n'_1\, n'_2\, dx\, dy$ et intégrant ensuite entre $a' - c'$ et $a' + c'$ pour y, $x - b'$ et $x + b'$, la

valeur finale de x désignant la distance des centres des deux bobines. On aura ainsi

$$M = \pi n_1' n_2' \iint y^2 X_m \, dx \, dy.$$

Supposons, par exemple, que les dimensions des gorges et la distance x soient telles que l'on puisse négliger les quatrièmes puissances des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c'}{a'}$, $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{x}{a}$.

La valeur de X_m se déduira de l'équation (34) du n° **571** et les intégrations ne présentent aucune difficulté.

On trouve alors, en appelant N et N′ le nombre de spires des deux bobines, S et S′ les surfaces relatives aux rayons moyens, L et L′ les longueurs des fils, et posant

$$M_0 = 2\frac{NN'SS'}{a^3} = 2\pi^2 NN' \frac{a'^2}{a} = \pi \frac{N^2}{N'} \cdot \frac{L'^2}{L},$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M}{M_0} = {} & 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right) - \frac{b^2 + b'^2 + 3x^2}{2a^2} \\ & + \frac{3}{2.2^2}\frac{a'^2}{a^2}\left[1 + \frac{3.4}{2.3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right) - \frac{3.5}{2.3}\frac{b^2 + b'^2}{a^2}\right] \\ & + \frac{3^2 5}{3(2.4)^2}\frac{a'^4}{a^4}\left[1 + \frac{5.6}{2.3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right) - \frac{5.7}{2.3}\frac{b^2 + b'^2}{a^2}\right] \\ & + \frac{3^2 5^2 7}{4(2.4.6)^2}\frac{a'^6}{a^6}\left[1 + \frac{7.8}{2.3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right) - \frac{7.9}{2.3} \cdot \frac{b^2 + b'^2}{a^2}\right] + \ldots \end{aligned} \right.$$

La série est toujours convergente, puisque $a' < a$, et les premiers termes peuvent s'écrire, en posant

$$\alpha = \frac{a'^2}{a^2}, \quad \beta = \frac{b^2 + b'^2}{6a^2}, \quad \gamma = \frac{1}{3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right),$$

$$(11)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M}{M_0} = {} & 1 + \gamma - 3\beta - \frac{3x^2}{2a^2} \\ & + 0{,}37500\,\alpha[1 + 6\gamma - 15\beta] \\ & + 0{,}23437\,\alpha^2[1 + 15\gamma - 35\beta] \\ & + 0{,}17090\,\alpha^3[1 + 28\gamma - 63\beta] \\ & + 0{,}13458\,\alpha^4[1 + 45\gamma - 99\beta] \\ & + 0{,}11103\,\alpha^5[1 + 66\gamma - 143\beta] \\ & + 0{,}09451\,\alpha^6[1 + 91\gamma - 195\beta]. \end{aligned} \right.$$

Un calcul analogue appliqué aux expressions (35) ou (37) du n° 571 donnerait le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines coaxiales très éloignées ou celui de deux bobines concentriques.

On peut considérer le problème autrement.

Le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines simples C et C′ (fig. 147) extérieures l'une à l'autre est égal et de

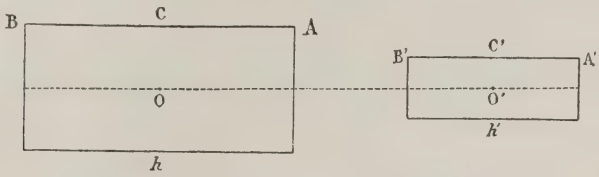


Fig. 147.

signe contraire (327) à l'énergie relative de deux groupes de couches magnétiques A et B, A′ et B′ dont les densités sont respectivement $+n$ et $-n$, $+n'$ et $-n'$.

Soient h et h' les longueurs des deux bobines, x la distance des bases voisines A et B′. Si on représente par $F(x)$ le potentiel moyen de la couche A, pour l'unité de densité, sur la sur-

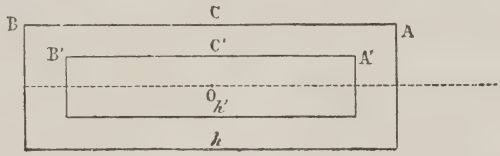


Fig. 148.

face B′, le potentiel moyen de la bobine C sur cette surface est $n[F(x) - F(x+h)]$, et l'énergie potentielle de la couche B′ par rapport à la bobine C est $-nn'S'[F(x) - F(x+h)]$.

Comme l''énergie potentielle de la couche A′ par rapport à la bobine C est aussi $+nn'S'[F(x+h') - F(x+h'+h)]$, il en résulte, pour l'induction mutuelle,

$$(12) \quad M = nn'S'[F(x) - F(x+h) - F(x+h') + F(x+h+h')].$$

Si les bobines sont concentriques (fig. 148), la seconde C ayant un plus petit rayon et une longueur moindre, nous

désignerons par x la demi-différence des longueurs ou la distance des bases voisines B et B′.

Le potentiel moyen de la bobine C sur la base B′ peut encore être exprimé par $-4\pi nx - nF(x) + nF(h-x)$, et l'énergie potentielle de la base B′ est $nn'S'[4\pi x + F(x) - F(h-x)]$. Celle de A′ étant de même $-nn'S'[4\pi(x+h') + F(x+h') - F(x)]$, il en résulte

$$(13) \quad M = nn'S'[4\pi h' + F(h-x) + F(h'+x) - 2F(x)].$$

Pour des bobines concentriques et de même longueur, on aurait $x = 0$, $h' = h$ et, avec $N' = n'h' = n'h$,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= 4\pi nN'S' - 2nn'S'[F(0) - F(h)] \\ &= 2nN'S'\left\{2\pi + \frac{1}{h}\left[F(h) - F(0)\right]\right\}. \end{aligned} \right.$$

La valeur de F (0) se déduirait de l'équation (19)′ du n° **565** par la règle habituelle, ce qui donne

$$F(0) = 2\pi a\left\{1 - \frac{1}{4}\frac{a'^2}{2a^2} - \cdots - \left[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 \frac{2n-1}{n+1}\left(\frac{a'}{a}\right)^{2n}\right\}.$$

La valeur de F (h) s'exprimera par l'équation (19)

$$F(x) = 2\pi\left[u - x - \frac{a'^2}{2^2}\frac{u_2}{2} + \frac{a'^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{u_4}{3} - \cdots\cdots\right].$$

Si l'on développe la quantité $u = \sqrt{a^2 + x^2}$ en fonction des puissances croissantes du rapport $\frac{a}{x}$ (**571**, 2°), et qu'on fasse ensuite $x = h$ après avoir effectué les calculs, il reste

$$\begin{aligned} F(h) = 2\pi a\frac{a}{h}\Bigg\{ & \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4}\frac{a^2}{h^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{a^4}{h^4} - \cdots \\ & - \frac{1}{2.2^2}\frac{a'^2}{h^2}\left[\frac{2}{2} - \frac{3.4}{2.4}\frac{a^2}{h^2} + \frac{3.5.6}{2.4.6}\cdot\frac{a^4}{h^4} - \cdots\right], \\ & + \frac{1}{3(2.4)^2}\frac{a'^4}{h^4}\left[\frac{2.3.4}{2} - \frac{3.4.5.6}{2.4}\cdot\frac{a^2}{h^2} + \cdots\right], \\ & - \frac{1}{4(2.4.6)^2}\frac{a'^6}{h^6}\left[\frac{2.3.4.5.6}{2} - \frac{3.4.5.6.7.8}{2.4}\frac{a^2}{h^2} + \cdots\right] + \cdots\Bigg\}. \end{aligned}$$

Lorsque les rapports $\frac{a}{h}$ et $\frac{a'^2}{a^2}$ sont de même ordre, la formule réduite aux premiers termes devient

$$(15) \qquad M = 4\pi n n' S' \left[1 - \frac{a}{h}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{a'^2}{a^2} - \frac{a}{2h}\right)\right].$$

586. Emploi des intégrales elliptiques. — Le potentiel d'un courant circulaire en dehors de l'axe est une fonction elliptique des coordonnées, puisqu'il est proportionnel à l'angle apparent de la surface ; toutes les expressions employées jusqu'à présent ne sont en réalité que le développement de ces fonctions elliptiques, auxquelles on doit avoir recours lorsque les séries ne sont pas assez convergentes.

Le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits quelconques s et s' a pour expression générale (**328**)

$$M = \iint \frac{ds\, ds' \cos\varepsilon}{r}.$$

Pour deux cadres circulaires de même axe à la distance x, dont les rayons sont a et a', si l'on désigne par φ et φ' les angles que les éléments ds et ds' font respectivement avec un plan fixe passant par l'axe, on a

$$r^2 = x^2 + a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\varphi - \varphi'),$$
$$\varepsilon = \varphi - \varphi', \qquad ds = a\,d\varphi, \qquad ds' = a'\,d\varphi'.$$

La formule de Neumann devient alors

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{aa'\cos(\varphi - \varphi')\,d\varphi\,d\varphi'}{\sqrt{a^2 + a'^2 + x^2 - 2aa'\cos(\varphi - \varphi')}}.$$

Cette intégrale est donnée par l'expression

$$(16) \qquad M = 4\pi\sqrt{aa'}\left[\left(k - \frac{2}{k}\right)F + \frac{2}{k}E\right],$$

dans laquelle F et E désignent des intégrales elliptiques com-

plètes, de première et de seconde espèce, au module k défini par la relation suivante :

$$k = \frac{2\sqrt{aa'}}{\sqrt{(a+a')^2 + x^2}}.$$

Les valeurs extrêmes r_1 et r_2 de la distance r étant

$$r_1^2 = (a+a')^2 + x^2, \qquad r_2^2 = (a-a')^2 + x^2,$$

on peut écrire, en posant

$$\cos\gamma = \frac{r_2}{r_1}, \qquad \text{ou} \qquad k = \sin\gamma,$$

$$M = 4\pi\sqrt{aa'}\left[\left(\sin\gamma - \frac{2}{\sin\gamma}\right)\mathrm{F} + \frac{2}{\sin\gamma}\mathrm{E}\right],$$

$$(16)' \qquad \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}} = \frac{1}{\sin\gamma}\left[2\mathrm{E} - (1+\cos^2\gamma)\mathrm{F}\right].$$

Si l'on considère le module $k_1 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}$, il en résulte $\cos\gamma = \frac{1-k_1}{1+k_1}$, ou $k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$; on a alors, pour les intégrales complètes,

$$\mathrm{F}(k) = (1+k_1)\mathrm{F}(k_1),$$

$$\mathrm{E}(k) = \frac{2}{1+k_1}\mathrm{E}(k_1) - (1-k_1)\mathrm{F}(k_1).$$

La substitution de ces valeurs conduit à une expression qui est quelquefois plus avantageuse :

$$M = 8\pi\sqrt{aa'}\,\frac{1}{\sqrt{k_1}}\left[\mathrm{E}(k_1) - \mathrm{F}(k_1)\right].$$

Les tables de Legendre permettent de déterminer les fonctions E et F par le module k ou l'angle γ correspondant. Le second membre de l'équation (16)′ est lui-même une simple fonction de l'angle γ : les tables suivantes, empruntées à la seconde édition du traité de Maxwell, donnent les logarithmes vulgaires de cette expression pour des valeurs de γ variant de 6′ en 6′, depuis 60° jusqu'à 90°.

Table des valeurs de $\log \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.

γ	$\text{Log}\,\frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.	γ	$\text{Log}\,\frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.	γ	$\text{Log}\,\frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.
60° 0′	$\bar{1}$.4994783	65° 0′	$\bar{1}$.6376629	70° 0′	$\bar{1}$.7758000
6	$\bar{1}$.5022651	6	$\bar{1}$.6404137	6	$\bar{1}$.7785903
12	$\bar{1}$.5050505	12	$\bar{1}$.6431645	12	$\bar{1}$.7813823
18	$\bar{1}$.5078345	18	$\bar{1}$.6459153	18	$\bar{1}$.7841762
24	$\bar{1}$.5106173	24	$\bar{1}$.6486660	24	$\bar{1}$.7869720
30	$\bar{1}$.5133989	30	$\bar{1}$.6514169	30	$\bar{1}$.7897696
36	$\bar{1}$.5161791	36	$\bar{1}$.6541678	36	$\bar{1}$.7925692
42	$\bar{1}$.5189582	42	$\bar{1}$.6569189	42	$\bar{1}$.7953709
48	$\bar{1}$.5217361	48	$\bar{1}$.6596701	48	$\bar{1}$.7981745
54	$\bar{1}$.5245128	54	$\bar{1}$.6624215	54	$\bar{1}$.8009803
61° 0′	$\bar{1}$.5272883	66° 0′	$\bar{1}$.6651732	71° 0′	$\bar{1}$.8037882
6	$\bar{1}$.5300628	6	$\bar{1}$.6679250	6	$\bar{1}$.8065983
12	$\bar{1}$.5328361	12	$\bar{1}$.6706772	12	$\bar{1}$.8094107
18	$\bar{1}$.5356084	18	$\bar{1}$.6734296	18	$\bar{1}$.8122253
24	$\bar{1}$.5383796	24	$\bar{1}$.6761824	24	$\bar{1}$.8150423
30	$\bar{1}$.5411498	30	$\bar{1}$.6789356	30	$\bar{1}$.8178617
36	$\bar{1}$.5439190	36	$\bar{1}$.6816891	36	$\bar{1}$.8206836
42	$\bar{1}$.5466872	42	$\bar{1}$.6844431	42	$\bar{1}$.8235080
48	$\bar{1}$.5494545	48	$\bar{1}$.6871976	48	$\bar{1}$.8263349
54	$\bar{1}$.5522209	54	$\bar{1}$.6899526	54	$\bar{1}$.8291645
62° 0′	$\bar{1}$.5549864	67° 0′	$\bar{1}$.6927081	72° 0′	$\bar{1}$.8319967
6	$\bar{1}$.5577510	6	$\bar{1}$.6954642	6	$\bar{1}$.8348316
12	$\bar{1}$.5605147	12	$\bar{1}$.6982209	12	$\bar{1}$.8376693
18	$\bar{1}$.5632776	18	$\bar{1}$.7009782	18	$\bar{1}$.8405099
24	$\bar{1}$.5660398	24	$\bar{1}$.7037362	24	$\bar{1}$.8433534
30	$\bar{1}$.5688011	30	$\bar{1}$.7064949	30	$\bar{1}$.8461998
36	$\bar{1}$.5715618	36	$\bar{1}$.7092544	36	$\bar{1}$.8490493
42	$\bar{1}$.5743217	42	$\bar{1}$.7120146	42	$\bar{1}$.8519018
48	$\bar{1}$.5770809	48	$\bar{1}$.7147756	48	$\bar{1}$.8547575
54	$\bar{1}$.5798394	54	$\bar{1}$.7175375	54	$\bar{1}$.8576164
63° 0′	$\bar{1}$.5825973	68° 0′	$\bar{1}$.7203003	73° 0′	$\bar{1}$.8604785
6	$\bar{1}$.5853546	6	$\bar{1}$.7230640	6	$\bar{1}$.8633440
12	$\bar{1}$.5881113	12	$\bar{1}$.7258286	12	$\bar{1}$.8662129
18	$\bar{1}$.5908675	18	$\bar{1}$.7285942	18	$\bar{1}$.8690852
24	$\bar{1}$.5936231	24	$\bar{1}$.7313609	24	$\bar{1}$.8719611
30	$\bar{1}$.5963782	30	$\bar{1}$.7341287	30	$\bar{1}$.8748406
36	$\bar{1}$.5991329	36	$\bar{1}$.7368975	36	$\bar{1}$.8777237
42	$\bar{1}$.6018871	42	$\bar{1}$.7396675	42	$\bar{1}$.8806106
48	$\bar{1}$.6046408	48	$\bar{1}$.7424387	48	$\bar{1}$.8835013
54	$\bar{1}$.6073942	54	$\bar{1}$.7452111	54	$\bar{1}$.8863958
64° 0′	$\bar{1}$.6101472	69° 0′	$\bar{1}$.7479848	74° 0′	$\bar{1}$.8892943
6	$\bar{1}$.6128998	6	$\bar{1}$.7507597	6	$\bar{1}$.8921969
12	$\bar{1}$.6156522	12	$\bar{1}$.7535361	12	$\bar{1}$.8951036
18	$\bar{1}$.6184042	18	$\bar{1}$.7563138	18	$\bar{1}$.8980144
24	$\bar{1}$.6211560	24	$\bar{1}$.7590929	24	$\bar{1}$.9009295
30	$\bar{1}$.6239076	30	$\bar{1}$.7618735	30	$\bar{1}$.9038489
36	$\bar{1}$.6266589	36	$\bar{1}$.7646556	36	$\bar{1}$.9067728
42	$\bar{1}$.6294101	42	$\bar{1}$.7674392	42	$\bar{1}$.9097012
48	$\bar{1}$.6321612	48	$\bar{1}$.7702245	48	$\bar{1}$.9126341
54	$\bar{1}$.6349121	54	$\bar{1}$.7730114	54	$\bar{1}$.9155717

Table des valeurs de $\log \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.

γ	$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.	γ	$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.	γ	$\log \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.
75° 0′	$\bar{1}$.9185141	80° 0′	0.0741816	85° 0′	0.2654152
6	$\bar{1}$.9214613	6	0.0775316	6	0.2700156
12	$\bar{1}$.9244135	12	0.0808944	12	0.2746655
18	$\bar{1}$.9273707	18	0.0842702	18	0.2793670
24	$\bar{1}$.9303330	24	0.0876592	24	0.2841221
30	$\bar{1}$.9333005	30	0.0910619	30	0.2889329
36	$\bar{1}$.9362733	36	0.0944784	36	0.2938018
42	$\bar{1}$.9392515	42	0.0979091	42	0.2987312
48	$\bar{1}$.9422352	48	0.1013542	48	0.3037238
54	$\bar{1}$.9452246	54	0.1048142	54	0.3087823
76° 0′	$\bar{1}$.9482196	81° 0′	0.1082893	86° 0′	0.3139097
6	$\bar{1}$.9512205	6	0.1117799	6	0.3191092
12	$\bar{1}$.9542272	12	0.1152863	12	0.3243843
18	$\bar{1}$.9572400	18	0.1188089	18	0.3297387
24	$\bar{1}$.9602590	24	0.1223481	24	0.3351762
30	$\bar{1}$.9632841	30	0.1259043	30	0.3407012
36	$\bar{1}$.9663157	36	0.1294778	36	0.3463184
42	$\bar{1}$.9693537	42	0.1330691	42	0.3520327
48	$\bar{1}$.9723983	48	0.1366786	48	0.3578495
54	$\bar{1}$.9754497	54	0.1403067	54	0.3637749
77° 0′	$\bar{1}$.9785079	82° 0′	0.1439539	87° 0′	0.3698153
6	$\bar{1}$.9815731	6	0.1476207	6	0.3759777
12	$\bar{1}$.9846454	12	0.1513075	12	0.3822700
18	$\bar{1}$.9877249	18	0.1550149	18	0.3887006
24	$\bar{1}$.9908118	24	0.1587434	24	0.3952792
30	$\bar{1}$.9939062	30	0.1624935	30	0.4020162
36	$\bar{1}$.9970082	36	0.1662658	36	0.4089234
42	0.0001181	42	0.1700609	42	0.4160138
48	0.0032359	48	0.1738794	48	0.4233022
54	0.0063618	54	0.1777219	54	0.4308053
78° 0′	0.0094959	83° 0′	0.1815890	88° 0′	0.4385420
6	0.0126385	6	0.1854815	6	0.4465341
12	0.0157896	12	0.1894001	12	0.4548064
18	0.0189494	18	0.1933455	18	0.4633880
24	0.0221181	24	0.1973184	24	0.4723127
30	0.0252959	30	0.2013197	30	0.4816206
36	0.0284830	36	0.2053502	36	0.4913595
42	0.0316794	42	0.2094108	42	0.5015870
48	0.0348855	48	0.2135026	48	0.5123738
54	0.0381014	54	0.2176259	54	0.5238079
79° 0′	0.0413273	84° 0′	0.2217823	89° 0′	0.5360007
6	0.0445633	6	0.2259728	6	0.5490969
12	0.0478098	12	0.2301983	12	0.5632886
18	0.0510668	18	0.2344600	18	0.5788406
24	0.0543347	24	0.2387591	24	0.5961320
30	0.0576136	30	0.2430970	30	0.6157370
36	0.0609037	36	0.2474748	36	0.6385907
42	0.0642054	42	0.2518940	42	0.6663883
48	0.0675187	48	0.2563561	48	0.7027765
54	0.0708441	54	0.2608626	54	0.7586941

On passera du cas de deux cercles à celui d'une bobine et d'un cercle, ou de deux bobines ayant même axe, par la méthode du n° 570. On aura alors, en appelant M_0 le coefficient relatif aux cercles de rayons moyens,

$$M = M_0 + \frac{1}{6}\left\{\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}(c^2 + c'^2) + \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}(b^2 + b'^2)\right\} + \ldots.$$

Si M_0 est exprimé par la formule (16), on trouve, en tenant compte des relations relatives aux intégrales complètes

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k}(E - F),$$

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2} = -\frac{\pi}{\sqrt{aa'}}\left\{\frac{E}{2\sqrt{aa'}(1-k^2)}\left[2\sqrt{aa'}\,k + \frac{4k^3x^2}{8\sqrt{aa'}(1-k^2)}(1-3k^2+2k^3)\right]\right.$$
$$\left. - F\left(k + \frac{k^3x^2}{4aa'}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} = \frac{\pi k}{\sqrt{aa'}(1-k^2)}\left\{F\left[2(1-k^2) - \frac{k^2x^2}{4aa'}(2-k^2)\right]\right.$$
$$\left. - E\left[2 - k^2 - k^2x^2\frac{1-k^2+k^4}{2aa'(1-k^2)}\right]\right\}.$$

Le calcul se fera plus simplement, au moyen des tables, par la méthode suivante de lord Rayleigh [1].

Si on désigne par $f(a, a', x)$ le coefficient d'induction mutuelle M_0 des deux cercles moyens, par N et N′ les nombres de spires des bobines, on a

$$(16)'' \quad M = \frac{1}{6}NN'\left\{\begin{array}{l} f(a+c, a', x) + f(a-c, a', x) \\ + f(a, a'+c', x) + f(a, a'-c', x \\ + f(a, a', x+b) + f(a, a', x-b) \\ + f(a, a', x+b') + f(a, a', x-b') \\ - 2f(a, a', x) \end{array}\right\}.$$

Il reste alors à calculer les neuf valeurs de γ qui correspondent aux neuf valeurs de la fonction f.

(1) MAXWELL, *Electricity and Magnetism.*, 2e édition, t. II, p. 320.

587. Deux cadres circulaires quelconques. — Considérons d'abord deux circonférences HK et H′K′ (fig. 149) ayant même axe, de rayons a et a', et parcourues par des courants parallèles égaux à l'unité. Prenant pour origine un point C de l'axe, menons deux sphères de rayon u et u' qui passent respectivement par les deux courants, et remplaçons ces courants par deux feuillets sphériques S et S′ ; soient α et α' les angles sous-tendus par les rayons a et a', V′ le potentiel du feuillet S′.

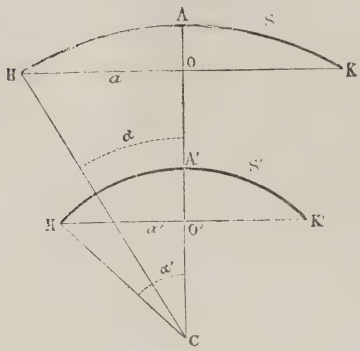


Fig. 149.

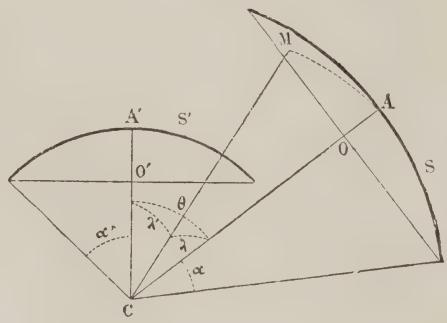


Fig. 150.

Dans un élément dS du feuillet S, le second feuillet S′ émet un flux de force $-\frac{\partial V'}{\partial u}dS$ et le coefficient d'induction mutuelle des deux contours est l'intégrale de cette expression étendue à la surface S.

Représentant l'élément dS par $-u^2\,d\mu\,d\varphi$ (**567**) et prenant pour la variable μ les limites 1 et $\mu = \cos\alpha$, on a donc

$$M = u^2 \iint \frac{\partial V'}{\partial u} d\mu\, d\varphi = 2\pi u^2 \int_1^{\mu} \frac{\partial V'}{\partial u} d\mu = -2\pi u^2 \int_{\mu}^{1} \frac{\partial V'}{\partial u} d\mu.$$

La valeur de V′ sera donnée par la seconde des équations (23) du n° **568**, dans laquelle on remplacera u par u', α par α' et r par u ; on obtient ainsi

$$M = 4\pi^2 u' \sin^2\alpha' \left[\frac{u'}{u} X_1'(\alpha') \int_{\mu}^{1} X_1\, d\mu \cdots + \left(\frac{u'}{u}\right)^n X_n'(\alpha') \int_{\mu}^{1} X_n\, d\mu\right].$$

La limite μ des intégrations étant $\cos\alpha$, si on substitue aux intégrales leurs valeurs (565), il reste

$$(17)\quad M = 4\pi^2 u' \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \left[\frac{1}{2}\frac{u'}{u} X'_1(\alpha') X'_1(\alpha) \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{u'}{u}\right)^n X'_n(\alpha') X'_n(\alpha)\right].$$

Si l'origine C était située au centre O′ du petit cercle, on ferait $u' = a'$, $\sin\alpha' = 1$, $\sin\alpha = \frac{a}{u}$; en appelant S et S′ les surfaces πa^2 et $\pi a'^2$ des deux cercles, on a alors

$$(18)\quad M = \frac{2SS'}{u^3}\left[X'_1(\alpha) + \cdots + \frac{(-1)^n}{(n+1)} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\left(\frac{a'}{u}\right)^{2n} X'_{2n+1}(\alpha)\right].$$

C'est une expression dont la formule (10) donne le développement des premiers termes.

Supposons maintenant que les axes (fig. 150) des deux courants circulaires se coupent en C sous l'angle θ, et considérons au point M un élément dS du feuillet S.

Désignant par λ et λ' les angles du rayon vecteur CM avec les axes OA et OA′ des feuillets, et par φ l'angle du méridien MOA avec le plan des axes, on a encore

$$dS = u^2 \sin\lambda\, d\lambda\, d\varphi = -u^2\, d\mu\, d\varphi,$$

et le potentiel V′ du feuillet S′ au point M donne

$$V' = 2\pi \sin^2\alpha' \sum \frac{1}{n+1}\left(\frac{u'}{u}\right)^{n+1} X'_n(\alpha') X_n(\lambda'),$$

$$\frac{\partial V'}{\partial u} = -2\pi \frac{u'}{u^2} \sin^2\alpha' \sum \left(\frac{u'}{u}\right)^n X'_n(\alpha') X_n(\lambda').$$

Le coefficient d'induction mutuelle est alors

$$M = u^2 \iint \frac{\partial V'}{\partial u}\, d\mu\, d\varphi = -2\pi u' \sin^2\alpha' \sum \left(\frac{u'}{u}\right)^n X'_n(\alpha) \iint X_n(\lambda')\, d\mu\, d\varphi.$$

La double intégration doit être faite de 0 à 2π pour φ et de 0 à α pour λ; l'angle λ' satisfait d'ailleurs à l'équation

$$\cos\lambda' = \cos\lambda \cos\theta + \sin\lambda \sin\theta \cos\varphi.$$

On obtient ainsi, en utilisant pour l'intégration par rapport à φ la relation suivante établie par Legendre,

$$\int_0^{2\pi} X_n(\lambda')\,d\varphi = 2\pi X_n(\lambda) X_n(\theta),$$

$$M = -4\pi^2 u' \sin^2\alpha' \sum \left(\frac{u'}{u}\right)^n X'_n(\alpha') X_n(\theta) \int_1^{\mu} X_n(\lambda)\,d\mu,$$

$$(19)\quad M = 4\pi^2 u' \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sum \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{u'}{u}\right)^n X'_n(\alpha') X'_n(\alpha) X_n(\theta).$$

Comparant avec l'équation (17), on voit que le coefficient d'induction de deux courants circulaires, dont les axes se coupent sous l'angle θ, s'obtient par la valeur relative aux courants parallèles, en multipliant respectivement chacun des termes par le polynome $X_n(\theta)$ de même ordre que celui dont ce terme renferme déjà les dérivées.

588. Cadres circulaires voisins. — Lorsque deux cadres circulaires de même axe et de rayons très peu différents sont situés dans des plans voisins, on peut utiliser la relation établie précédemment (407) pour les cadres concentriques, à l'aide du théorème suivant de Maxwell :

Dans un cercle défini par sa distance x à un point fixe de l'axe et son rayon a, le flux de force φ émanant d'un système quelconque d'aimants ou de courants satisfait à la relation

$$(20)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a} = 0.$$

En effet, si V est le potentiel du système, le flux de force $d\varphi$ sur la surface d'une couronne de rayon r et de largeur dr a pour expression

$$d\varphi = -\int \frac{\partial V}{\partial x}\, r\,dr\,d\theta = -r\,dr \int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\theta,$$

l'intégrale relative à θ devant être étendue à la circonférence 2π. On a donc sur le contour

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = -a\int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\theta, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2} = -\int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\theta - a\int \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial a}\,d\theta.$$

Pour un accroissement dx de la distance, la variation correspondante est égale et de signe contraire au flux de force coupé par la surface latérale d'un cylindre de rayon a et de hauteur dx, ce qui donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = + a\, dx \int \frac{\partial V}{\partial a} d\theta.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \int \frac{\partial V}{\partial a} d\theta, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a \int \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial x} d\theta;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \int \frac{\partial V}{\partial x} d\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial a}.$$

On retrouve ainsi l'équation (20). Comme cette relation est générale, on peut l'appliquer au coefficient d'induction mutuelle d'un système quelconque de circuits par rapport à la circonférence de rayon a.

Pour deux cadres circulaires concentriques dont les rayons a et $a+c$ sont très grands par rapport à la distance c qui les sépare, on a trouvé

$$(21) \qquad M = 4\pi a \left[\mathcal{L}. \frac{8a}{c} - 2 \right].$$

Supposons maintenant que les plans des deux cercles soient éloignés d'une distance x très petite, leurs rayons étant a et $a+y$. Le flux de force émis par le second courant dans la surface limitée au contour du premier n'a plus la même valeur, mais on en aura une expression très approchée en remplaçant la plus courte distance c des deux courbes par sa nouvelle valeur $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On pourra donc représenter le coefficient M par une expression de la forme

$$(22) \qquad M = 4\pi \left[\mathrm{A}\mathcal{L}. \frac{8a}{r} + \mathrm{B} \right],$$

les coefficients A et B étant des fonctions de x et y, dont les valeurs approchées sont respectivement a et $-2a$, et qu'il s'agit maintenant de déterminer.

Remarquons d'abord que ces fonctions conservent les mêmes valeurs quand on change le signe de x; par suite, leurs développements en série sont de degré pair en x et on peut poser

$$A = a + A_1 y + A_2 \frac{y^2}{a} + A_2' \frac{x^2}{a} + A_3 \frac{y^3}{a^2} + A_3' \frac{yx^2}{a^2} + \cdots,$$

$$B = -2a + B_1 y + B_2 \frac{y^2}{a} + B_2' \frac{x^2}{a} + B_3 \frac{y^3}{a^2} + B_3' \frac{yx^2}{a^2} + \cdots.$$

D'autre part, le coefficient M ne change pas quand on permute les circuits, c'est-à-dire quand on remplace a par $a+y$ et y par $-y$, et cette fonction doit satisfaire à l'équation (20), qui devient

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{1}{a+y} \frac{\partial M}{dy} = 0.$$

Ces deux conditions fournissent le nombre d'équations nécessaires pour déterminer les coefficients; on trouve ainsi

$$A = a\left[1 + \frac{1}{2}\frac{y}{a} + \frac{y^2 + 3x^2}{16a^2} - \frac{y^3 + 3yx^2}{32a^3} + \cdots\right],$$

$$B = a\left[-2 - \frac{1}{2}\frac{y}{a} + \frac{3y^2 - x^2}{16a^2} - \frac{y^3 - 6yx^2}{48a^3} + \cdots\right].$$

Dans le cas de deux cercles égaux, $y = 0$ et il reste

$$(23) \quad M = 4\pi a\left[1 + \frac{3x^2}{16a^2} + \cdots\right] \mathcal{L}.\frac{8a}{x} - 4\pi a\left[2 + \frac{x^2}{16a^2} + \cdots\right].$$

589. **Self-induction d'une bobine.** — On est ainsi conduit à déterminer l'induction propre d'une bobine, à enroulement homogène, au moins tant que les dimensions de la gorge sont très petites par rapport au rayon moyen.

Considérons, dans la section méridienne de la gorge, la trace P d'une spire de rayon a. A part les termes de correction, le flux de force émis dans cette spire par les courants

relatifs à un élément $dx\,dy$ de la section, situé à la distance r du point P, est $4\pi a n_1 n_2 dx\,dy \left(\mathcal{L}.\frac{8a}{r} - 2\right)$.

Le flux total relatif à la spire considérée est l'intégrale de cette expression étendue à toute la section ω, c'est-à-dire

$$\varphi = 4\pi a n_1 n_2 \iint \left(\mathcal{L}.\frac{8a}{r} - 2\right) dx\,dy.$$

Pour l'ensemble des spires correspondant à l'élément de surface $dx'\,dy'$ au point P, le flux a pour valeur $\varphi n_1 n_2 dx'\,dy'$. Enfin le flux total relatif à la bobine entière, ou le coefficient de self-induction L, est l'intégrale de cette expression étendue à la section ω.

En supposant d'abord que la quantité a est une constante, égale au rayon moyen, on peut écrire

$$(24)\quad \begin{cases} L = 4\pi a n_1^2 n_2^2 \iiiint \left(\mathcal{L}.\frac{8a}{r} - 2\right) dx\,dy\,dx'\,dy' \\ \quad = 4\pi a n_1^2 n_2^2 \omega^2 (\mathcal{L}.8a - 2) - 4\pi a n_1^2 n_2^2 \iiiint \mathcal{L}.r\,dx\,dy\,dx'\,dy'. \end{cases}$$

Comme le produit $n_1 n_2 \omega$ représente le nombre total N des spires, il en résulte, en posant

$$\omega^2 \mathcal{L}.\mathrm{R} = \iiiint \mathcal{L}.r\,dx\,dy\,dx'\,dy' = \iint \mathcal{L}.r\,d\mathrm{S}\,d\mathrm{S}',$$

$$(25)\qquad L = 4\pi a \mathrm{N}^2 \left(\mathcal{L}.\frac{8a}{\mathrm{R}} - 2\right).$$

Le coefficient de self-induction de la bobine est donc égal au produit par N^2 du coefficient d'induction mutuelle de deux cadres circulaires concentriques, de rayon a et $a + \mathrm{R}$, ou de cadres égaux de rayon a, ayant même axe et situés à la distance R, laquelle est la moyenne distance géométrique de la section de gorge ω.

Si la gorge est rectangulaire, de dimensions $2b$ et $2c$, la

quantité entre parenthèses, que nous représenterons par λ, a pour valeur (581)

$$\lambda = \mathcal{L}.\frac{4a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{6}\left[\frac{c^2}{b^2}\mathcal{L}.\sqrt{1+\frac{b^2}{c^2}} + \frac{b^2}{c^2}\mathcal{L}.\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}}\right]$$

$$-\frac{2}{3}\left[\frac{c}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c} + \frac{b}{c}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{b}\right] + \frac{1}{12},$$

$$\lambda = \mathcal{L}.\frac{4a}{\sqrt{b^2+c^2}} - \lambda_1.$$

Le terme complémentaire λ_1 ne dépend que du rapport m des longueurs c et b; il ne change pas quand on permute ces deux dimensions et peut s'écrire

$$12\lambda_1 + 1 = 8\left(m\operatorname{arctg}\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\operatorname{arctg} m\right) - m^2\mathcal{L}.\left(1+\frac{1}{m^2}\right) - \frac{\mathcal{L}.(1+m^2)}{m^2}.$$

Il suffit de connaître les valeurs de λ_1 correspondant à des valeurs de m plus petites que l'unité; on abrégera beaucoup les calculs au moyen de la table suivante:

m	λ_1	m	λ_1
0	0,50000	0,50	0,79600
0,05	0,54899	0,55	0,80815
0,10	0,59243	0,60	0,81823
0,15	0,63102	0,65	0,82648
0,20	0,66520	0,70	0,83311
0,25	0,69532	0,75	0,83831
0,30	0,72172	0,80	0,84225
0,35	0,74469	0,85	0,84509
0,40	0,76454	0,90	0,84697
0,45	0,78155	0,95	0,84801
0,50	0,79600	1	0,84834

Si l'on prend comme point de départ la formule plus

approchée (22), le coefficient de self-induction de la bobine rectangulaire peut se mettre sous la forme

$$L = 4\pi a N^2 \left[\lambda + \frac{\mu}{a^2} + \cdots \right],$$

avec les valeurs suivantes pour le premier terme de correction :

$$\mu = \frac{3b^2 + c^2}{24} \mathcal{L}. \frac{4a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b^2}{4} \mu_1,$$

$$\mu_1 = \frac{23}{40} + \frac{221}{360} m^2 - \frac{m^4}{30} \mathcal{L}. \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} + \frac{1}{6m^2} \mathcal{L}. \sqrt{1 + m^2} - \frac{8}{15m} \operatorname{arctg} m.$$

La valeur de μ_1 ne dépend encore que du rapport m et pourra se déduire d'une table spéciale :

m	μ_1	m	μ_1
0	0,1250	0,50	0,3066
0,05	0,1269	0,55	0,3437
0,10	0,1325	0,60	0,3839
0,15	0,1418	0,65	0,4274
0,20	0,1548	0,70	0,4739
0,25	0,1714	0,75	0,5234
0,30	0,1916	0,80	0,5760
0,35	0,2152	0,85	0,6317
0,40	0,2423	0,90	0,6902
0,45	0,2728	0,95	0,7518
0,50	0,3066	1	0,8162

On aura finalement [1]

$$(24)' \quad L = 4\pi a N^2 \left[\left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{24a^2} \right) \mathcal{L}. \frac{4a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - \lambda_1 + \frac{b^2}{4a^2} \mu_1 \right].$$

590. Bobine de self-induction maximum. — On peut alors se proposer de résoudre le problème suivant : le fil étant donné, et la section de la gorge devant rester semblable à

[1] STEFAN, *Sitzb. der K. Ak. d. W.* Wien. Bd LXXXVIII, p. 1201, 1883.

elle-même, trouver les dimensions qui rendent le coefficient de self-induction maximum. La moyenne distance géométrique R varie comme les dimensions linéaires de la section de la gorge; si le nombre $n_1 n_2$ des spires par unité de surface ne change pas, le nombre total de spires N varie comme le carré de ces mêmes dimensions.

Comme on a supposé que la longueur totale du fil est constante, il en résulte

$$2\pi a N = C^{te}, \qquad N = k R^2;$$

$$\frac{dN}{N} = 2\frac{dR}{R} = -\frac{da}{a}.$$

Avec l'expression (22) la condition du maximum devient

$$2\mathcal{L}.\frac{8a}{R} = 7.$$

Pour une gorge à section circulaire de rayon c, on a

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.c - \frac{1}{4}, \quad \text{d'où} \quad a = 3{,}22\,c,$$

et, pour une section carrée de côté c,

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.c - 0{,}80508, \quad a = 1{,}85\,c.$$

591. Correction pour l'isolant. — On a supposé implicitement, dans ce qui précède, que les courants sont distribués uniformément dans toute la section de la gorge; mais, si le fil est entouré par une substance isolante, ce qui est le cas général, l'intégrale du second membre de la formule (24) doit être étendue seulement à la somme des sections des fils. La correction qui résulte de l'écartement des fils est évidemment proportionnelle à la longueur totale du fil, et peut être calculée pour l'unité de longueur.

Remarquons d'abord (582) que l'induction propre est plus grande pour le fil nu, de rayon y, que pour un fil carré circonscrit à la couche isolante, dont le côté est $2(y+z)$, la différence par unité de longueur étant $\left(\mathcal{L}.\frac{y+z}{y} + 0{,}13806\right)$.

En second lieu, l'action éprouvée par un fil, de la part de ceux qui l'entourent, est plus petite pour des fils cylindriques en contact que pour des fils carrés juxtaposés occupant le même volume; en réalité, il suffit de tenir compte des fils les plus voisins.

Considérons, par exemple, le fil qui occupe le centre d'un carré de neuf fils, l'action de tous les autres étant négligée comme insensible. Pour deux sections circulaires, la moyenne distance géométrique est celle des centres; pour deux carrés voisins parallèles, le rapport de la moyenne distance géométrique à celle des centres est 0,99401 ou 1,0011 suivant qu'ils se touchent par un côté ou un sommet. Pour quatre des fils considérés plus haut, la moyenne distance géométrique doit donc être divisée par 0,99401 et pour les quatre autres par 1,0011; pour les huit, pris ensemble, par la moyenne 0,9975 des deux facteurs, dont le logarithme népérien est —0,002463. Le produit de ce nombre par 8 étant 0,01971, la correction pour l'unité de longueur devient finalement

$$2\left[\mathcal{L}.\frac{y+z}{y}+0,13806-0,01971\right]=2\left[\mathcal{L}.\frac{y+z}{z}+0,11835\right].$$

Si M désigne le coefficient d'induction mutuelle de deux spires dont le rayon est égal au rayon moyen et la distance égale à la moyenne géométrique des distances de tous les points de la section, L la longueur total du fil et N le nombre des spires, le coefficient de self-induction sera finalement

$$(26)\qquad L=N^2M+2L\left[\mathcal{L}.\frac{y+z}{y}+0,11835\right].$$

592. Actions réciproques. — Lorsque deux circuits A et A′ parcourus par l'unité de courant éprouvent un déplacement relatif infiniment petit, le travail des actions électrodynamiques (327) est égal à la variation correspondante dM de leur coefficient d'induction mutuelle. L'un des circuits étant supposé fixe, si l'autre se déplace parallèlement à l'axe des x, et que X soit la composante suivant cet axe de l'action réci-

proque, supposée répulsive, on a, par la considération du travail correspondant,

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x}\,dx = X\,dx, \qquad X = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

De même, si C représente le moment du couple de l'action réciproque par rapport à un axe, le travail relatif à la rotation $d\theta$ de l'un des circuits autour de cet axe est

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \theta}\,d\theta = C\,d\theta, \qquad C = \frac{\partial M}{\partial \theta}.$$

Lorsque les deux circuits sont des bobines de révolution autour du même axe, que nous prendrons pour axe des x, l'action réciproque est parallèle à l'axe, par raison de symétrie; cette action étant nulle pour une position convenable des deux circuits (la position concentrique, par exemple, pour deux bobines cylindriques), et aussi nulle à une très grande distance, elle passe par une valeur maximum qui correspond à la condition $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$ ou $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0$.

593. Deux courants circulaires. — Pour deux courants circulaires de rayons a et a' de même axe et de même sens, situés à la distance x, la valeur de M peut être exprimée en général au moyen des fonctions elliptiques (**586**). En tenant compte des valeurs de $\frac{\partial F}{\partial k}$ et $\frac{\partial E}{\partial k}$, on trouve que l'action réciproque, considérée comme attractive, est

$$(27)\quad X = \frac{\pi k x}{\sqrt{a a'}}\left(2F - \frac{2-k^2}{1-k^2}E\right) = \frac{\pi x}{\sqrt{a a'}}\sin\gamma\left[2F - \left(1 + \frac{1}{\cos\gamma}\right)E\right].$$

Le second membre de cette équation se déterminerait encore par les tables de Legendre. Pour rendre les applications plus faciles, L. Rayleigh [1] a calculé la table suivante pour des valeurs de l'angle γ variant de 55° à 70°.

[1] L. Rayleigh, *Ph. Tr. L. R. S.*, t. CLXXV, Pt II, p. 425; 1885.

Table de Log. $\sin\gamma\,[2F-(1+\sec^2\gamma)E]$.

55° 0′	$\bar{1}$,9898899	60° 0′	0,1786408	65° 0′	0,4433405
6	9250674	6	1838431	6	4487720
12	9302440	12	1890478	12	4542107
18	9354198	18	1942546	18	4596565
24	9405945	24	1994636	24	4651097
30	9457677	30	2046748	30	4705707
36	9509400	36	2098887	36	4760395
42	9561123	42	2151058	42	4815165
48	9612837	48	2203260	48	4870015
54	9664536	54	2255491	54	4924944
56° 0′	9716227	61° 0′	2307753	66° 0′	4979956
6	9767918	6	2360045	6	5035052
12	9819605	12	2412367	12	5090234
18	9871288	18	2464720	18	5145504
24	9922966	24	2517106	24	5200861
30	9974637	30	2569525	30	5256304
36	0,0026304	36	2621981	36	5311838
42	0077970	42	2674478	42	5367469
48	0129635	48	2727014	48	5423195
54	0181298	54	2779585	54	5479017
57° 0′	0232962	62° 0′	2832194	67° 0′	5534935
6	0284628	6	2884843	6	5590948
12	0336297	12	2937533	12	5647060
18	0387966	18	2990263	18	5703278
24	0439638	24	3043035	24	5759599
30	0491317	30	3095854	30	5816022
36	0542999	36	3148717	36	5872550
42	0594684	42	3201621	42	5929188
48	0646364	48	3254571	48	5985936
54	0698062	54	3307575	54	6042795
58° 0′	0749769	63° 0′	3360628	68° 0′	6099767
6	0801480	6	3413729	6	6156851
12	0853198	12	3466879	12	6214051
18	0904926	18	3520081	18	6271370
24	0956665	24	3573335	24	6328810
30	1008414	30	3626642	30	6386371
36	1060175	36	3680004	36	6444054
42	1111950	42	3733422	42	6501859
48	1163737	48	3786896	48	6559791
54	1215535	54	3840425	54	6617852
59° 0′	1267346	64° 0′	3894014	69° 0′	6676045
6	1319170	6	3947666	6	6734371
12	1371009	12	4001380	12	6792833
18	1422865	18	4055155	18	6851433
24	1474739	24	4108993	24	6910170
30	1526636	30	4162893	30	6969043
36	1578552	36	4216858	36	7028058
42	1630486	42	4270894	42	7087220
48	1682439	48	4324998	48	7146529
54	1734412	54	4379166	54	7205985

Si l'on remplace les cercles par deux bobines et qu'on représente par $f(a, a', x)$ l'attraction relative aux cercles moyens,

l'attraction des bobines sera encore représentée par la formule (16)″ du n° **586**.

594. Emploi des séries. — Les calculs sont souvent plus rapides quand on a recours aux développements en série.

La valeur moyenne du champ produit, sur un cadre circulaire de surface S′, par un système de même axe, étant représentée par X_m, le coefficient d'induction mutuelle est $X_m S'$ et l'action réciproque

$$X = S' \frac{\partial X_m}{\partial x}.$$

Si le circuit A est une circonférence de rayon a, l'attraction exercée sur un circuit de rayon a' à la distance x est ainsi, avec $u^2 = a^2 + x^2$ (**584**),

$$(28) \qquad X = -2\pi S' \left[u_3 - \frac{a'^2}{2^2} \cdot \frac{u_5}{2} + \frac{a'^4}{(2.4)^2} \frac{u_7}{3} - \cdots \right].$$

L'équation (33) du n° **571**, qui convient surtout aux petites valeurs de la distance x, donne encore, en appelant S la surface πa^2,

$$(29) \qquad \begin{aligned} X = \frac{6SS'}{a^5} x \Big\{ 1 &- \frac{5}{2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{5.7}{2.4} \frac{x^4}{a^4} - \frac{5.7.9}{2.4.6} \frac{x^6}{a^6} + \cdots \\ &+ \frac{1}{2.2^2} \frac{a'^2}{a^2} \left(3.5 - \frac{5^2.7}{2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{5.7^2.9}{2.4} \frac{x^4}{a^4} - \cdots \right) \\ &+ \frac{1}{3(2.4)^2} \frac{a'^4}{a^4} \left(3.5^2.7 - \frac{5^2.7^2.9}{2} \frac{x^2}{a^2} + \cdots \right) + \cdots \Big\}. \end{aligned}$$

On obtient enfin par l'équation (35) du n° **571**, particulièrement applicable pour une grande distance,

$$(30) \qquad \begin{aligned} X = \frac{6SS'}{x^4} \Big\{ 1 &- \frac{5}{2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{5.7}{2.4} \frac{a^4}{x^4} - \cdots \\ &- \frac{1}{2.2^2} \cdot \frac{a'^2}{x^2} \left(4.5 - \frac{7}{2.4} 4.5.6 \frac{a^2}{x^2} + \cdots \right) \\ &+ \frac{1}{3(2.4)^2} \frac{a'^4}{x^4} \left(4.5.6.7 - \frac{9}{2.4} 4.5.6.7.8 \frac{a^2}{x^2} + \cdots \right) \\ &- \frac{1}{4(2.4.6)^2} \frac{a'^6}{x^6} \left(4.5.6.7.8.9 - \cdots \right) + \cdots \Big\}. \end{aligned}$$

A mesure que la distance x des deux cercles augmente, l'action est d'abord proportionnelle à cette distance; elle devient ensuite en raison inverse de la quatrième puissance, ce qu'on pouvait voir *a priori* par l'assimilation des courants et des feuillets magnétiques.

D'une manière plus générale, si le coefficient d'induction mutuelle de deux courants circulaires parallèles et de même axe est exprimé à l'aide des polynomes X_n, on a, en utilisant l'équation

$$(1-\mu^2)X_n'' - 2\mu X_n' + n(n+1)X_n = 0,$$

$$(31)\quad X = -\frac{2SS'}{u^4}\left[X_2' - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}X_{2n+2}'\left(\frac{a'}{u}\right)^{2n}\right].$$

Si le circuit A est une bobine à gorge rectangulaire de dimensions $2b$, $2c$ et de rayon moyen a, l'action moyenne sur le cercle A′ et l'action réciproque des deux systèmes se calculeront de même par les séries (34), (35) et (36) du chapitre précédent; mais il pourra être utile dans certains cas de pousser plus loin le développement par rapport aux puissances croissantes de x.

Ces expressions ne sont plus assez convergentes quand il s'agit de deux courants circulaires très voisins et de même ordre de grandeur; on peut employer alors la formule (22). On en déduit, avec les valeurs trouvées pour A et B,

$$(32)\quad X = 4\pi a x\left[\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{y}{2a}+\frac{y^2+3x^2}{16a^2}-\frac{y^3+3yx^2}{32a^3}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8a^2}\left(1-\frac{y}{2a}+\ldots\right)\mathcal{L}.\frac{r}{8a}+\frac{1}{8a^2}\left(1-\frac{2y}{a}+\ldots\right)\right],$$

et, lorsque les cercles sont égaux,

$$(32)'\quad X = \frac{4\pi a}{x}\left[\left(1+\frac{5x^2}{16a^2}+\ldots\right)+\left(\frac{3x^2}{8a^2}+\ldots\right)\mathcal{L}.\frac{x}{8a}\right].$$

595. Deux bobines. — Pour deux bobines à gorges rectangulaires, on pourra employer les fonctions elliptiques (**593**) ou les développements en série.

Si on remplace le circuit A′ par une bobine à gorge rectangulaire de dimensions a', $2b'$, $2c'$, n'_1, et n'_2, on multipliera l'une des expressions trouvées dans le paragraphe précédent par le produit $n'_1 n'_2 dx\,dy$, en effectuant ensuite la double intégration entre les limites ordinaires $a'-c'$ et $a'+c'$, $x-b'$ et $x+b'$.

Lorsque les rapports $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{c'}{a'}$ sont très petits, on peut calculer l'action moyenne X_m sur le cercle moyen de rayon a'_1, et on a sensiblement

$$X = N'\pi a'^2_1 \frac{\partial X_m}{\partial x}. \tag{33}$$

596. Cas particulier. — Quand on veut déterminer l'action d'un système de courants sur une bobine, il est quelquefois

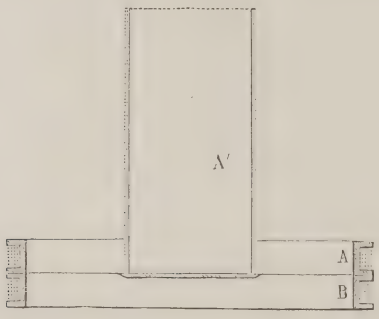


Fig. 151.

plus simple d'évaluer directement celles qui s'exercent sur les surfaces magnétiques équivalentes; nous considérerons un cas particulier comme exemple.

A et B (fig. 151) sont deux bobines égales, à gorges rectangulaires, de dimensions a, $2b$, $2c$ et N, les plans moyens étant à la distance $2x$. Une bobine longue A′ ayant N′ spires, une hauteur h', un diamètre moyen a' et une épaisseur $2c'$, est placée de manière que sa base inférieure soit dans le plan de symétrie des deux bobines A et B.

Le cercle moyen de cette base est

$$S' = \pi a'^2_1 = \pi a'^2 \left(1 + \frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right)$$

et la masse totale de la couche magnétique équivalente

$$S'\frac{N'}{h'}=\pi\frac{N'}{h'}a'^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right).$$

Le champ moyen de chacune des bobines A et B sur cette base S′ est déterminé par l'expression (34) du n° **571**, dans laquelle on remplacera y par le rayon a'_1 du cercle moyen ou simplement par a'. On peut écrire

$$X_m=\frac{2N\pi}{a}\varphi,$$

en posant

$$\begin{aligned}\varphi=1&+1.2\gamma-1.3\beta+1.3^2.5\delta\\&+\frac{3}{2.2^2}\alpha[1+3.4\gamma-3.5\beta+3.5^2.7\delta]\\&+\frac{3}{3(2.4)^2}\alpha^2[1+5.6\gamma-5.7\beta+5.7^2.9\delta]+\cdots\end{aligned}$$

L'action des deux bobines A et B sur la base inférieure de la bobine A′ est donc, en appelant L la longueur totale du fil de ces bobines, et L′ celle de la bobine A′,

$$\frac{4NN'\pi a'^2}{ah}\left(1+\frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right)\varphi=\pi\frac{N^2L'^2}{N'h'L}\left(1+\frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right)\varphi.$$

Pour calculer le champ moyen X'_m des bobines A et B sur la base supérieure de la bobine A′, on supposera ces deux bobines situées dans leur plan moyen, et on utilisera l'équation (35) du n° **571**; la valeur correspondante φ' de la quantité analogue à φ est alors, en négligeant les termes très petits,

$$\varphi'=\frac{a^3}{h'^3}\left[1-\frac{3}{2}\frac{a^2+a'^2}{h'^2}+\frac{3.5}{2.4}\frac{a^4+3a^2a'^2+a'^4}{h'^4}\right],$$

et l'action totale devient

$$X=\pi\frac{N^2L'^2}{N'hL}\left(1+\frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right)(\varphi-\varphi'). \tag{34}$$

597. Système de trois bobines symétriques. — Considérons encore deux bobines égales A et B, ayant chacune N spires,

dont les plans moyens sont à la distance $2x$, mais supposons que les courants y circulent en sens contraires et qu'une troisième bobine A′ de même axe, ayant N′ spires, soit symétriquement placée entre elles. Dans ce cas, les actions exercées par les bobines A et B sur la troisième sont de même sens et parallèles à l'axe. Il est évident que l'action résultante passe par un maximum ou un minimum lorsque la symétrie est complète, mais on peut choisir la distance $2x$ de manière que le déplacement de la bobine intermédiaire n'ait pas d'influence appréciable.

Désignant par X_0 l'action de A ou B sur A′ à la distance x, l'action totale X, quand la bobine intermédiaire s'est déplacée de δx par rapport au plan de symétrie, est

$$X = 2\left[X_0 + \frac{(\delta x)^2}{1.2}\frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2} + \frac{(\delta x)^4}{1.2.3.4}\frac{\partial^4 X_0}{\partial x^4} + \cdots\right].$$

Lorsque la valeur de x est telle que le second terme de la parenthèse soit nul, la variation de X n'est que du quatrième ordre en fonction du déplacement δx.

Si M est l'induction mutuelle de A sur A′, cette valeur de x correspond à la condition

$$\frac{\partial^3 M}{\partial x^3} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} = 0.$$

Réduisant d'abord les bobines A, B et A′ aux circonférences moyennes de rayons a et a', la valeur de X_0 est donnée par l'équation (28) et la condition de maximum pour X devient

$$u_5 - \frac{a'^2}{2.2^2}u_7 + \frac{a'^4}{3.(2.4)^2}u_9 - \cdots = 0.$$

Lorsque le rapport $\frac{a'}{a}$ des deux rayons est très petit, il en résulte sensiblement $u_5 = 0$ ou ou $4x^2 = 3a^2$.

Si les puissances de ce rapport supérieures au carré sont négligeables, on a $8u_5 = a'^2 u_7$, c'est-à-dire

$$4x^2 = 3a^2\left[1 - \frac{1}{8}\frac{a'^2}{a^2}\frac{35a^4 - 140a^2x^2 + 56x^4}{(a^2+x^2)^2}\right],$$

ou, en remplaçant x dans le second membre par sa valeur approchée,

$$4x^2 = 3a^2\left(1 + \frac{11}{7}\frac{a'^2}{a^2}\right).$$

Enfin, si les rayons a et a' diffèrent très peu l'un de l'autre, on pourra prendre l'expression (32), qui donne

$$3y^2 - x^2 = 0, \qquad x = (a - a')\sqrt{3}.$$

Quand les bobines ont des gorges rectangulaires de petites dimensions, ces différentes conditions, relatives aux rayons moyens, donnent encore une force sensiblement constante.

Cet ensemble de trois bobines dont l'intermédiaire est mobile suivant l'axe commun a été souvent employé comme électrodynamomètre. Les dimensions relatives ayant été ainsi déterminées, on pourrait encore calculer l'action réciproque par des développements en série, mais leur convergence n'est pas assez rapide et il est préférable d'avoir recours aux fonctions elliptiques (**593**).

598. Couple de rotation de deux cadres circulaires. — Si les axes de deux courants circulaires se rencontrent sous un angle θ (fig. 150), le moment du couple C, dû aux actions réciproques, qui tend à faire varier l'angle θ, c'est-à-dire à faire tourner l'un des courants autour d'une droite passant le point C et perpendiculaire au plan des axes, est

$$C = \frac{\partial M}{\partial \theta} = -4\pi n' \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sin\theta \Sigma \frac{1}{n(n+1)} X'_n(\alpha') X'_n(\alpha) X'_n(\theta) \left(\frac{u'}{u}\right)^n.$$

Si l'origine C est au centre O′ du cercle de rayon a', auquel cas $u' = a'$ et $\mu' = \cos\alpha' = 0$, il vient

$$C = -\frac{2SS'}{u^3}\sin\theta \Sigma \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} X'_{2n+1}(\alpha) X'_{2n+1}(\theta) \left(\frac{a'}{u}\right)^{2n}.$$

Lorsque les plans des cercles sont presque rectangulaires, on peut poser $\theta = 90^\circ - \delta$, l'angle δ étant très petit, et on a

$$(35) \qquad C = -\frac{2SS'}{u^3}(P - Q\delta^2)\cos\delta.$$

La valeur de P et les premiers termes de Q sont

$$P = 1 + \cdots + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{a'}{u}\right)^{2n}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 X'_{2n+1}(\alpha),$$

$$Q = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a'}{u}\right)^2 5X'_3(\alpha) + \frac{5}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a'}{u}\right)^4 14X'_5(\alpha).$$

Enfin, si les cercles sont concentriques, on a aussi $u = a$ et $\mu = \cos\alpha = 0$, ce qui donne

$$P = 1 - \frac{3^2}{2.2^3}\frac{a'^2}{a^2}\cdots + (-1)^n\frac{(2n+1)^2}{n+1}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^3\left(\frac{a'}{a}\right)^{2n},$$

$$Q = -5\frac{3^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 14\frac{5^2}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\left(\frac{a'}{a}\right)^4.$$

Une double intégration appliquée à chacun des cercles, dans l'expression du couple C, une fois développée, permettra de passer au cas de deux bobines à gorges rectangulaires.

Si les dimensions des gorges sont petites, on aura une première approximation en multipliant la valeur du couple calculée pour les rayons moyens a et a' par le produit NN′ des nombres de spires des deux bobines.

Le calcul précédent ne convient plus lorsque la rotation s'effectue autour d'une droite oblique au plan des axes ou qui ne passe plus par leur point de concours.

Considérons, par exemple, deux courants circulaires S et S′ de rayons a et a', ayant leurs axes situés dans un même plan et dont les plans rectangulaires entre eux sont tels que le plan du premier passe par le centre du second.

Désignant par X la composante, parallèle à l'intersection des deux plans, de l'action du courant S, donnée par l'équation (31), et dS' un élément de la surface S′, le couple autour de cette droite est $\int X dS'$, l'intégrale étant étendue à toute la surface S′.

Soit r la distance de deux centres; si les rapports $\frac{a'}{r}$ et $\frac{a^2}{r^2}$ sont de même ordre et qu'on néglige les termes d'ordre supé-

rieur au cube, on trouve, en utilisant la valeur de X donnée par l'équation (32),

$$C = -\frac{SS'}{r^3}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2\frac{a^4}{r^4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}\right)^2\frac{a^6}{r^6} + \frac{3}{2}\frac{a'^2}{r^2} - \frac{5}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^3\frac{a^2a'^2}{r^4}\right].$$

La valeur du terme principal est la moitié de celle qui correspond au cas où l'axe du courant S passe par le centre du courant S', ce qu'on savait déjà.

599. Bobine et aimant. — Si on remplace le courant S' par un aimant de longueur $2l$, faisant un angle δ avec le plan du courant, on trouve, par un raisonnement analogue à celui du n° **574**, que le couple produit par l'action du courant S sur l'aimant a pour expression, en négligeant les termes d'ordre supérieur à $\frac{l^2}{r^2}$,

$$D = \frac{\pi a^2}{r^2}\,2l\cos\delta\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2\frac{a^4}{r^4} + \cdots + 15\frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\delta\right)\right].$$

Lorsqu'on remplace le courant S par une bobine de N spires, avec une gorge rectangulaire de dimensions $2b$ et $2c$, on aura, de même, en intégrant la valeur de X donnée par l'équation (31) dans laquelle on donnera à θ une valeur très voisine de 90°, et négligeant les termes d'ordre supérieur au carré des dimensions de la gorge,

$$D = N\frac{\pi a^2}{r^3}\,2l\cos\delta\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2\frac{a^4}{r^4} + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{c^2}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{b^2}{r^2} + 15\frac{l^2}{r^2}\left(1 - \sin^2\delta\right)\right].$$

DEUXIÈME PARTIE. — MESURES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

ÉLECTROMÉTRIE

600. Caractère général des électromètres. — On appelle souvent *électroscope* un appareil qui sert à reconnaître si un corps est électrisé et de quelle espèce d'électricité. L'instrument devient un *électromètre* s'il permet de mesurer soit une quantité d'électricité, soit la différence de potentiel de deux conducteurs en équilibre ou de deux points quelconques de conducteurs non en équilibre statique.

Dans tout électromètre basé sur les actions électrostatiques, il existe au moins deux conducteurs dont l'action réciproque est répulsive s'ils ont des charges de même espèce ou s'ils sont de même potentiel, cette action étant attractive si les conducteurs sont électrisés en sens contraires. L'appareil peut être appelé *idiostatique* dans le premier cas, *hétérostatique* dans le second, mais dans plusieurs cas cette distinction est plutôt relative au mode d'emploi des instruments qu'au principe de leur construction.

Les conducteurs ainsi mis en présence sont susceptibles de prendre un mouvement relatif et l'action qui s'exerce entre eux est équilibrée par une réaction mécanique, telle que le poids même des organes quand ils sont déviés de leur position d'équilibre naturel, ou la tension d'un ressort, la torsion

d'un fil, le couple produit par un champ magnétique sur une aiguille aimantée, ou encore l'action directe d'un poids utilisé comme dans la balance.

On conçoit ainsi que la forme des électromètres peut varier à l'infini ; il suffira d'indiquer les principaux.

601. Électromètre à feuilles d'or. — L'électromètre le plus simple, comme aussi le plus ancien et le plus répandu, se compose d'un conducteur isolé auquel sont suspendus deux corps légers, tels qu'un double pendule à fils conducteurs (3) ou deux feuilles d'or.

La tige qui porte les feuilles d'or est habituellement montée dans la tubulure d'une cloche en verre, qui sert à la fois de support isolant et d'écran contre les courants d'air (fig. 152).

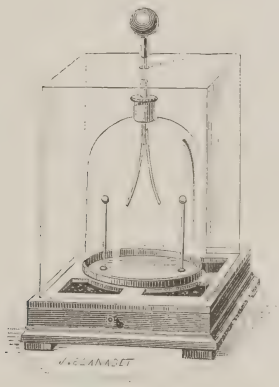


Fig. 152.

A l'intérieur se trouvent deux tiges métalliques reliées au sol, qui ont pour effet d'augmenter la divergence des feuilles et d'empêcher qu'à la suite d'un trop grand écart elles ne viennent au contact des parois.

Cette cloche est quelquefois entourée d'une seconde cage, percée d'un trou qui laisse passer librement la tige ; enfin des matières desséchantes, telles que la chaux vive ou la potasse caustique, placées dans un tiroir au fond de l'appareil, empêchent toute formation d'humidité sur les faces interne ou externe de la cloche, de manière à assurer l'isolement.

L'emploi d'une cage de verre peut présenter de graves

inconvénients, soit à cause des traces d'électricité qui se trouveraient accidentellement sur les parois, soit parce que l'appareil n'est pas protégé contre l'action de masses électriques extérieures.

Il vaut mieux se servir d'une cage conductrice d'assez grand diamètre pour que les feuilles d'or ne puissent la toucher; le conducteur est alors mastiqué dans la tubulure par un isolant convenable. M. Hurmuzescu [1] emploie, sous le nom de *diélectrine*, un mélange de soufre et de paraffine dont l'isolement est si parfait que l'appareil met plusieurs jours à perdre sa charge.

Supposons maintenant les feuilles électrisées; soit V leur potentiel et V_0 celui de la cage que l'on supposera reliée au sol. La charge des feuilles est proportionnelle au produit de leur capacité, variable en général avec l'angle d'écart, par la différence $V - V_0$ de potentiel.

La divergence des pailles, due à leur répulsion réciproque et à l'attraction de chacune d'elles par la cage, ne dépend que de la charge ou plus généralement du potentiel des corps avec lesquels on les met en relation; cette divergence pourra donc servir, après graduation, à mesurer l'une ou l'autre de ces deux quantités.

Si l'on veut seulement employer l'appareil comme électroscope, on commence par le charger d'une électricité connue. Pour cela, on en approche un bâton de verre électrisé par le drap, les feuilles divergent; on touche le bouton supérieur avec le doigt, elles retombent; on enlève le doigt, puis on écarte le corps électrisé; les feuilles divergent, chargées cette fois d'électricité contraire à celle du corps influent, c'est-à-dire négative.

Pour reconnaître si un corps est électrisé, on l'approche de l'électroscope. Lorsque la divergence des feuilles augmente, le corps est négatif. Si la divergence diminue d'abord, l'expérience n'est pas concluante, parce qu'un corps neutre produirait le même effet; on approche davantage le corps extérieur et l'on est sûr qu'il est positif, si les feuilles reviennent au contact pour diverger de nouveau.

[1] Hurmuzescu, *Séances de la Soc. fr. de Physique*, 23 janvier 1894.

602. **Graduation des électromètres.** — Dans certains *électromètres*, dits *absolus*, la forme et les dimensions des conducteurs en présence permettent de déterminer *a priori* la relation qui existe entre les indications de l'instrument et la charge électrique, ou la différence de potentiel des organes. Pour les autres, on fera une graduation empirique.

Considérons, par exemple, l'électromètre à feuilles d'or et supposons que la cage étant métallique soit reliée au sol, c'est-à-dire maintenue au potentiel zéro. Si le système formé par la tige et les feuilles a une capacité sensiblement indépendante de l'angle d'écart, le potentiel V est simplement proportionnel à la charge, qu'il est facile de faire varier dans un rapport connu.

De Saussure [1] se servait de deux électromètres identiques. L'un d'eux étant d'abord électrisé, on observe l'angle d'écart, puis on le met en communication par un conducteur de résistance négligeable avec le second appareil primitivement à l'état neutre. Le nouvel angle d'écart correspond à une charge moitié moindre ; l'appareil est ainsi gradué en tant que *mesureur de charges*.

On arriverait plus simplement au même résultat en mettant les feuilles d'or en communication avec un cylindre de Faraday (3), dans lequel on introduirait une succession de charges égales entre elles. Avec cette disposition, la capacité de l'ensemble des conducteurs n'est pas modifiée sensiblement par les variations de divergence des feuilles et l'expérience donne une graduation en fonction des potentiels.

Telle est aussi la méthode employée par Volta [2]. L'électromètre était mis en communication avec le bouton d'une bouteille de Leyde chargée d'un nombre variable d'étincelles par le plateau d'un électrophore. Les étincelles d'un électrophore décroissent rapidement dès le début, mais elles deviennent bientôt sensiblement égales. D'un autre côté, la bouteille de Leyde, à cause de sa grande capacité, peut être considérée comme prenant toujours au plateau la même fraction de sa charge, et, par suite, comme acquérant un potentiel proportionnel au nombre des étincelles. Volta reconnut ainsi

(1) De Saussure, *Voyage dans les Alpes*, t. II, p. 165-175. Neuchâtel, 1804.
(2) Volta, *Della meteorologia elettrica*, 2e lettre.

que, jusqu'à 20 ou 25 degrés, l'écart des pailles de son électromètre était proportionnel au nombre des étincelles.

Pour déterminer la *constante* de l'instrument, c'est-à-dire la valeur absolue du potentiel correspondant à un écart déterminé, Volta suspendait au fléau d'une balance un disque métallique qu'il maintenait à une distance constante d'un plan conducteur horizontal en communication avec le sol. Il évaluait en poids l'attraction exercée à cette distance fixe entre le disque électrisé et le plan, et observait d'autre part l'écart de l'électromètre mis en communication avec le disque et le bouton de la bouteille de Leyde. C'est le principe des électromètres-balance sur lesquels on reviendra plus loin.

Ces différentes méthodes ne sont qu'approximatives, surtout à cause des déperditions par l'air et par les supports. La graduation peut se faire aujourd'hui d'une manière beaucoup plus simple au moyen de couples électriques, des couples Daniell par exemple, bien isolés et disposés en série ; la différence de potentiel entre les deux pôles est proportionnelle au nombre des couples (**193**), et on détermine la force électromotrice de chaque couple par un électromètre absolu.

603. Balance de Coulomb. — La forme de la balance employée par Coulomb [1] pour évaluer à l'aide de la torsion d'un fil l'action qui s'exerce entre deux petites sphères électrisées, est assez connue pour qu'il suffise d'en rappeler les principaux organes (**547**).

Le fil porte une aiguille horizontale de gomme laque terminée à l'une de ses extrémités par une petite sphère conductrice; une autre boule de même diamètre, placée sur la circonférence que décrit la première, est portée par une tige isolante. Dans les appareils de Coulomb, le diamètre de ces boules ne dépassait pas 5 ou 6 millimètres et le rayon de la circonférence décrite par la boule mobile était d'un peu plus de 10 centimètres. Le fil, en argent, avait une longueur de 76 centimètres et une finesse telle qu'il suffisait d'une force de 0,15 milligrammes appliquée à l'extrémité de l'aiguille pour le tordre de 360°.

Le fil est fixé par sa partie supérieure à un tambour divisé, qui permet d'évaluer les torsions. Quant à la déviation de

[1] Coulomb, *Mém. de l'Acad. des sc.*, 1785, p. 569, etc.

l'aiguille, on peut la mesurer, soit au moyen d'une division collée sur la cage, soit plus exactement par la méthode du miroir (**521**).

Supposons la position du tambour telle que, pour la position d'équilibre de l'aiguille, le centre de la sphère mobile coïncide avec le centre de la sphère fixe. Quand la boule fixe est en place, les deux sphères sont appliquées l'une contre l'autre par la légère torsion qui résulte du déplacement de la boule mobile. Si on électrise le système, les deux sphères se partagent la charge électrique, elles se repoussent et, par une torsion convenable A du micromètre, on les ramène à une distance angulaire α, de sorte que la torsion du fil est $A+\alpha$ et le moment (**548**) du couple correspondant $C(A+\alpha)$.

Si l est la distance à l'axe du centre de la boule mobile, et f la répulsion qui s'exerce entre les deux boules, le moment de cette force par rapport à l'axe est égal à $fl\cos\frac{\alpha}{2}$. L'équation d'équilibre est donc

$$(1) \qquad fl\cos\frac{\alpha}{2} = C(A+\alpha).$$

En toute rigueur, la répulsion électrique f écarte le fil de la verticale, car si l'on applique sur l'axe deux forces opposées $\pm f'$, respectivement égales à f, le couple est produit par les deux forces f et $-f'$, l'autre force $+f'$ ne pouvant être équilibrée que par une déviation du fil, mais cette action ne modifie pas la torsion et elle est en général si faible qu'il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

On doit considérer ainsi la force f comme déterminée en fonction des dimensions de l'appareil, des angles observés et du coefficient de torsion C.

Soient q et q' les charges des deux boules, exprimées en unités électrostatiques, et $d = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ la distance des centres. Si l'électricité était distribuée uniformément sur chacune d'elles et qu'il n'existât aucune action étrangère, l'action réciproque serait la même que si les masses étaient respectivement concentrées en leurs centres, et on aurait $fd^2 = qq'$.

Lorsque les boules, étant de même rayon r, se trouvent en

contact au moment de l'électrisation, leurs charges ont la même valeur q, ce qui donne

$$(2) \qquad q^2 = fd^2 = 4Cl(A+\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\tang\frac{\alpha}{2}.$$

Quand les rayons sont inégaux, on peut avoir le rapport des charges q et q' à l'aide de tables calculées par Plana [1].

Si les boules étaient très éloignées, le potentiel V de chacune d'elles dépendrait uniquement de la charge qu'elle possède, mais cette hypothèse est en général insuffisante.

On obtient une première approximation en supposant que l'action extérieure de chaque masse est la même que si elle était concentrée en son centre.

On a ainsi (**115**), dans le cas de deux boules égales de rayons r, et dont la distance d est représentée par cr,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} q &= rV\frac{d}{d+r} = rV\frac{c}{c+1}, \\ f &= V^2\left(\frac{r}{d+r}\right)^2 = \frac{V^2}{(c+1)^2}, \\ f &= \frac{q^2}{d^2} = \frac{q^2}{r^2}\,\frac{1}{c^2}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules ne suffisent pas lorsque la distance minimum des boules ne dépasse pas beaucoup leur diamètre. Les tables de Lord Kelvin s'arrêtent à la valeur $c=4$ qui correspond à cette distance, mais on a vu (**115**) qu'il est facile de les remplacer alors par des expressions très approchées.

Pour employer la balance de Coulomb à la mesure du potentiel d'un corps extérieur, il est nécessaire de rendre conductrice la tige qui porte la boule fixe et l'aiguille de la boule mobile, ces deux conducteurs étant mis en communication par le tambour. Il est difficile d'annuler ou de compenser la part qui revient à ces conducteurs dans la répulsion totale.

604. Influence de la cage. — Lorsque la cage est en verre, aucune correction n'est possible parce qu'on ne connaît pas

[1] Plana, *Mém. de l'Acad. de Turin* [2], t. VII, p. 71, 1845. — *Voir* Mascart, *Traité d'électricité statique*, t. I, p. 282.

l'état électrique que prend sa surface pour un état donné des boules ; si, de plus, cette surface se trouve électrisée accidentellement en quelques points, il peut en résulter des erreurs très graves. Il est donc indispensable que la surface intérieure soit conductrice et maintenue en communication avec le sol. La charge de la cage est alors égale et de signe contraire à la somme algébrique $q+q'$ des charges des deux sphères, et son potentiel est nul.

La présence de l'électricité induite sur la cage conductrice peut modifier notablement l'action réciproque des sphères et, par suite, le calcul des charges en fonction de la force répulsive; mais elle change surtout la valeur des potentiels et cette influence est d'autant plus grande que la cage est plus étroite.

Le calcul de cette correction présenterait, en général, les plus grandes difficultés d'analyse. Pour donner une idée de son importance, nous considérerons le cas d'une cage sphérique; nous supposerons d'abord que, l'axe de suspension de l'aiguille étant excentrique, les deux boules sont situées au voisinage du centre. L'électricité induite forme alors une couche à peu près uniforme, à potentiel intérieur constant ; l'action réciproque des sphères s'exprimera donc, en fonction des charges, comme si la cage n'existait pas.

Il n'en est plus de même pour les potentiels. Si on continue d'appeler V le potentiel dû aux charges q et q' et qu'on désigne par U le potentiel réel, on a, pour un point voisin du centre, en appelant R le rayon de la cage,

$$U = V - \frac{q+q'}{R}.$$

Lorsque les charges sont égales, et qu'on prend la première approximation donnée par les équations (3), il vient, pour le potentiel de chaque boule,

$$U = V - 2\frac{r}{R}V\frac{d}{d+r} = V\left[1 - 2\frac{r}{R}\frac{d}{d+r}\right],$$

$$U = \frac{q}{r}\left(1 + \frac{r}{d} - \frac{2r}{R}\right).$$

Si l'on fait $r = 1^c$, $R = 20^c$, $d = 10\,r$, ce qui représente à peu

près les conditions d'une balance ordinaire, le terme de correction relatif à l'influence de la cage est de 0,1. On peut remarquer que le potentiel de chaque boule serait simplement $\frac{q}{r}$, si l'on avait $R = 2d$.

L'influence de la cage est beaucoup plus grande lorsque les boules sont rapprochées des parois. On doit en conclure que la balance de Coulomb permet, avec des précautions convenables, d'évaluer les charges électriques, mais cet instrument est mal approprié à la détermination des potentiels.

605. Électromètre absolu de Lord Kelvin. — Volta avait déjà employé la balance pour équilibrer par des poids l'attraction qui s'exerce entre deux plateaux conducteurs parallèles et Snow Harris a imaginé divers électromètres sur ce principe. Lord Kelvin a donné aux instruments toute la précision désirable en entourant le disque mobile d'un *plateau de garde* situé dans le même plan et relié au disque par un fil flexible, afin que la distribution de l'électricité soit sensiblement uniforme sur la surface a du disque qui subit l'attraction de l'autre plateau (**58**).

Si V_0 est le potentiel commun du disque et du plateau de garde, V le potentiel du second plateau et e la distance des surfaces, l'attraction P a pour expression

$$P = \frac{a}{8\pi}\left(\frac{V - V_0}{e}\right)^2. \tag{4}$$

En réalité la densité électrique n'est pas rigoureusement uniforme sur les bords du disque et il convient d'ajouter un terme correctif à la surface a. Il est évident que la surface équivalente est plus grande que a et moindre que l'aire a' de l'ouverture ménagée dans le plateau de garde. Si le sillon qui les sépare est très étroit, il suffira de prendre la moyenne des surfaces a et a' ou, dans le cas d'un disque circulaire, d'ajouter au rayon la moitié de la largeur du sillon [1].

Dans la forme définitive adoptée par Lord Kelvin pour l'*électromètre absolu* (fig. 153), le disque mobile est entouré par un anneau de garde B et l'intervalle qui les sépare

[1] Voir A. Potier, *Édit. franç. de* Maxwell, t. II, p. 563.

($0^c,05$ environ) est juste suffisant pour permettre le libre mouvement du disque sans craindre le contact des deux organes.

Le disque est suspendu à un système de trois ressorts porté par une tige en ébonite que l'on peut faire monter ou descendre à l'aide d'une vis micrométrique *c*. Pour éviter toute influence extérieure, le disque avec les ressorts est

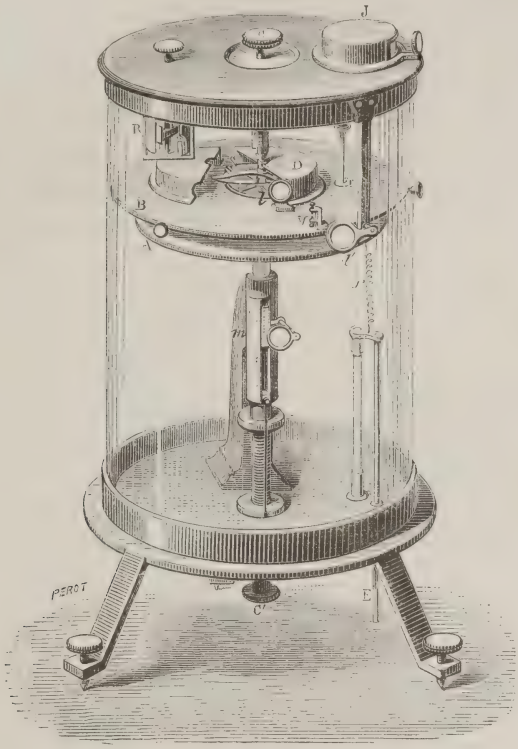


Fig. 153.

couvert par une boîte métallique D, munie d'une petite ouverture et montée sur l'anneau de garde.

Le second plateau A, également isolé, peut être mis en communication avec un corps extérieur par une tige latérale, ou électrode E, et une vis micrométrique C′ permet de l'élever ou de l'abaisser de manière à modifier la distance *e*.

Il faut d'abord s'assurer que le disque mobile est amené, pour chaque observation, dans le plan de l'anneau de garde.

A cet effet, la pièce d'attache du disque aux ressorts porte une espèce de réticule formé par un fil horizontal. La lentille l donne de ce fil une image réelle qui se forme entre deux pointes très fines V, qui comprennent l'image du fil lorsque le disque est réglé.

Il serait assez difficile d'évaluer exactement la distance e des plateaux, mais on règle l'expérience de manière à n'avoir à mesurer que des différences de distance par l'échelle et le vernier que commande le bouton à vis C'. Le potentiel V_0 étant supposé invariable, on porte successivement l'électrode E à deux potentiels différents V et V' et on déplace le plateau A de manière que le disque prenne chaque fois sa position normale. La tension des ressorts ayant une valeur constante P, si les distances correspondantes sont e et e', on a

$$(5) \qquad \frac{V - V_0}{e} = \frac{V' - V_0}{e'} = \frac{V - V'}{e - e'} = \sqrt{\frac{8\pi}{a} P}.$$

La dernière expression donne la différence de potentiel $V - V'$ en fonction de la variation d'épaisseur $e - e'$.

Ce mode d'opération présente plusieurs avantages. On voit d'abord que le potentiel V_0 disparaît dans l'expression finale. Le disque et l'anneau de garde ne sont pas formés en général du même métal, le premier étant en aluminium et le second en laiton ; il existe donc entre eux une différence de potentiel correspondant à la force électromotrice de contact, mais cette circonstance n'influe pas sur le résultat.

En second lieu, l'attraction P étant la même dans les deux cas, les densités électriques sur les surfaces en regard reprennent les mêmes valeurs.

Il faut encore tarer l'instrument, c'est-à-dire connaître la tension P des ressorts.

La tête de la vis supérieure porte un tambour divisé, en face duquel une échelle latérale permet de connaître le nombre de tours et de fractions de tour effectués dans un sens quelconque. L'appareil étant à l'état neutre, on amène le disque dans sa position normale; on le charge alors de masses m distribuées symétriquement et on le remonte par la vis C jusqu'à ce que l'image du réticule se retrouve entre

ses repères. Pour cette position du tambour, la tension des ressorts au moment des observations sera donc $P = mg$.

Il reste enfin à maintenir constant le potentiel V_0. La cloche en verre est une jarre électrique dont les armatures, non représentées sur la figure, sont formées de lames d'étain collées sur la surface intérieure et la surface extérieure, cette dernière étant reliée au sol. Des morceaux de ponce imbibés d'acide sulfurique concentré et contenus dans des boîtes de plomb maintiennent l'air de la cloche à l'état sec. L'anneau de garde B et, par suite, le disque mobile communiquent avec l'armature intérieure.

La jarre, une fois électrisée, conserve sa charge pendant très longtemps, mais il est nécessaire de recourir à deux organes accessoires, le *reproducteur de charge* R (replenisher)

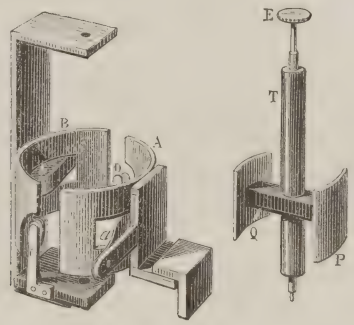


Fig. 154.

et la *jauge* J, pour amener dans chaque expérience le potentiel à la même valeur V_0.

Le *replenisher* (fig. 154) est une de ces machines couplées à induction dont nous avons indiqué le principe général (**146**). A et B sont deux conducteurs hemi-cylindriques, munis de ressorts intérieurs *a* et *b* et reliés l'un A avec l'armature intérieure de la jarre électrique, l'autre B avec le sol; entre eux sont deux ressorts C et D reliés par un fil métallique. Dans la cavité de ces conducteurs se place l'appareil tournant T formé d'une croix en ébonite qui porte deux plaques métalliques courbes P et Q et que l'on peut faire tourner rapidement dans un sens ou dans l'autre par le bouton E.

Supposons que A soit positif et B négatif. Quand les pla-

ques P et Q touchent respectivement les ressorts *a* et *b*, leur charge est nulle. Si la rotation amène P en D et Q en C, ces plaques font partie d'un conducteur disposé obliquement, la plaque P devient négative par influence et la plaque Q positive. La rotation continuant, Q apporte de l'électricité positive au ressort *a* et P de l'électricité négative au ressort *b*.

Une rotation dans ce sens augmente donc la charge de la jarre ; une rotation en sens contraire diminuerait la charge.

La *jauge*, qui est construite sur le même principe que l'électromètre lui-même, se compose d'un disque mobile *p* (fig. 155) avec son anneau de garde G, et d'un plateau qui l'attire, le tout enfermé dans une boîte J (fig. 153). Le disque et l'anneau sont en communication avec l'armature extérieure de l'électromètre ; le plateau opposé est à une distance fixe et en communication avec l'armature intérieure.

Le disque mobile est carré et peut tourner autour d'un axe

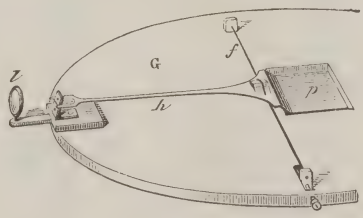


Fig. 155.

formé par un fil de platine *f* fixé à ses extrémités ; dans la position d'équilibre du fil, le disque est relevé et son plan coïncide avec celui de l'anneau quand l'attraction électrique fait équilibre à la torsion correspondante du fil. Le potentiel reprend évidemment la même valeur toutes les fois que cette condition est réalisée. La jauge doit être assez sensible pour accuser des différences de potentiel sans effet appréciable sur l'électromètre lui-même.

Le système de visée, qui permet de constater le retour au repère, diffère un peu de celui qui a été décrit plus haut. Le petit disque d'aluminium se prolonge par une queue *h* de même métal un peu plus grande que le rayon de la boîte J et dont l'extrémité, redressée en forme de fourche, porte le fil qui sert de mire. Cette extrémité, étant en dehors de la boîte,

est soumise à l'action des masses électriques extérieures et, à cause de la grandeur du bras de levier qu'elle présente, il en pourrait résulter des erreurs graves. On les évite en protégeant l'extrémité par un grillage métallique en communication avec la boîte et disposé de manière à ne pas gêner la vue. Le fil de mire doit être amené exactement entre deux petits points noirs tracés sur du papier blanc et on vise au moyen d'une loupe. Pour éviter autant que possible les erreurs de parallaxe, la loupe est une petite lentille plan-convexe, la surface plane étant tournée vers l'œil; le fil est à une distance très peu inférieure à la distance focale et l'œil doit être placé de l'autre côté à une distance assez grande, de 20 centimètres au moins. Dans ces conditions, le champ est réduit au minimum; quand la ligne de visée coïncide avec l'axe optique, le fil apparaît comme un trait rectiligne très épanoui à ses extrémités; pour peu qu'elle s'en écarte, l'image se courbe très fortement dans un sens ou dans l'autre. D'après Lord Kelvin, ce mode de visée permet d'estimer un déplacement du fil moindre que 0,0001 millimètre.

Les variations de température ont un effet marqué sur les indications de la jauge, à cause des changements qu'elles apportent dans l'élasticité du fil.

Sous la forme précédente, l'électromètre absolu comporte une grande précision quand il s'agit de potentiels modérés, jusqu'à 3000 volts, par exemple, ou 10 unités électrostatiques. Pour des potentiels plus élevés (*long rang electrometer*), l'appareil est réduit à deux plateaux parallèles, dont l'un porte un disque mobile disposé comme dans la jauge.

Ces plateaux étant portés à des potentiels différents, on modifie leur distance jusqu'à ce que le fil soit ramené entre ses repères. Un premier réglage ayant été fait par comparaison avec l'électromètre absolu, cet instrument permet alors d'évaluer les différences de potentiel qui correspondent à des étincelles de 30 centimètres.

M. Baille [1] a suspendu le disque mobile, toujours avec un anneau de garde, au fléau d'une balance, de manière que l'attraction électrique puisse être équilibrée directement par une variation des poids que porte l'autre plateau.

[1] J.-B. Baille, *Ann. de Chim., et de Phys.* [5], t. XXV, p. 486; 1882.

MM. Abraham et Lemoine [1] ont donné à cet appareil une forme très simple. Se disque est guidé par trois fils horizontaux disposés en triangle et relié à une petite balance dont le bras de levier n'a pas plus de 6c. L'appareil peut mesurer à 0,001 près des différences de potentiel de 5000 à 50 000 volts. L'expérience leur a montré que la formule est légitime tant que la distance des plateaux ne dépasse pas la moitié de la largeur de l'anneau de garde.

606. Autres formes d'électromètres-balance. — MM. Bichat et Blondlot [2] emploient trois cylindres conducteurs A, B et C (fig. 156). Le premier cylindre A est porté au potentiel V que l'on veut évaluer et il déborde des deux côtés le cylindre intérieur B, qui est mobile parallèlement à l'axe commun. Ce dernier communique au sol et pénètre en partie dans le cylindre intermédiaire C, également au sol.

Si Q est la charge du conducteur A, c la capacité par

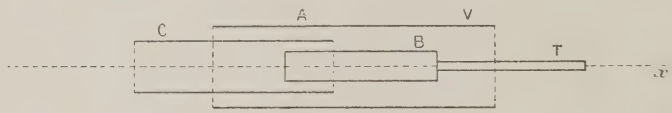


Fig. 156.

unité de longueur du condensateur formé par les cylindres A et B dans la région où la distribution est uniforme et X l'action qui s'exerce sur le cylindre B, la variation d'énergie du système pour un déplacement dx est égale au travail des forces électriques (70). Le potentiel étant nul sur B et C, on a

$$X\,dx = \frac{1}{2}\,V\,dQ = \frac{1}{2}\,V^2 c\,dx.$$

En désignant par R et r les rayons des cylindres A et B et remplaçant la capacité c par sa valeur (57), il vient

$$(6) \qquad V^2 = \frac{2}{c}\,X = 4\,X\,\mathcal{L}.\,\frac{R}{r}.$$

Le système étant disposé verticalement, on suspend le

[1] Abraham et Lemoine, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 466; 1895.
[2] Bichat et Blondlot, *Journ. de Phys.* [2], t. V, p. 325; 1886.

cylindre intérieur B au fléau d'une balance et on équilibre par des poids l'action électrique X.

Cet appareil a l'avantage de pouvoir être facilement improvisé et de n'exiger aucun réglage délicat, parce que la capacité c est un minimum quand les cylindres ont le même axe et varie très peu par suite des défauts de centrage.

Le cylindre B étant porté par une tige T de rayon r', on doit retrancher de la capacité c la capacité c' qui correspond à cette tige, ce qui donne finalement

$$2(c-c')=\frac{1}{\mathcal{L}.\frac{R}{r}}-\frac{1}{\mathcal{L}.\frac{R}{r'}}=\frac{\mathcal{L}.\frac{r}{r'}}{\mathcal{L}.\frac{R^2}{rr'}},$$

$$(6)' \qquad V^2=4X\frac{\mathcal{L}.\frac{R^2}{rr'}}{\mathcal{L}.\frac{r}{r'}}.$$

M. Lippmann [1] a indiqué une disposition qui repose sur la répulsion qui s'exerce entre deux hémisphères en contact au même potentiel V. Sur l'élément de surface dS, dont la normale fait l'angle θ avec l'axe commun des hémisphères, la composante axiale de la pression électrostatique est $2\pi\sigma^2 dS\cos\theta$ ou $2\pi\sigma^2 dS'$, en désignant par dS' la projection de dS sur le grand cercle perpendiculaire à l'axe. Le rayon de la sphère étant a, la résultante X de ces pressions est $2\pi\sigma^2.\pi a^2$; comme la charge totale de la sphère est $4\pi a^2\sigma = Va$, il en résulte $4\pi a\sigma = V$ ou

$$V^2=8X.$$

Les hémisphères sont des calottes creuses, ce qui ne change rien à la distribution de l'électricité. L'une d'elles est fixe; l'autre est suspendue à la première par un système de trois fils d'égale longueur, de sorte qu'elle ne peut prendre qu'un mouvement de translation. Les fils s'inclinent alors de l'angle α que l'on détermine par un miroir collé à deux d'entre eux et qu'on observe par une petite ouverture. La masse de l'hémisphère

(1) G. Lippmann, *Journ. de Phys.* [2], t. V, p. 323; 1886.

mobile étant m, la composante horizontale due à la pesanteur est $mg \tang \alpha$, ce qui donne

$$(7) \qquad V^2 = 8 mg \tang \alpha.$$

Si l'on renferme les calottes dans une enveloppe sphérique de rayon b en communication avec le sol, la capacité du système (50) est $a \frac{b}{b-a}$; par suite,

$$(7)' \qquad X = \frac{V^2}{8} \cdot \left(\frac{b}{b-a}\right)^2, \qquad V^2 = 8 \frac{b-a}{b} mg \tang \alpha.$$

Avec cette disposition, la sensibilité de l'appareil est aug-

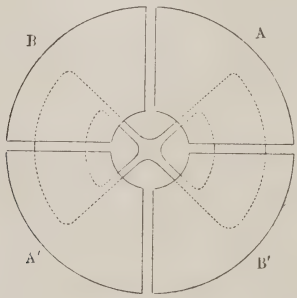


Fig. 157.

mentée, en même temps que les calottes hémisphériques sont protégées contre toute action extérieure.

607. Électromètre à quadrants. — L'électroscope de Bohnenberger se compose d'une feuille d'or suspendue entre deux conducteurs reliés aux pôles d'une pile; la feuille d'or dévie vers l'un ou l'autre conducteur suivant qu'elle est chargée d'électricité positive ou négative. Cet appareil peut être considéré comme le principe des électromètres symétriques.

L'électromètre à quadrants de Lord Kelvin ne se prête pas aussi bien que les précédents aux mesures absolues, mais il peut être beaucoup plus sensible et on le graduera par une méthode de comparaison.

Une boîte cylindrique plate est coupée suivant deux méridiens perpendiculaires de manière à former quatre segments

A, A', B et B' (fig. 157), dont les opposés AA' et BB' sont reliés électriquement. Chacun des quadrants est échancré dans la partie centrale par une ouverture circulaire.

Au milieu de la boîte est une aiguille, découpée dans une feuille mince d'aluminium, mobile autour d'une axe vertical perpendiculaire au plan des quadrants. Cette aiguille peut avoir une forme quelconque symétrique par rapport à un diamètre ; mais, pour se rapprocher autant que possible de la théorie et obtenir des résultats plus réguliers, on la réduit à deux portions de couronne de 90° rattachées au centre par deux bandes étroites qui en figurent les rayons extrêmes.

L'aiguille est portée par un système capable de donner un couple de torsion, tel qu'un bifilaire, un fil métallique ou un fil de cocon muni d'un petit aimant, et réglé de manière que l'équilibre ait lieu, tous les organes étant à l'état neutre, quand l'aiguille est symétriquement placée par rapport aux plans de séparation des quadrants. Les rayons sont alors dans la partie moyenne des quadrants, auquel cas l'action qu'ils éprouvent est sensiblement nulle.

Cette disposition équivaut à l'ensemble symétrique de trois cylindres (71). Si les deux paires de quadrants sont aux potentiels V_1 et V_2, l'aiguille étant au potentiel V, et que l'on désigne par α la capacité de l'aiguille par unité d'angle, la variation d'énergie du système pour une rotation $d\theta$, ou le travail des actions électriques, est

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \alpha d\theta (V_1 - V_2) \left[V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right]$$

Le moment du couple qui agit sur l'aiguille est le coefficient de $d\theta$ dans le second membre. Si la suspension est bifilaire et que C soit le coefficient de torsion, l'équilibre a lieu sous l'angle θ pour la condition

$$(8) \qquad \alpha (V_1 - V_2) \left[V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right] = C \sin \theta.$$

On remplacera $\sin\theta$ par l'angle θ si la suspension est unifilaire ou les déviations très petites. La sensibilité de l'ins-

trument est proportionnelle à la capacité α et en raison inverse du coefficient C de torsion.

On peut calculer la constante α. Soit S la surface de la couronne qui correspond à l'unité d'angle, d et d' les distances des faces aux côtés opposés de la boîte. La portion de l'aiguille comprise dans la paire de quadrants au potentiel V_1 a sur ses deux faces des couches électriques dont les densités sont respectivement (58)

$$\sigma = \frac{V - V_1}{4\pi d}, \quad \sigma' = \frac{V - V_1}{4\pi d'}.$$

La charge de la surface S étant $S(\sigma + \sigma') = \alpha(V - V_1)$, on a

$$(9) \qquad \alpha = \frac{S}{V - V_1} = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}\right).$$

Cette expression est minimum pour $d = d'$, c'est-à-dire quand l'aiguille occupe exactement le milieu de la boîte.

Si l'on désigne par c la capacité de l'aiguille par rapport aux quadrants supposés reliés au sol, la charge q qu'elle prendrait dans la position de symétrie est

$$(10) \qquad q = \frac{c}{2}(V - V_2 + V - V_1) = c\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right).$$

En réalité l'aiguille est déviée de l'angle θ, par exemple vers les quadrants de potentiel V_2, et la charge q' devient

$$(10)' \qquad \left\{ \begin{aligned} q' &= \left(\frac{c}{2} + \alpha\theta\right)(V - V_2) + \left(\frac{c}{2} - \alpha\theta\right)(V - V_1), \\ q' &= q + \alpha\theta(V_1 - V_2). \end{aligned} \right.$$

La capacité pratique c' de l'aiguille, rapportée au potentiel V, a donc pour expression

$$c' = \frac{q'}{V} = c\left(1 - \frac{V_1 + V_2}{2V}\right) + \alpha\frac{V_1 - V_2}{V}\theta,$$

ou, en tenant compte de l'équation (8) d'équilibre,

$$(11) \qquad c' = \left[c + \frac{\alpha^2}{C}(V_1 - V_2)^2 \frac{\theta}{\sin\theta}\right]\left(1 - \frac{V_1 + V_2}{2V}\right).$$

Dans le cas où $V_1 + V_2 = 0$, la capacité c' est sensiblement constante, au moins tant que les déviations restent très petites; elle renferme un terme proportionnel au carré de la différence de potentiel des quadrants.

608. Description de l'appareil. — Dans la disposition adoptée par Lord Kelvin, une cloche en verre renversée est fermée par un couvercle en métal auquel sont attachés tous les organes. Cette cloche sert de jarre électrique, comme pour l'électromètre absolu ; l'armature extérieure est formée par des feuillets d'étain en relation avec le sol et l'armature intérieure par une couche d'acide sulfurique, qui a l'avantage de faciliter l'isolement.

La boîte de quadrants est attachée au couvercle par des tiges de verre et deux électrodes extérieures, isolées par des manchons d'ébonite, communiquent respectivement aux deux paires de quadrants. L'aiguille est suspendue par deux fils de cocon dont on peut faire varier la distance des points d'attache supérieurs ; elle porte un miroir pour l'observation des déviations et un long fil de platine qui plonge dans l'acide sulfurique, de sorte qu'elle est constamment au potentiel très élevé de la jarre électrique. Cette aiguille y compris le miroir, ne pèse pas plus de $0^{gr},12$.

Enfin, on installe aussi sur le couvercle un *replenisher* et une *jauge* pour charger la jarre et y maintenir le potentiel constant V; la communication de ces organes avec l'acide sulfurique peut être interrompue à volonté, afin d'éviter les pertes inutiles.

Il est facile de diminuer la sensibilité de l'instrument, sans modifier la charge de la jarre ni l'écart des fils de suspension. Quand on isole une paire de quadrants, les deux corps dont on veut déterminer la différence de potentiel étant réunis respectivement à la cage et à l'autre électrode, les déviations deviennent 10 à 15 fois plus faibles que si l'on utilisait les deux électrodes. Une plaque de métal, dite *inducteur*, placée au-dessus de l'un des quadrants, permet encore d'aller plus

loin. L'inducteur ne joue pas de rôle en général, mais on peut isoler l'une des paires de quadrants, ou toutes les deux, et mettre l'inducteur seul en relation avec l'électrode utilisée; on obtient ainsi une série de sensibilités différentes.

La construction de cet électromètre paraît présenter d'assez grandes difficultés. La qualité du verre est très importante, parce que la bouteille doit conserver sa charge, sans perte sensible, au moins pendant une journée. D'autre part, les montures d'ébonite s'altèrent assez rapidement, et il peut arriver que les quadrants ne soient plus suffisamment isolés pour l'étude des corps qui ne sont pas reliés à des sources électriques. Enfin l'équation (8) montre que les déviations de l'aiguille ne sont pas rigoureusement symétriques pour des différences de potentiel égales et de signes contraires, ce qui peut présenter des inconvénients dans certains cas, comme pour les observations d'électricité atmosphérique.

Supposons, par exemple, que l'on ait $V = 800$ volts, $V_2 = 0$ et $V_1 = \pm 40$ volts. Le rapport des déviations θ et $-\theta'$ correspondant à ces deux valeurs du potentiel V_1 est alors

$$\frac{\theta}{-\theta'} = \frac{2V - V_1}{2V + V_1} = \frac{780}{820} = \frac{39}{41}.$$

L'erreur relative est déjà de 0,05 et le potentiel de l'air atteint souvent des valeurs de beaucoup supérieures à 40 volts. Il arrivera même, si $V_1 > 2V$, que les deux déviations se trouvent du même côté.

On peut simplifier notablement la construction de cet électromètre sans lui rien enlever de sa sensibilité ou de son exactitude. La bouteille de Leyde et ses accessoires, replenisher, jauge, etc., sont supprimés; l'appareil, réduit aux quadrants et à l'aiguille, est renfermé dans une cage métallique (fig. 158) dont le couvercle soutient le tube qui porte la suspension bifilaire, et laisse passer trois électrodes, portées par des tiges de verre et passant librement dans des trous du couvercle.

Deux des électrodes communiquent avec les paires de quadrants. La troisième est reliée à l'aiguille par l'intermédiaire d'un vase contenant de l'acide sulfurique dans lequel plonge,

d'une part, un fil de platine attaché à l'électrode et, d'autre part, un prolongement en platine de l'axe de l'aiguille ; ce prolongement porte une ou deux petites aiguilles transversales qui amortissent très rapidement les oscillations.

Dans la disposition habituelle on porte les quadrants à des potentiels égaux et de signes contraires en reliant respectivement les électrodes avec les deux pôles d'une pile, formée

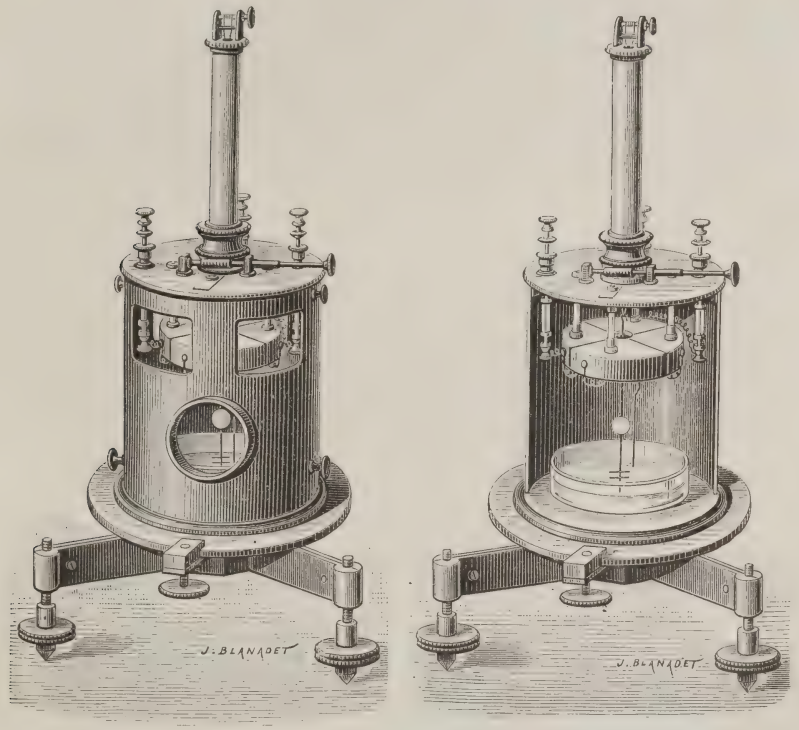


Fig. 158.

de très petits couples de Volta ou de Daniell, dont le milieu communique avec le sol. La sensibilité est alors, toutes choses égales, proportionnelle au nombre des couples.

Les fils de cocon, formés d'un seul brin auquel l'aiguille est suspendue par un crochet, sont enroulés sur un treuil à la partie supérieure et passent entre les dents d'une vis ayant deux pas en sens contraires ou dans deux encoches en forme de V dont la distance est variable ; on peut ainsi régler faci-

lement la distance des fils à la partie supérieure et la hauteur de l'aiguille. Enfin la colonne peut tourner sur elle-même par un mouvement gras ou à l'aide d'une vis tangente pour achever le réglage.

Il est facile, les trois électrodes étant libres, de les relier d'une manière quelconque et d'utiliser, suivant les cas, les différentes combinaisons indiquées précédemment.

Dans toutes les expériences faites avec les électromètres, il faut évidemment que les corps mis en communication avec les électrodes soient isolés avec le même soin que ces électrodes elles-mêmes. On doit considérer comme nulles les pertes par l'air, même très humide, et la déperdition de l'électricité comme s'effectuant uniquement par la couche d'humi-

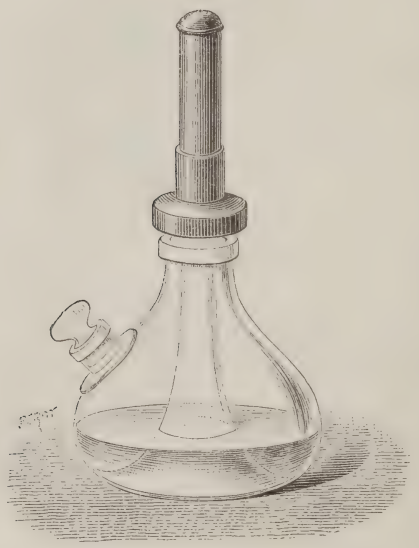


Fig. 159.

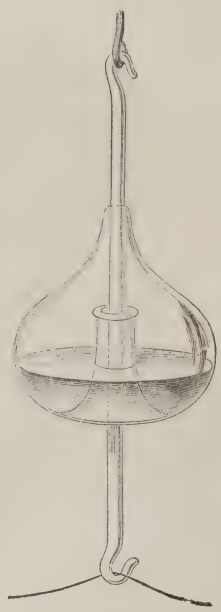


Fig. 160.

dité qui recouvre les supports et rend leur surface conductrice. On échappe à cette difficulté en maintenant les supports en verre, au moins une partie de leur longueur, dans une atmosphère desséchée par l'acide sulfurique. Les figures 159 et 160, qui s'expliquent d'elles-mêmes, montrent comment ces conditions peuvent être réalisées [1].

[1] Mascart, *Journal de Phys.*, t. VII, p. 217; 1878.

609. Discussion des expériences. — Dans le cas général, la déviation étant supposée assez petite, on peut écrire, en désignant par k le rapport des coefficients α et C,

$$(12) \qquad \theta = k(V_1 - V_2)\left[V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right].$$

Le premier facteur k ne dépend que de la construction de l'instrument. Le second facteur est nul quand les deux paires de quadrants sont réunies métalliquement; l'aiguille doit alors rester immobile, quelle que soit la charge qu'on lui communique. Cette condition ne se réalise pratiquement que si la symétrie des organes est parfaite; on l'utilise pour le réglage de l'instrument.

Le troisième facteur dépend des trois potentiels; il devient aussi nul lorsque le potentiel de l'aiguille est la moyenne algébrique des potentiels des quadrants.

Si l'on donne à l'aiguille des potentiels égaux et de signes différents $\pm V$, les déviations correspondantes θ et θ', comptées en sens contraires, donnent

$$\theta + \theta' = 2k(V_1 - V_2)V.$$

Dans ce cas, la distance angulaire des deux positions correspondantes de l'aiguille est exactement proportionnelle à la différence de potentiel $V_1 - V_2$ des quadrants.

La formule (12) peut aussi être réduite à

$$(13) \qquad \theta = k(V_1 - V_2)V$$

lorsque la somme $V_1 + V_2$ est très petite par rapport au potentiel V de l'aiguille; c'est dans ces conditions que fonctionne l'électromètre de Lord Kelvin, où la jauge est réglée pour un potentiel de 500 à 1000 volts.

Si l'on fait $V_1 + V_2 = 0$, c'est-à-dire quand les quadrants sont chargés par les deux pôles d'une pile dont le milieu est au sol, et que le corps à étudier, de potentiel V, soit mis en relation avec l'aiguille, l'équation (13) devient rigoureuse. En appelant E la force électromotrice $V_1 - V_2$ de la pile de

charge, on a alors

$$(14) \qquad \theta = k(V_1 - V_2)V = kEV.$$

Dans ce cas, l'instrument est parfaitement symétrique; il donne des déviations égales, de part et d'autre, pour des potentiels égaux et de signes contraires et la sensibilité est proportionnelle à la force électromotrice E.

Supposons encore que l'on réunisse l'aiguille à l'une des paires de quadrants, en faisant $V_1 = V$, ce qui donne

$$(15) \qquad 2\theta = k(V - V_2)^2.$$

L'aiguille se déplace alors vers les quadrants avec lesquels elle n'est pas reliée; la déviation est proportionnelle au carré de la différence des potentiels et ne change pas de signe avec cette différence. Si l'on fait en même temps $V_2 = 0$ en mettant au sol les autres quadrants, la déviation est simplement proportionnelle à V^2.

Enfin pour évaluer directement la différence de potentiel $V_a - V_b$ de deux points A et B, on peut joindre le point A à l'aiguille, le point B au milieu de la pile de charge, dont le potentiel est la moyenne des valeurs extrêmes V_1 et V_2. Avec cette disposition, la formule (12) devient

$$\theta = kE(V_a - V_b).$$

La détermination directe des constantes α et C, ou du coefficient k, ne serait pas facile; on gradue l'instrument au moyen de piles électriques dont la force électromotrice est connue ou déterminée par l'électromètre absolu.

L'électromètre à quadrants, sous l'une et l'autre forme, peut être rendu assez sensible pour apprécier un volt, ou la force électromotrice d'un couple Daniell, avec une approximation de 0,002. Les forces électromotrices de contact entre les métaux peuvent intervenir dans les expériences, par suite des communications établies, et l'on doit prendre des précautions pour les éliminer par la différence des observations.

Toutefois, M. Gouy [1] a constaté qu'en mettant au sol le

[1] Gouy, *Journ. de Phys.* [2], t. VII, p. 97; 1888.

milieu de la pile de charge, la sensibilité de l'électromètre, au lieu d'être simplement proportionnelle à la force électromotrice E, croît d'abord avec cette valeur, puis passe par un maximum et diminue ensuite rapidement. En outre, la charge symétrique diminue beaucoup la période des oscillations.

L'expérience montre que ce phénomène tient à l'existence d'un couple électrique directeur proportionnel au carré du potentiel de charge.

La théorie permet d'en rendre compte en remarquant que, dans la pratique, l'aiguille n'est pas assez large pour que les calculs précédents soient en toute rigueur applicables.

Soient, pour la position de symétrie, c, c_1 et c_2 les capacités de l'aiguille et des quadrants, chacun de ces organes étant considéré en présence de tous les autres conducteurs réunis au sol, γ_1 et γ_2 les coefficients d'électricité induite (46) ou d'induction électrostatique de l'aiguille sur les quadrants, et γ le coefficient réciproque des deux quadrants. Si l'aiguille est maintenue immobile par une action étrangère, les charges respectives sont

$$q = cV + \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2,$$
$$q_1 = c_1 V_1 + \gamma_1 V + \gamma V_2,$$
$$q_2 = c_2 V_2 + \gamma V_1 + \gamma_2 V,$$

et l'énergie électrique $W = \frac{1}{2}\Sigma qV$ du système devient

$$W = \frac{cV^2 + c_1 V_1^2 + c_2 V_2^2}{2} + \gamma_1 V V_1 + \gamma_2 V V_2 + \gamma V_1 V_2.$$

Lorsque l'aiguille tourne d'un angle très petit θ, le travail T des forces électriques est égal à l'accroissement δW d'énergie, lequel est dû à la variation correspondante des coefficients c et γ. On a donc

$$T = \frac{V^2 \delta c + V_1^2 \delta c_1 + V_2^2 \delta c_2}{2} + V V_1 d\gamma_1 + V V_2 d\gamma_2 + V_1 V_2 d\gamma.$$

Ces variations peuvent être développées en fonction des puissances croissantes de l'angle θ, en s'arrêtant aux termes

du second ordre; la symétrie du système entraîne alors certaines conditions :

1° Les quantités $\delta\gamma$ et δc ne dépendent pas du signe de θ; on aura donc, en désignant par λ et μ deux coefficients caractéristiques de l'appareil,

$$\delta\gamma = \lambda\theta^2, \qquad \delta c = \mu\theta^2.$$

2° D'autre part, les quantités $\delta\gamma_1$ et $\delta\gamma_2$, ainsi que δc_1 et δc_2, échangent leurs valeurs quand θ change de signe, ce qui donne

$$\begin{aligned} \delta\gamma_1 &= \alpha\theta + \alpha'\theta^2, & \delta c_1 &= \beta\theta + \beta'\theta^2, \\ \delta\gamma_2 &= -\alpha\theta + \alpha'\theta^2; & \delta c_2 &= -\beta\theta + \beta'\theta^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T = &\left[\frac{\beta}{2}(V_1^2 - V_2^2) + \alpha V(V_1 - V_2)\right]\theta \\ &+ \left[\frac{\mu}{2}V^2 + \frac{\alpha'}{2}(V_1^2 + V_2^2) + \alpha' V(V_1 + V_2) + \lambda V_1 V_2\right]\theta^2, \end{aligned}$$

expression que l'on peut écrire

$$T = K\theta + \frac{K'}{2}\theta^2 = \int_0^\theta (K + K'\theta)\,d\theta.$$

On voit que les actions électriques se réduisent à deux couples, l'un K indépendant de la déviation, et l'autre $K'\theta$ proportionnel à l'angle θ.

Le couple K tend à déplacer l'aiguille dans la direction des angles θ positifs, ou en sens contraire, suivant qu'il est positif ou négatif. Le couple $K'\theta$ s'annule avec la déviation; il tend à éloigner l'aiguille du zéro ou à l'y ramener suivant que K' est positif ou négatif.

Pour une aiguille de grandes dimensions, on aurait

$$\lambda = \mu = \alpha' = \beta' = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha + \beta = 0.$$

Si l'on réunit les quadrants au sol, auquel cas $K = 0$ et $K' = \mu V^2$, l'aiguille, mise en mouvement, oscille sous l'action du couple directeur K' et de la suspension.

L'expérience montre que la charge de l'aiguille au potentiel V ne modifie pas d'une manière appréciable la période

des oscillations; il en résulte que K' est alors très petit, ce qui était à prévoir, puisque la capacité de l'aiguille est indépendante de l'angle θ lorsque l'appareil est bien réglé; on a donc sensiblement $\mu = 0$.

Il en est de même quand on fait $V_1 = V_2$ et $V = 0$, ce qui exige $\beta' + \lambda = 0$, et pour $V = V_1 = V_2$, d'où résulte $\alpha' = 0$.

Enfin l'équilibre de l'aiguille ne dépend que des différences des potentiels, et non de leurs valeurs absolues, pourvu qu'elle soit efficacement protégée par la boîte de quadrants. Le couple K doit donc être nul pour $2V = V_1 + V_2$; par suite $\alpha + \beta = 0$.

En tenant compte de ces remarques, on obtient les expressions très approchées

$$K = \alpha(V_1 - V_2)\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right) = \alpha E\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right),$$

$$K' = -\lambda(V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2) = -\lambda(V_1 - V_2)^2 = -\lambda E^2.$$

La valeur de K est celle qu'on avait obtenue déjà.

Si l'on met l'aiguille au sol avec une charge symétrique ($V = 0$, $V_1 + V_2 = 0$), il reste un couple directeur électrique $K' = -\lambda E^2$ qui peut être très notable, malgré la petitesse du coefficient λ, si la force électromotrice E est très grande.

Le couple K' intervient également dans la position d'équilibre. Désignant encore par $C \sin\theta$ ou $C\theta$ le couple relatif à la suspension, l'aiguille est ramenée vers le zéro par le couple $(C - K')\theta$, tandis que le couple K tend à l'écarter. La condition d'équilibre est donc

$$K = (C - K')\theta.$$

Avec la charge symétrique, cette équation devient

$$\alpha E V = (C + \lambda E^2)\theta = C\theta\left(1 + \frac{\lambda E^2}{C}\right).$$

Si la valeur de E n'est pas trop grande, la formule usuelle est applicable. Dans le cas général, la sensibilité est variable et passe par un maximum pour la condition $\lambda E^2 = C$.

Une autre manière d'employer l'électromètre consiste à supprimer le couple de torsion, en portant l'aiguille par un fil de cocon, afin de n'utiliser que le couple directeur électrique. La condition d'équilibre se réduit alors à

$$\alpha V = \lambda E \theta.$$

Le zéro reste beaucoup plus fixe, n'étant plus soumis aux irrégularités de la suspension, mais il est alors nécessaire que les potentiels des quadrants soient bien égaux. M. Gouy obtient ce résultat en utilisant la différence de potentiel aux extrémités d'une résistance uniforme, parcourue par un courant, et dont le milieu est au sol; on peut alors mesurer aisément $0^{\text{volt}},001$.

MM. Blondlot et Curie [1] ont encore proposé une modification ingénieuse de l'électromètre à quadrants. Les secteurs fixes sont formés par deux disques parallèles, coupés suivant un plan diamétral, les moitiés en regard étant en communication; l'aiguille est aussi formée de deux demi-cercles isolés l'un de l'autre mais reliés mécaniquement. En outre, les secteurs sont des aimants, de sorte que les oscillations s'amortissent d'une manière très rapide par les courants induits.

L'aiguille est attachée à deux fils de platine tendus haut et bas, qui fixent la position du zéro, produisent le couple de torsion et servent en même temps à établir les communications avec les deux demi-cercles.

En désignant par V_1 et V_2 les potentiels des secteurs fixes, par U_1 et U_2 les potentiels des deux parties de l'aiguille, on trouve aisément que la déviation, tant que les deux fentes ne font pas un angle très aigu, est représentée par une expression de la forme

$$\theta = k(V_1 - V_2)(U_1 - U_2). \tag{16}$$

La symétrie plus complète de l'appareil supprime le couple directeur électrique.

Il est à remarquer ici que la déviation est proportionnelle au produit de deux différences de potentiel, circonstance très avantageuse dans les applications.

[1] R. Blondlot et P. Curie, *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 80; 1889.

Pour utiliser l'appareil comme électromètre ordinaire, on joint l'une des paires d'électrodes à la pile de charge, l'autre paire aux deux points dont on veut déterminer la différence de potentiel.

Si l'on réunit ces électrodes deux à deux de manière que $U_1 = V_1$ et $U_2 = V_2$, l'instrument devient idiostatique et l'on a simplement

$$\theta = k(V_1 - V_2)^2.$$

610. Voltmètres industriels. — Lord Kelvin a imaginé, sur le principe de l'électromètre à quadrants, deux appareils de construction simple, capables d'indiquer des différences de potentiel très élevées pour les applications industrielles.

Dans le *voltmètre électrostatique*, l'aiguille, à bords arrondis, tourne par un couteau mousse autour d'un axe horizontal, entre une seule paire de quadrants opposés, dont la ligne de symétrie est inclinée à 45° sur la verticale, et porte un index qui se déplace devant une graduation. Des contrepoids à vis permettent d'équilibrer l'aiguille de manière que son centre de gravité coïncide sensiblement avec l'axe de rotation; on y ajoute alors une surcharge p qui ramène l'aiguille à la direction verticale.

L'aiguille et la cage de l'appareil étant reliées au sol, on fait communiquer les quadrants à la source de potentiel V; l'aiguille s'incline alors d'un angle α. Il est clair que le carré V^2 du potentiel, pour une déviation donnée, est proportionnel à p; cette propriété permet de graduer l'instrument [1].

Le *voltmètre multicellulaire* est une sorte de multiplication du précédent. Deux séries de 10 quadrants opposés sont portés par des tiges verticales et 10 aiguilles attachées à un même arbre vertical se meuvent dans les intervalles des quadrants. Ce système d'aiguilles est suspendu à un fil métallique et porte un index mobile devant une échelle divisée. La cage, entièrement métallique, est mise en communication avec le sol ainsi que les aiguilles, et les quadrants sont portés au potentiel que l'on veut déterminer; la graduation doit être faite par une méthode empirique.

[1] Voir P. Janet, *Bull. de la Soc. des Électr.*, t. XIII, p. 138; 1896.

Dans les deux cas, la déviation varie d'abord très lentement, puis d'une manière plus rapide, à mesure que le potentiel augmente; les appareils sont réglés de manière à servir dans la région où ils présentent la plus grande sensibilité.

611. Méthodes d'oscillations. — Pour vérifier la loi des actions électriques, Coulomb [1] a étudié aussi les oscillations obtenues quand on fait agir une sphère électrisée de grand diamètre sur un petit disque électrisé en sens contraire et attaché à une aiguille suspendue par un fil de cocon.

La distribution de l'électricité sur la sphère n'étant pas troublée d'une manière sensible par celle du disque, l'action qu'elle exerce est en raison inverse du carré de la distance de son centre au disque; comme la période des oscillations est en raison inverse de la racine carrée de la force, elle doit être proportionnelle à la distance.

Cette méthode peut fournir aussi des mesures absolues si on choisit les dimensions de l'appareil de manière que l'action puisse être calculée en fonction des masses électriques ou des potentiels, par exemple, dans le cas où on emploierait des boules de même diamètre (**115**).

Lorsque le phénomène ne comporte pas une grande précision, comme pour la production des étincelles, on aura des résultats très approchés par une disposition analogue à celle de Coulomb [2]. Il suffit de substituer à l'aiguille isolante une aiguille conductrice terminée par une petite boule de rayon a' et communiquant au sol par le fil de suspension; sur la direction d'équilibre de l'aiguille on place une sphère A de rayon a électrisée au potentiel V. Si l'on a pris des précautions convenables pour que l'action se réduise à celle des deux sphères et que la distribution de l'électricité sur A ne soit pas sensiblement modifiée par l'électricité induite sur la petite boule, le calcul peut être fait de la manière suivante. Désignant par q et $-q'$ les charges des deux sphères et par d la distance des centres, on aura

$$V = \frac{q}{a} - \frac{q'}{d}, \qquad o = \frac{q}{d} - \frac{q'}{a'}.$$

(1) Coulomb, *Mém. de l'Acad. des sciences pour* 1785, p. 581.
(2) Mascart. *Traité d'électricité statique* t. I, p. 52; 1876.

L'attraction réciproque est alors

$$f = \frac{qq'}{d^2} = q^2 \frac{a'}{d^3} = V^2 \frac{a^2 a'}{d(d^2 - aa')}.$$

D'autre part, si n est le nombre d'oscillations de l'aiguille pendant l'unité de temps en l'absence de toute électrisation, N le nombre d'oscillations quand la sphère A est portée au potentiel V, K le moment d'inertie de l'aiguille, l la distance de l'axe au centre de la petite boule, on a

$$(N^2 - n^2)\pi^2 K = fl = V^2 \frac{a^2 a'}{d(d^2 - aa')} l.$$

En déterminant le moment d'inertie K par les méthodes habituelles (**546**), cette équation donnera le potentiel V en fonction des dimensions de l'appareil.

Il serait nécessaire de compléter ce calcul si on voulait utiliser la méthode pour des expériences précises ; nous y reviendrons plus loin en traitant à un autre point de vue le problème des deux sphères.

612. Électromètres à décharges. — La production d'une étincelle entre deux conducteurs équivaut à une communication momentanée (**6**) et au débit d'une quantité d'électricité qui dépend de la capacité des corps en présence.

L'étincelle est provoquée, en général, par des valeurs déterminées du potentiel sur chacun des conducteurs ; nous signalerons seulement cette propriété importante que, si la distance des conducteurs est très petite par rapport à leurs dimensions, l'étincelle ne dépend que de la *différence* des potentiels, quelles que soient leurs valeurs absolues.

Les variations de la *distance explosive* peuvent ainsi servir à la comparaison des potentiels, si l'on connaît les lois du phénomène ; nous examinerons d'abord le cas où cette distance est maintenue invariable.

L'appareil le plus employé est la *bouteille de Lane ;* c'est une jarre électrique dont l'armature extérieure communique avec une boule B (fig. 161) que l'on peut, au moyen d'une vis micrométrique, rapprocher plus ou moins de la boule A qui

termine l'armature intérieure. Si δV est la différence de potentiel maximum entre les boules et c la capacité de la jarre, chaque étincelle correspond à l'écoulement d'une quantité d'électricité $q = c\delta V$, qui croît avec l'écartement des boules et sert d'unité dans les expériences comparatives.

La bouteille de Lane est surtout utilisée pour évaluer la charge des batteries ; l'expérience peut être disposée de plusieurs manières différentes.

1° La batterie étant isolée, on joint l'armature intérieure à une source d'électricité, l'armature extérieure au bouton A de la bouteille de Lane et le conducteur B au sol. Soit C la capa-

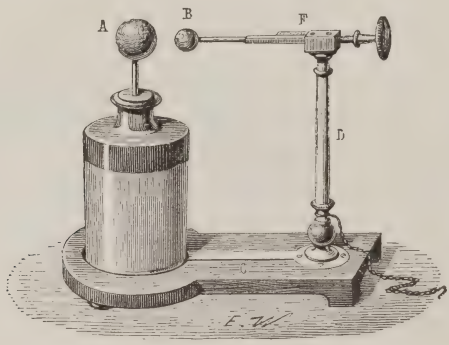


Fig. 161.

cité de la batterie, V son potentiel intérieur et $V' < V$ le potentiel qui reste sur l'armature intérieure quand la bouteille de Lane a fourni n décharges, en supposant que la communication avec la source n'ait pas été interrompue aussitôt après la dernière étincelle.

La charge intérieure de la batterie est $Q = C(V - V')$ et celle de l'armature extérieure, en y comprenant la bouteille de Lane, est $-Q + cV'$. Le débit total par les étincelles ayant été $Q - cV'$, on a donc

$$Q - cV' = nq, \qquad V - V' = \frac{Q}{C} = \frac{nq}{C} + \frac{c}{C}V',$$

et, si le potentiel V' est négligeable,

$$nq = Q = VC. \tag{17}$$

2° On peut isoler la bouteille de Lane et la placer sur le trajet de la source à l'armature intérieure de la batterie dont l'armature extérieure est au sol. Dans ce cas, chaque étincelle correspondant à la même différence de potentiel v ou à la charge q, la charge de la batterie est simplement nq et l'équation (17) s'applique exactement.

3° Enfin, si la source a deux pôles de signes contraires, comme la machine de Holtz et les machines analogues, on peut isoler les deux pôles en les réunissant séparément aux armatures de la batterie et plaçant la bouteille de Lane sur le trajet de l'une des communications; la quantité V désignera alors la différence de potentiel des deux armatures.

Toutefois, la décharge ultérieure de la batterie ne rend pas immédiatement la quantité totale d'électricité mesurée par la bouteille de Lane, à cause des résidus (172), et la différence de potentiel finale ne correspond pas en toute rigueur à l'équation (17). C'est là une cause d'erreur qu'il faut éliminer dans les expériences par des précautions convenables.

Si on relie, par exemple, les armatures de la batterie aux deux branches d'un excitateur et que la machine fonctionne d'une manière continue, on voit que le nombre n_0 des étincelles de la bouteille de Lane pour la première décharge est plus grand que le nombre n relatif aux suivantes, lequel reste sensiblement invariable; c'est à ce dernier nombre que correspondent la charge Q utilisée et la différence de potentiel V. La charge résiduelle $(n_0 - n)q$ est une fraction à peu près constante de la charge totale $n_0 q$.

Dans un grand nombre de travaux ingénieux sur les condensateurs, sur la propagation de l'électricité à l'état permanent ou à l'état variable, sur l'analogie des courants continus et des flux de force électrostatiques, etc., Gaugain a fait usage d'un instrument analogue, l'*électroscope à décharges*, qui permet d'évaluer de très petites quantités d'électricité. C'est un électroscope à feuilles d'or (fig. 162) muni, dans le plan de divergence des feuilles et à portée de l'une d'elles, d'une boule A reliée avec le sol; pour une charge suffisante, le contact a lieu et l'instrument est déchargé.

Si l'électricité afflue d'une manière continue, il se produit une succession de décharges toutes identiques entre elles, à

la condition que la feuille d'or retombe aussitôt après le contact. Quand on veut mesurer la charge d'un corps électrisé, il est bon, pour ralentir la décharge, de relier ce corps à l'électroscope par un mauvais conducteur tel qu'un fil de coton. En général, l'expérience ne produit pas une décharge complète et il reste sur l'ensemble des conducteurs une charge résiduelle incapable d'écarter la feuille d'or jusqu'au contact du conducteur voisin ; ce résidu peut être évalué par divers procédés dans le détail desquels nous n'entrerons pas [1].

Si le fil de coton fait communiquer l'instrument, non avec un corps électrisé, mais avec une source à potentiel constant, ou tout au moins avec un conducteur de grande capacité tel qu'une batterie, le nombre des décharges dans chaque unité

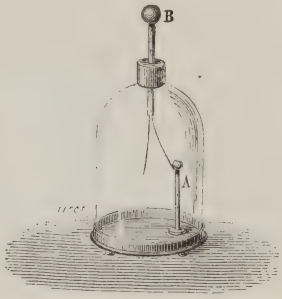


Fig. 162.

de temps mesure le *débit* d'électricité et, par conséquent, l'intensité du courant qui traverse le fil.

D'autre part, si le potentiel de la source est très élevé par rapport au potentiel variable de la feuille d'or pendant les alternatives d'isolement et de décharge, le débit est proportionnel au potentiel de la source ; cette expérience fournit ainsi une méthode très simple pour comparer des potentiels de l'ordre de ceux que l'on a à considérer dans les phénomènes d'électricité statique.

En mettant l'électroscope à décharges en communication avec un cylindre conducteur fermé (40, VII) on pourrait aussi comparer des charges électriques ; pour évaluer le partage

(1) Voir Mascart, *Traité d'électricité statique*, t. I, p. 417 ; 1876.

de l'électricité entre deux corps, par exemple, il suffirait de compter le nombre de décharges que donne chacun d'eux quand on l'introduit lentement dans le cylindre.

L'électroscope à décharges est un des appareils les plus utiles dans les expériences de cours et ne semble pas avoir été suffisamment apprécié.

613. Électromètre capillaire. — Les phénomènes électro-

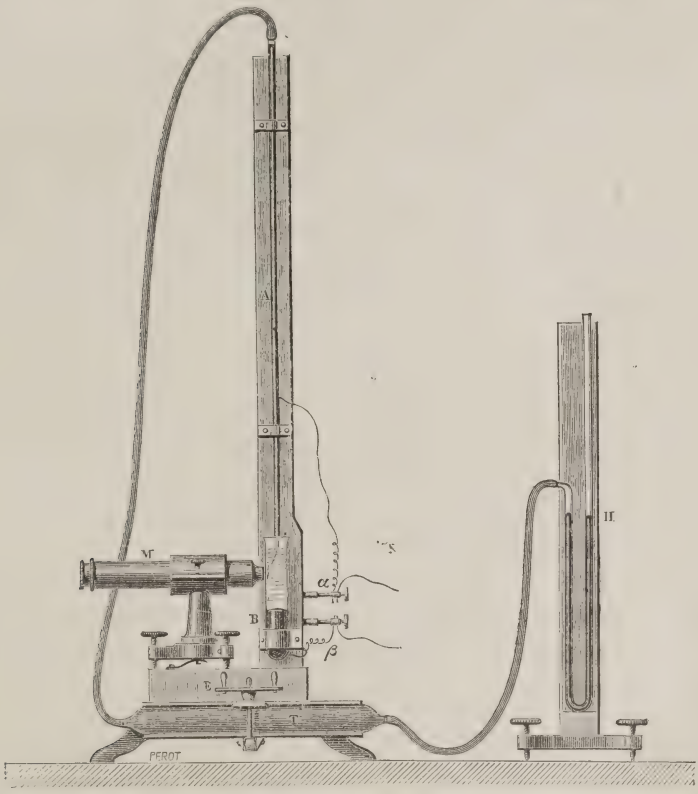


Fig. 163.

capillaires (**196**) ont été mis à profit par M. Lippmann pour construire un instrument délicat, qui permet de déterminer la différence de potentiel entre deux points, à la condition que cette différence ne dépasse pas 0,9 volt.

L'appareil se compose d'un tube A (fig. 163) terminé inférieurement par une pointe très effilée; ce tube, ouvert aux deux bouts, contient une colonne de mercure suspendue par la ten-

sion capillaire. Un vase plus large renferme du mercure B et de l'eau acidulée par un cinquième d'acide sulfurique dans laquelle plonge la pointe capillaire; deux fils de platine α et β, reliés l'un avec le mercure du tube, l'autre avec le mercure du vase, constituent les électrodes. Quand on joint directement ces deux électrodes, le mercure s'arrête dans le tube capillaire, dont le diamètre est variable, à un niveau que l'on détermine par un repère du microscope M. Si l'on réunit séparément les électrodes à deux points entre lesquels existe une différence de potentiel de signe convenable, la polarisation augmente la constante capillaire du mercure et la colonne se relève; on la ramène au niveau primitif en exerçant une pression compensatrice à la partie supérieure du tube A au moyen d'une poire de caoutchouc T.

La pression compensatrice p est mesurée par un manomètre latéral H; elle est liée à la pression primitive p_0 et aux tensions capillaires correspondantes A et A_0 par la relation

$$(18) \qquad p = p_0 \frac{A - A_0}{A_0}.$$

A mesure qu'on fait croître la différence de potentiel des électrodes, ou la force électromotrice qui existe entre elles, la pression compensatrice lui est d'abord proportionnelle, puis passe par un maximum et diminue ensuite.

La table suivante a été calculée pour la pression initiale p_0 représentée par une colonne de mercure de 75 centimètres; la force électromotrice est évaluée en fractions de celle d'un couple Daniell.

Force électromotrice.	Accroissement pression.	Force électromotrice.	Accroissement pression.
0,016	1°,5	0,500	28°,8
0,024	2,15	0,588	31,4
0,040	4,0	0,833	35,65
0,109	8,9	0,900	35,85
0,140	11,1	0,909	35,85
0,170	13,1	1,000	35,3
0,197	14,8	1,261	30,1
0,269	18,85	1,444	23,9
0,364	23,5	1,833	11,0
0,450	27,05	2,000	9,4

Il importe que l'électrode α qui correspond au tube capillaire soit toujours négative, afin d'éviter l'oxydation du mercure; il faut aussi veiller à ce que le tube capillaire soit bien mouillé par l'eau acidulée, ce qu'on obtient en faisant osciller légèrement la colonne de mercure.

Plusieurs dispositions ont été imaginées par différents observateurs pour réduire les dimensions de l'appareil ou augmenter la précision des lectures.

L'électromètre capillaire est particulièrement précieux pour constater l'égalité de deux potentiels. Le modèle construit par M. Limb [1], par exemple, permettait de constater une différence de $0^{v},00005$ et même, dans certains cas, de $0^{v},00002$.

La variation de pression ou de forme des surfaces dans l'électromètre capillaire correspond à une polarisation des électrodes (**182**) et la question de capacité ne se présente pas d'une manière aussi simple que pour les appareils purement électrostatiques.

On a vu (**196**) qu'en appelant S la surface de contact du mercure avec de l'eau acidulée, l'accroissement de charge dq relative à une variation dx de la différence de potentiel peut s'écrire

$$(19) \qquad dq = X\,dS + YS\,dx = -\frac{\partial A}{\partial x}\,dS - S\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\,dx.$$

Le mercure ayant été d'abord ramené au repère par une pression compensatrice pour la différence de potentiel x, la variation de surface tient au relèvement dy du mercure dans la partie capillaire dont le rayon est r et l'on a $-dS = 2\pi r\,dy$; il est clair que cette variation est proportionnelle à dA et peut s'écrire $-dS = K\,dA$.

La capacité C de l'électromètre serait alors

$$(20) \qquad C = \frac{dq}{dx} = K\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 - S\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

Par des expériences directes sur des appareils de forme thermométrique, dans lesquelles le niveau du mercure demeu-

[1] Limb, *Ann. de Chim. et de Phys.* [7], t. VIII, p. 220; 1896.

rait invariable, auquel cas la capacité se réduisait au second terme, proportionnel à la surface, M. Bouty [1] a reconnu que pour des valeurs de x voisines de zéro, la capacité a varié de 0,2 à 0,8 microfarad suivant la valeur de S. Pour un électromètre dont le diamètre est environ 12 fois moindre, le dernier terme de l'équation (20) serait de l'ordre de $0^{mf},05$, tandis que la capacité totale était voisine de $0^{mf},6$. Lorsque les valeurs sont de x très petites, la capacité C se réduit donc sensiblement au premier terme.

On a d'ailleurs, par la relation qui existe entre la tension capillaire A et la différence de potentiel

$$A = A_0(1 + ax - bx^2),$$

$$C = A_0[K(a - 2bx)^2 + 2Sb];$$

le premier terme de la parenthèse s'annule quand la tension capillaire devient maximum.

En exprimant la valeur de x en Daniells et prenant pour unités la capacité relative à $x = 0$, M. Bouty a trouvé, par exemple,

x	0	0,02	0,04	0,08	0,16	0,3	0,6
C	1	0,879	0,782	0,590	0,421	0,178	0,061

Une capacité de $0^{mf},1$ vaut $10^{-10}.3^2.10^{20} = 9.10^4$ unités électrostatiques, c'est-à-dire celle d'une sphère de 900 mètres de rayon. C'est là un obstacle à l'emploi de l'électromètre capillaire dans les expériences d'électrostatique.

614. Appareils à quartz. — MM. Curie [2] ont imaginé deux appareils très ingénieux, un mesureur de charge et un électromètre, basés sur les propriétés du *quartz* (**511** et **514**).

Le mesureur de charge, ou *quartz piézoélectrique*, se compose d'une lame rectangulaire dont l'épaisseur a est parallèle à un axe binaire électrique et la longueur b perpendiculaire à cet axe binaire et à l'axe optique; les deux faces de la lame

[1] Bouty, *Journ. de Phys.* [3], t. III, p. 371; 1894.
[2] J. et P. Curie, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. XVII, p. 385; 1889. — *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 149; 1889.

sont argentées ou couvertes de feuilles d'étain, sauf une partie dénudée qui sert à l'isolement. Cette lame est fixée à la partie supérieure dans une monture en étain et porte une tige à crochet où pend un plateau que l'on peut charger de poids. Le tout est enfermé dans une boîte métallique percée d'ouvertures qui laissent passer les électrodes et la tige de suspension du plateau.

Si P est le poids total que porte la lame, les quantités d'électricité $\pm q$ dégagées sur les deux faces sont $q = k\frac{b}{a}P$, c'est-à-dire proportionnelles à la longueur b de la lame couverte, en raison inverse de son épaisseur a et indépendantes de la largeur; cette dernière dimension n'a d'autre but que d'augmenter la résistance à la traction.

Le coefficient k étant égal à $6{,}32.10^{-8}$, la charge électrique correspondant au poids d'un kilogramme, par exemple, sera

$$q = 6{,}32.10^{-8}.\frac{b}{a}10^{3}.g = \frac{b}{a}6{,}2.10^{-2},$$

c'est-à-dire 6,2 unités électrostatiques, si la longueur est 100 fois l'épaisseur.

On peut ainsi obtenir des charges électriques déterminées en valeur absolue, mais la méthode convient surtout pour des expériences comparatives; elle présente l'avantage que le changement des poids peut être fait très rapidement, de manière à éliminer en grande partie toutes les causes de déperdition.

Dans le second appareil, *électromètre à bilame*, on utilise les dilatations électriques par le même artifice que pour le thermomètre bimétallique.

Deux lames de quartz, de même coupe que la précédente, réduites à l'épaisseur de quelques centièmes de millimètre, sont collées au baume de Canada après avoir retourné l'une d'elles face pour face, de façon que leurs axes électriques soient opposés; les surfaces extérieures sont ensuite argentées.

Si l'on établit une différence de potentiel entre les faces argentées, l'une des lames tend à s'allonger et l'autre à se raccourcir; il en résulte une flexion du système proportionnelle à la différence des potentiels.

On peut encore coller les lames entre elles, de manière que leurs axes électriques restent de même sens, si l'on a soin d'argenter aussi leur surface commune. Les couches extrêmes étant mises en communication au sol et la couche intermédiaire portée à un certain potentiel, les champs électriques sont de directions opposées et les lames se déforment encore en sens contraires; toutes choses égales, la sensibilité est même doublée.

Pour observer la flexion de cette bilame, on la fixe par l'une de ses extrémités de manière que la largeur c parallèle à l'axe optique soit verticale et on munit l'autre extrémité d'une aiguille terminée par une échelle micrométrique; cette aiguille est formée par une charpente en fils de verre disposés suivant les arêtes d'une pyramide quadrangulaire, disposition à la fois légère et rigide; on vise le micromètre avec un microscope.

L'électromètre à bilame est toujours destiné à mesurer des potentiels très élevés. Avec des lames d'un huitième de millimètre d'épaisseur et 8^c de longueur, l'instrument est sensible à 5 volts et peut servir jusqu'à 1000 ou 1500 volts. Des bilames d'épaisseur totale de 1^{mm} peuvent mesurer, à 200 volts près, des différences de potentiel de 50 000 volts.

Les appareils à quartz présentent dans ces conditions un isolement remarquable, car le cristal ne possède de conductibilité notable que suivant l'axe optique, lequel est perpendiculaire à l'épaisseur des lames employées.

CHAPITRE DEUXIÈME

MESURE DES COURANTS

615. Différentes méthodes. — On peut évaluer l'intensité d'un courant, soit par une mesure directe du débit (**612**) sous forme d'étincelles successives, soit par l'un quelconque des effets physiques qui l'accompagnent, tels que la chaleur dégagée sur un conducteur en vertu de la loi de Joule, l'échauffement local d'une soudure, les actions chimiques, etc.; mais on utilise surtout les propriétés électromagnétiques des courants, qui donnent des méthodes d'observation plus rapides et susceptibles d'une grande précision (**362**).

L'idée du galvanomètre est due à Ampère [1]. Le courant I traverse une bobine, ou cadre multiplicateur [2], et produit en un point un champ magnétique GI, le facteur G étant la constante galvanométrique du cadre en ce point.

Une aiguille aimantée infiniment petite de moment magnétique M, dont l'axe fait l'angle β avec la direction du champ GI, serait soumise au couple $MGI \sin\beta$.

Si l'aiguille, au lieu d'être entièrement libre, est astreinte à tourner autour d'un axe, vertical par exemple, le couple de rotation s'obtiendra en remplaçant les quantités M et G par leurs composantes perpendiculaires à cet axe.

Lorsque l'aiguille a des dimensions finies, le champ du courant n'est pas le même dans tout l'espace qu'elle occupe. Le facteur G représente alors une valeur moyenne qui dépend en même temps de la longueur de l'aiguille, de la distribution

(1) Ampère, *Ann. de Ch. et de Phys.* [2], t. XV, p. 59; 1820.
(2) Schweigger, *Allgemeine Litteraturzeitung*, n° 296; nov. 1820.

du magnétisme et de l'angle β; on peut le représenter par $G_0(1+\gamma)$, G_0 désignant la constante relative au centre de l'aiguille et γ un terme de correction.

Pour déterminer le champ GI du courant ou comparer les champs GI et GI′ de deux courants différents, c'est-à-dire les intensités I et I′, on peut d'abord, comme l'ont fait Biot et Savart (**315**), observer les oscillations de l'aiguille. En désignant par K son moment d'inertie, la durée τ des oscillations simples infiniment petites dans un champ F et le nombre N d'oscillations pendant le temps t sont

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{MF}}, \qquad N^2 = \frac{t^2}{\tau^2} = \frac{t^2}{\pi^2}\cdot\frac{MF}{K}.$$

C'est une des méthodes employées pour déterminer la composante H du champ terrestre; on y reviendra plus loin.

Dans le cas actuel, le cadre étant disposé de manière que le champ GI du courant soit parallèle à H, on soumet l'aiguille successivement aux champs H et et H + GI; les nombres correspondants n et N d'oscillations pendant le même temps donnent la relation

$$\frac{n^2}{H} = \frac{N^2}{H+GI} = \frac{N^2-n^2}{GI}.$$

Deux courants I et I′ sont ainsi dans le rapport des quantités N^2-n^2 et N'^2-n^2. Toutefois l'aimantation induite sur l'aiguille intervient dans le phénomène et on ne peut admettre en toute rigueur que, pour des champs très inégaux, la valeur effective du moment magnétique reste invariable.

Dans les galvanomètres proprement dits, l'aiguille est soumise à un champ extérieur H et le cadre est dirigé de manière que le champ GI soit incliné sur le premier; l'aiguille prend une direction telle que les couples produits par le courant et le champ extérieur soient égaux et de signes contraires.

Si les deux champs sont rectangulaires et sensiblement uniformes dans l'espace occupé par l'aiguille, la déviation δ due au courant donne

$$(1) \qquad HM \sin\delta = GIM \cos\delta, \qquad I = \frac{H}{G}\operatorname{tang}\delta.$$

Dans le cas général, l'aiguille est trop longue pour que le champ GI puisse être considéré comme uniforme et le champ extérieur est produit ou modifié par des aimants.

Si l'on désigne par H et G les valeurs relatives au milieu de l'aiguille, l'expression du courant peut s'écrire

$$(2) \qquad I = \frac{H}{G} f(\delta).$$

La fonction $f(\delta)$ se réduit d'abord à l'angle δ tant que les écarts restent assez faibles. Les galvanomètres sont à graduation systématique ou empirique, suivant que la forme de cette fonction est définie par la disposition de l'appareil ou qu'on doit la déterminer par expérience.

Lorsque cette fonction est connue, la détermination des constantes H et G permettra de mesurer le courant en valeurs absolues.

L'aiguille est quelquefois portée sur un pivot avec une chape en agate; le frottement, si faible qu'il soit, peut l'empêcher d'atteindre sa position d'équilibre et l'on doit s'assurer qu'elle y revient exactement après de petites déviations.

Il est préférable de porter cette aiguille par un fil de cocon ou un paquet de fils; l'équilibre est encore troublé par la torsion du système, mais cette cause d'erreur s'élimine facilement dans les observations.

L'aimant peut être remplacé par un cadre mobile parcouru par le courant I. Si S est la surface du circuit projetée sur le plan moyen, son moment magnétique est SI. L'action du champ extérieur H est proportionnelle au produit HSI; c'est le principe des galvanomètres *à cadres mobiles*.

Enfin lorsque le champ extérieur est lui-même produit par un courant I et qu'un autre courant I′ parcourt le cadre mobile, l'action réciproque est proportionnelle au produit II′ des deux courants; on utilise cette propriété dans les *électrodynamomètres*.

616. Appareils de torsion. — Supposons que l'aimant d'un galvanomètre soit suspendu à un fil métallique dont le coefficient de torsion est C, et que le champ extérieur efficace H fasse l'angle β avec l'axe du cadre. L'appareil étant réglé de manière que le fil soit sans torsion lorsque l'aimant n'est

soumis qu'au champ extérieur, le passage du courant tend à dévier l'aimant; par une torsion θ du fil on ramène l'aimant dans sa position primitive. L'équation d'équilibre est alors

$$(3) \qquad \mathrm{IMG}\sin\beta = \mathrm{C}\theta, \qquad \mathrm{I} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{MG}\sin\beta}\theta.$$

Comme la position relative de l'aimant et du cadre reste invariable, le facteur $\mathrm{G}\sin\beta$ est constant, de sorte que le courant est simplement proportionnel à la torsion θ.

Lorsque le réglage est imparfait, on peut rectifier l'appareil par la condition qu'en remplaçant l'aimant par un barreau de cuivre du même poids la position d'équilibre ne soit pas modifiée, mais ce contrôle n'est pas nécessaire. Si l'aiguille fait d'abord l'angle α_0 avec le champ extérieur, comme si le fil avait reçu une torsion préalable θ_0, la même équation (3) se retrouve par la différence des équations suivantes, qui correspondent aux équilibres primitif et final :

$$(4) \qquad \mathrm{HM}\sin\alpha_0 = \mathrm{C}(\theta_0 - \alpha_0),$$

$$(5) \qquad \mathrm{IMG}\sin\beta + \mathrm{HM}\sin\alpha_0 = \mathrm{C}(\theta + \theta_0 - \alpha_0).$$

Cette méthode, employée par Ohm [1], a surtout l'inconvénient d'exiger une manipulation qui trouble l'appareil chaque fois que l'on touche au fil pour arriver à la position de repère; il faut ensuite attendre que les oscillations s'amortissent, ce qui entraîne des pertes de temps. En outre, si les courants ne sont pas absolument invariables, il est nécessaire de procéder à une série d'épreuves alternatives pour en éliminer les variations.

On peut encore déterminer les erreurs de réglage α_0 et θ_0. L'appareil n'étant soumis qu'au champ extérieur, on donne au fil deux torsions différentes θ et θ', pour lesquelles on observe les déviations correspondantes α et α'.

Les équations d'équilibre deviennent

$$\mathrm{HM}\sin(\alpha + \alpha_0) = \mathrm{C}(\theta + \theta_0 - \alpha_0 - \alpha),$$
$$\mathrm{HM}\sin(\alpha' + \alpha_0) = \mathrm{C}(\theta' + \theta_0 - \alpha_0 - \alpha').$$

[1] Ohm, *Pogg. Ann.*, t. IV, p. 79; 1825.

En les combinant avec (4), on en déduirait les angles θ et α_0, ainsi que le rapport ε du coefficient C au couple directeur MH. Si l'écart primitif α_0 est assez petit pour que le carré soit négligeable, on trouve alors

$$\varepsilon = \frac{C}{MH} = \frac{\sin\alpha' \sin^2\frac{\alpha'}{2} - \sin\alpha \sin^2\frac{\alpha}{2}}{(\theta' - \alpha')\sin^2\frac{\alpha'}{2} - (\theta - \alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Enfin, lorsque les angles α et α' sont eux-mêmes très petits, il reste simplement

$$\varepsilon = \frac{C}{MH} = \frac{\alpha}{\theta - \alpha}. \tag{6}$$

On utilisera cette relation (6) pour déterminer la valeur du rapport ε relative à la suspension des aimants dans les galvanomètres. Un moyen très simple de produire alors la torsion auxiliaire θ, sans l'emploi d'un cercle gradué, consiste à faire tourner l'équipage d'une circonférence entière par un aimant extérieur, auquel cas $\theta = 2\pi$. Ce genre de correction n'est d'ailleurs nécessaire que si l'on veut évaluer les courants en mesures absolues.

La suspension bifilaire conduirait à des calculs analogues; nous y reviendrons à propos des cadres mobiles.

617. Boussole des sinus. — Dans la boussole des sinus, imaginée par Pouillet [1], la position relative de l'aiguille et du cadre est maintenue invariable et on donne à l'ensemble du système une direction telle que l'action de la Terre et celle du courant se fassent équilibre.

L'instrument se compose d'un cadre qui peut tourner autour d'un axe vertical sur un cercle gradué; l'aiguille repose sur un pivot au centre du cadre, et un repère permet de constater que, dans les différentes expériences, elle se trouve ramenée à la même position par rapport au cadre. A cet effet, l'aiguille porte, par exemple, une lame d'ivoire perpendiculaire à sa direction, sur laquelle est marqué un trait qui se meut en face d'une échelle divisée.

[1] Pouillet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IV, p. 267; 1837.

En appelant δ l'angle dont on a tourné l'appareil pour ramener l'aiguille à sa position de repère, quand le cadre est parcouru par le courant I, et β l'angle constant de l'aiguille avec l'axe du cadre, on a

$$IMG \sin\beta = MH \sin\delta,$$

$$(7) \qquad I = \frac{H}{G \sin\beta} \sin\delta = I_0 \sin\delta.$$

Le courant est proportionnel au *sinus* du déplacement du cadre. La méthode ne permet pas de mesurer des courants dont l'intensité soit supérieure à $I_0 = \frac{H}{G \sin\beta}$, mais on peut augmenter cette valeur limite, autant qu'on le veut, en faisant varier l'angle β qui détermine le choix du repère.

La boussole des sinus n'est guère employée à cause de la nécessité de toucher à l'instrument pour chaque observation; on peut l'utiliser avec avantage pour la graduation comparative des galvanomètres ordinaires.

M. Th. Gray [1] a fait de cette boussole un instrument absolu en plaçant une petite aiguille au centre d'une bobine longue à enroulement simple. D'après l'équation (37) du n° **571**, on a alors

$$G = 4\pi n \left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^4}{b^4} - \cdots\right).$$

Le troisième terme de la série est déjà négligeable quand la longueur de la bobine est 10 fois son diamètre. La bobine est montée sur un cercle gradué; à l'une des extrémités se trouve une échelle divisée, à l'autre une lunette. L'aiguille porte un miroir et l'image de l'échelle se réfléchit sur un second miroir fixe dans lequel on vise avec la lunette; l'une des divisions de l'échelle sert de repère. On s'assure d'abord que l'aiguille est sensiblement perpendiculaire à l'axe de la bobine, $\beta = 90°$, en vérifiant que des courants de sens contraires produisent les mêmes déviations de part et d'autre.

[1] Th. Gray, *Ph. Mag.* [5], t. XXII, p. 368; 1886. — *J. de Phys.* [2], t. VI, p. 247; 1887.

L'équation (7) donne alors le courant I en fonction de la composante H du champ terrestre.

618. Boussole des tangentes. — Lorsque le champ électromagnétique GI et le champ extérieur H sont rectangulaires et tous deux uniformes dans la région occupée par l'aimant mobile, le courant I est proportionnel, d'après l'équation (1), à la *tangente* de la déviation.

La boussole des tangentes, que l'on doit aussi à Pouillet, a été fréquemment employée pour la mesure absolue des courants ; il est alors nécessaire de faire toutes les corrections de réglage.

Si le champ GI fait l'angle $\beta = 90^\circ - \alpha$ avec la direction du champ extérieur H, on déterminera les deux déviations δ et δ' de sens contraires qui correspondent aux directions opposées du courant dans la bobine.

On déduit alors des équations d'équilibre

$$(8) \qquad GI\cos(\delta + \alpha) = H\sin\delta, \qquad GI\cos(\delta' - \alpha) = H\sin\delta',$$

$$(9) \qquad GI\cos\left(\frac{\delta - \delta'}{2} + \alpha\right) = H\,\mathrm{tang}\,\frac{\delta + \delta'}{2}\cos\frac{\delta - \delta'}{2}.$$

Lorsque la différence $\delta' - \delta$ est assez petite pour qu'on en puisse négliger le carré, l'angle α est du même ordre de grandeur, et on a sensiblement

$$(9)' \qquad I = \frac{H}{G}\,\mathrm{tang}\,\frac{\delta + \delta'}{2}.$$

Il suffit alors de considérer, comme déviation normale, la moyenne des deux lectures δ et δ'. On obtiendrait d'ailleurs, par l'élimination de l'angle α entre les équations (8),

$$I^2 = \frac{H^2}{G^2}\,\frac{(\mathrm{tg}\,\delta' - \mathrm{tg}\,\delta)^2 + 4\,\mathrm{tg}^2\delta\,\mathrm{tg}^2\delta'}{(\mathrm{tg}\,\delta' + \mathrm{tg}\,\delta)^2}.$$

En outre, si la torsion du fil qui porte l'aiguille n'est pas négligeable, on déterminera (616) le rapport ε du coefficient C au couple directeur MH. En appelant α_0 l'angle primitif de

l'aiguille avec le méridien et θ_0 la torsion correspondante, la première équation d'équilibre devient

$$\mathrm{IMG}\cos(\delta+\alpha+\alpha_0)=\mathrm{MH}\sin(\delta+\alpha_0)+\mathrm{C}(\delta+\theta_0-\alpha_0).$$

Remplaçant C par εMH et opérant de même pour la seconde observation, on aura

$$\mathrm{IG}\cos(\delta+\alpha+\alpha_0)=\mathrm{H}[\sin(\delta+\alpha_0)+\varepsilon(\delta+\theta_0-\alpha_0)],$$
$$\mathrm{IG}\cos(\delta'-\alpha-\alpha_0)=\mathrm{H}[\sin(\delta'-\alpha_0)+\varepsilon(\delta'-\theta_0+\alpha_0)].$$

Lorsque les écarts $\alpha-\alpha_0$ sont très petits, il en est de même pour la différence $\delta-\delta'$; on en déduit, en négligeant les termes de second ordre,

$$(9)'' \qquad \frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{H}}=\tan\mathrm{g}\,\frac{\delta+\delta'}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\delta+\delta'}{\cos\dfrac{\delta+\delta'}{2}}.$$

Pour une bobine à gorge rectangulaire, la constante galvanométrique G_0 relative au milieu de l'aiguille est donnée par l'une des équations (10) ou (11) du n° **560**, suivant qu'elle est au centre de la bobine ou excentrée sur l'axe à la distance x; on remplacera alors G dans l'expression du courant par $\mathrm{G}_0(1+\gamma)$. Si le défaut de centrage x et la longueur magnétique $2l$ de l'aiguille sont assez petits pour qu'on puisse se borner aux termes de second ordre, la correction γ est, en appelant a le rayon moyen de la bobine (**574**),

$$(10) \qquad \gamma=\frac{5\sin^2\delta-1}{4}\,l^2\,\frac{u_4}{u_2}=\frac{3}{4}(1-5\sin^2\delta)\,\frac{a^2-4x^2}{4}\cdot\frac{l^2}{u^2},$$

et, pour une aiguille centrée,

$$(10)' \qquad \gamma=\frac{3}{4}(1-5\sin^2\delta)\,\frac{l^2}{a^2}.$$

La longueur $2l$ est assez difficile à évaluer en général, mais pour un barreau court et cylindrique on peut admettre (**576**)

que le pôle est situé au tiers de la demi-longueur à partir de chaque extrémité.

Lorsque l'angle δ varie de zéro à 45°, la valeur absolue du facteur $1 - 5\sin^2\delta$ reste inférieure à 1,5. Si donc le rapport $\frac{l^2}{a^2} = \lambda$ est de l'ordre des erreurs expérimentales, ou du moins de l'approximation que l'on veut atteindre, la loi des tangentes sera applicable dans le même intervalle.

Dans l'instrument primitif de Pouillet, le cadre était formé par un cercle unique de 25 à 30 centimètres de diamètre, avec une aiguille de 7 à 8 centimètres de longueur posée sur un pivot et portant un index mobile sur un cercle gradué; le rapport λ était alors d'environ 0,08 et le terme de correction de même ordre.

L'inexactitude de la loi des tangentes dans cet appareil fut d'abord mise en évidence par les expériences de Despretz [1]; Blanchet a calculé les termes de correction.

Les variations correspondantes du courant et de la déviation donnent, avec la formule simple (1),

$$dI = \frac{H}{G}\frac{\cos^2\delta}{d\delta}, \qquad \frac{dI}{I} = \frac{2}{\sin 2\delta}d\delta.$$

Pour une même variation relative du courant, le déplacement de l'aiguille est proportionnel à $\sin 2\delta$. La condition la plus favorable correspond donc aux déviations voisines de 45°, pour lesquelles $GI = H$; le déplacement $d\delta$ est alors la moitié de la variation relative du courant. Entre les déviations de 30° et 60°, où le courant varie du simple au triple, la sensibilité reste à peu près la même.

Afin d'étendre les limites d'observation, Bertin [2] place le cadre à 45° du champ extérieur et dirige le courant de manière que l'aiguille soit ramenée vers le cadre. On a alors

$$H\sin\delta = GI\sin(45^\circ + \delta) = \frac{GI}{\sqrt{2}}(\cos\delta + \sin\delta),$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\delta}{\sin\delta(\sin\delta + \cos\delta)}.$$

[1] Despretz, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXXV, p. 449; 1852.
[2] Bertin, *Ann. de Ch. et de Phys.* [4], t. XVI, p. 25; 1869.

Entre les déviations de 45° et 90°, le dénominateur de la dernière fraction reste voisin de l'unité; la sensibilité relative est doublée et l'appareil convient à des courants plus inégaux. Toutefois cette disposition ne permet plus aussi facilement d'éliminer les défauts de réglage.

M. Grassi [1] a proposé d'employer deux cadres rectangulaires, dont nous désignerons les nombres de tours par N et N′, les rayons moyens étant a et a'. Le plan du premier étant parallèle au champ extérieur, la condition d'équilibre, abstraction faite des termes de correction, est

$$H \sin\delta = 2\pi I \left(\frac{N\cos\delta}{a} + \frac{N'\sin\delta}{a'}\right) = 2\pi I \frac{N}{a}\left(\cos\delta + \frac{N'a}{Na'}\sin\delta\right),$$

$$I = \frac{Ha}{2\pi N}\,\frac{\sin\delta}{\cos\delta + \frac{N'a}{Na'}\sin\delta} = \frac{Ha}{2\pi N}\,\frac{\sin\delta}{\cos\delta + p\sin\delta}.$$

Si les cadres sont identiques, ou $p = 1$, les conditions de sensibilité sont les mêmes que dans le cas précédent.

Dans la boussole employée par Joule [2], l'aiguille, formée d'un petit barreau de 5 à 6 millimètres de longueur, était suspendue par un fil de cocon au centre d'un cadre de 15 centimètres de diamètre; la correction est alors voisine de 0,001 même avec une déviation de 45°. Pour la lecture des déviations, l'aiguille portait un fil de verre dont l'extrémité se déplaçait au-dessus d'un cercle gradué. Le frottement de ce fil dans l'air produit un amortissement énergique et la moyenne des lectures, après inversion du courant, donnait la mesure de la déviation avec une erreur moindre que 2′.

On préfère maintenant disposer les appareils de manière à obtenir des déviations très petites, sauf à rendre les lectures plus précises par la méthode du miroir; la valeur de γ est alors sensiblement constante.

La bobine de Gaugain (575), à enroulement conique, supprime le terme de correction du second ordre quand l'ai-

(1) Grassi, *Nuovo Cimento*, t. XXX, p. 120; 1891. — *Journ. de Phys.* [3], t. I, p. 576; 1893.

(2) Joule, *Brit. Ass. Rep.*, Cork, 1843; *Scientific. papers*, t. I, p. 404.

guille est située au sommet du cône ; ce mode de construction présente des difficultés pratiques et une dissymétrie qui l'ont bientôt fait abandonner.

Les deux cadres égaux de Von Helmholtz (576) font disparaître le terme du second ordre quand la distance des cadres est égale au rayon moyen, et même le terme du quatrième ordre qui dépend de la bobine, par un rapport convenable des dimensions des gorges.

Enfin les bobines à plusieurs cadres (577 et 578) donnent encore d'autres solutions pour obtenir que le champ électromagnétique soit sensiblement uniforme, mais ces dispositions paraissent avoir été rarement utilisées.

W. Weber [1] a placé aussi l'aiguille aimantée en dehors de la bobine et dans une position principale, sur l'axe ou dans le plan moyen, l'axe étant d'ailleurs perpendiculaire au méridien ; on peut alors utiliser les formules du n° 559.

619. Remarques générales. — Dans la plupart des applications on cherche surtout à obtenir une grande sensibilité, en même temps que des lectures rapides et faciles.

Si le champ électromagnétique GI fait l'angle β avec le champ extérieur H, la déviation δ satisfait à la relation

$$\mathrm{GI} \sin(\beta - \delta) = \mathrm{H} \sin \delta.$$

Tant que les écarts sont très faibles, les facteurs G et H restent constants ; la déviation relative à un courant déterminé est proportionnelle à G et en raison inverse de H.

Pour augmenter la constante galvanométrique G du cadre, il faut rapprocher les spires autant que possible de l'aiguille et donner à la gorge une forme telle que le contour soit voisin de la courbe $u^2 = c^2 \sin\theta$ (563) ; il serait encore préférable de distribuer le fil par couches satisfaisant à cette condition et dans chacune desquelles le diamètre du fil augmente comme le paramètre c (564). Enfin on se sert d'aiguilles très petites pour réduire au minimum la cavité centrale et conserver les spires dont l'action spécifique est la plus grande.

Ajoutons que la résistance de la bobine contribue, toutes

[1] Weber, *Electrodyn. Maasbestimmungen*, t. I. p. 16 ; 1846.

choses égales, à diminuer l'intensité du courant; il est donc très important de n'employer dans sa construction que du cuivre très pur et surtout exempt de fer. La présence de matières étrangères diminue très rapidement la conductibilité du cuivre. Les traces de fer donnent lieu à des actions locales qui deviennent considérables dès que la masse des fils se rapproche beaucoup de l'aiguille ; les perturbations dues à cette cause sont très irrégulières, elles ont été pendant longtemps une source de difficultés dans l'emploi des galvanomètres de grande sensibilité.

Plusieurs dispositions peuvent être utilisées pour diminuer le champ extérieur. On combine généralement le champ terrestre avec celui du barreau auxiliaire situé de manière que son champ magnétique soit sensiblement uniforme et horizontal dans la région qu'occupe l'aiguille.

Si le rapport des champs de la Terre et de l'aimant est voisin de l'unité, le champ résultant est à peu près bissecteur de leur direction ; il tend à devenir perpendiculaire au méridien magnétique lorsque les deux champs sont dirigés en sens opposés.

Dans ce cas, les indications de l'appareil sont affectées par les moindres variations d'intensité ou de direction des champs composants ; les simples changements diurnes de déclinaison ou de température suffisent pour modifier la position d'équilibre de l'aiguille.

L'aimant compensateur est ordinairement porté par une tige verticale placée sur le galvanomètre dans le prolongement de l'axe de rotation de l'aiguille. Une vis de pression permet de le fixer sur cette tige à une hauteur quelconque et une vis tangente fait tourner la tige elle-même autour de son axe. On donne à l'aimant la forme d'un arc de cercle pour avoir un champ plus uniforme dans la région comprise entre les deux pôles, et pouvoir au besoin placer ces pôles sur le prolongement de l'aiguille.

Certains appareils portent deux aimants centrés sur l'axe de rotation, avec des dispositions mécaniques qui permettent de modifier l'angle qu'il font entre eux et la direction de leur bissectrice. On peut ainsi faire varier beaucoup l'intensité du champ auxiliaire, en même temps que sa direction.

Un second procédé consiste à employer, comme Nobili [1] l'a fait le premier, un système d'aiguilles astatiques (225). L'action de la terre sur le système peut être réduite à volonté ; en plaçant dans l'intérieur du cadre une seule des aiguilles et laissant l'autre à l'extérieur, l'action du cadre sur l'aiguille extérieure reste de même sens que l'action principale.

L'appareil est plus symétrique quand on emploie deux cadres superposés, avec une aiguille au milieu de chacun d'eux, et qu'on fait passer le courant en sens contraires dans les deux bobines. Comme un système presque astatique tend à se placer normalement au méridien, cette propriété, ainsi que la durée des oscillations, permet d'apprécier le degré de compensation du système.

Gauss [2] portait aussi le barreau par une suspension bifilaire de coefficient C, de manière que sa position d'équilibre restât dans le méridien, mais dans une direction opposée. Le couple directeur résultant est alors $C - MH$; cette différence peut être rendue très petite, mais la disposition expérimentale est moins commode que les précédentes et ne convient qu'aux aimants très lourds.

620. **Amortissement.** — Avec des instruments non amortis les observations sont longues et fastidieuses. Bien qu'il ne soit pas nécessaire d'attendre le repos complet de l'aiguille, encore faut-il, pour déduire la position d'équilibre de trois élongations consécutives (540), que les amplitudes soient suffisamment réduites. Lorsque les galvanomètres ont un amortissement propre très faible, on peut arrêter l'aiguille par l'action d'un petit aimant tenu à la main qu'on manœuvre d'une manière méthodique pour contrarier les oscillations : il est commode alors d'employer un aimant articulé en forme de compas, dont l'action devient insensible quand les deux branches sont rapprochées au contact. On trouve souvent plus d'avantage à installer auprès du galvanomètre une petite bobine, dans laquelle on lance à propos le courant d'une pile auxiliaire, dans un sens ou dans l'autre, au moyen d'une clef placée sous la main de l'observateur. Toutefois, pour les gal-

(1) Nobili, *Memorie ed osservazioni*, vol. I, p. 1; Firenze, 1834. — Le galvanomètre de Nobili a été construit en 1825.

(2) Gauss, *Œuvres*, t. V, p. 367; *Resultate des M. Vereins*, t. I; 1837.

vanomètres usuels, il est préférable que l'instrument ait par lui-même un amortissement notable.

L'amortissement naturel des oscillations est dû à la résistance de l'air et aux courants d'induction développés par le mouvement de l'aimant, soit dans les fils de la bobine, soit dans les masses métalliques voisines.

L'amortissement par l'air peut être très grand, comme dans la boussole de Joule (618). On munit quelquefois l'aiguille d'ailettes en aluminium ou en mica qui augmentent beaucoup le frottement; ce moyen est encore plus efficace quand les ailettes sont enfermées dans une boîte et très rapprochées des parois.

Dans la plupart des galvanomètres, la résistance propre de la bobine est assez grande pour que les courants induits n'interviennent que pour une faible part dans l'amortissement des oscillations.

Depuis la découverte de Gambey (466), on place souvent ou dessous ou autour de l'aiguille une masse de cuivre très épaisse, et, par suite, très conductrice. Cette disposition peut être appliquée avec avantage à tous les instruments.

Pour que le rapport du moment magnétique au moment d'inertie du système mobile reste aussi grand que possible et pour éviter toute pièce accessoire, W. Weber s'est servi, comme aiguille, d'un petit miroir circulaire en acier, aimanté suivant un diamètre, et oscillant au milieu d'une cavité ménagée au centre d'une sphère en cuivre rouge très épaisse; cette sphère forme un écran conducteur (392) entre l'aimant et la bobine. Avec une sphère de cuivre un peu épaisse, n'ayant de solution de continuité que pour le passage de la lumière, et une aiguille très aimantée, il est facile d'obtenir un mouvement apériodique (543).

Dans les galvanomètres de Siemens, l'aiguille est souvent remplacée par une sorte d'aimant en fer à cheval, ayant la forme d'une cloche cylindrique échancrée dans une partie de sa longueur suivant un plan diamétral. Cette cloche tourne autour de son axe dans une cavité creusée au milieu d'une sphère en cuivre rouge.

621. Courants induits dans les bobines. — Il est utile, à divers points de vue, de revenir sur le problème, déjà signalé

plus haut (533), de l'amortissement par les courants induits dans le cadre du galvanomètre.

Soit α l'angle que fait le champ extérieur avec le plan moyen du cadre, x_0 la déviation permanente qui correspond au courant I et $x_0 + x$ la déviation à l'époque t pendant les oscillations. Le couple que produirait alors l'unité de courant est $MG\cos(\alpha + x_0 + x)$; le travail relatif au déplacement dx, ou la variation $d\varphi$ du flux de force émis par l'aimant dans le circuit, a pour expression

$$d\varphi = MG\cos(\alpha + x_0 + x)\,dx.$$

Si R est la résistance et L le coefficient de self-induction du circuit, le courant i induit par les oscillations de l'aimant satisfait (374) à l'équation

$$(11) \qquad L\frac{di}{dt} + Ri + MG\cos(\alpha + x_0 + x)\frac{dx}{dt} = 0.$$

On a d'ailleurs, pour l'équilibre,

$$(12) \qquad MGI\cos(\alpha + x_0) = HM\sin x_0.$$

D'autre part, en appelant C_1 le coefficient de résistance du milieu, supposée proportionnelle à la vitesse, le couple qui agit sur l'aimant à l'instant considéré a pour valeur

$$(I + i)MG\cos(\alpha + x_0 + x) - C_1\frac{dx}{dt} - HM\sin(x_0 + x).$$

L'équation du mouvement de l'aimant est donc (527)

$$(13) \quad K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\frac{dx}{dt} + HM\sin(x_0 + x) = (I + i)MG\cos(\alpha + x_0 + x).$$

L'élimination de I et i entre (11), (12) et (13) conduirait à une équation différentielle, à coefficients transcendants, même si l'on suppose que la valeur de G reste constante.

L'équation se simplifie pour des oscillations très petites autour de la position d'équilibre, mais les coefficients de l'é-

quation différentielle ne deviennent constants que si l'écart x et la déviation initiale x_0 sont eux-mêmes très petits; on peut écrire alors

$$(11)' \qquad L\frac{di}{dt} + Ri + MG\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$(13)' \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\frac{dx}{dt} + HMx = MGi.$$

Les oscillations de l'aimant autour de sa position d'équilibre sont alors indépendantes du courant primitif I.

Si on pose encore

$$\lambda = \frac{C_1}{2K}, \qquad n^2 = \frac{HM}{K},$$

$$(14) \qquad \mu = \frac{M^2G^2}{2KR} = \frac{G^2}{2}\cdot\frac{H}{M}\cdot\frac{n^2}{R}, \qquad L = \varepsilon R,$$

et qu'on élimine le courant i, on obtient l'équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$\varepsilon\left(\frac{d^3x}{dt^3} + 2\lambda\frac{d^2x}{dt^2} + n^2\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt^2} + 2(\lambda+\mu)\frac{dx}{dt} + n^2x = 0.$$

Lorsque le circuit est ouvert, ou $R = \infty$, on a $i = 0$, $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$ et l'équation se réduit à

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + n^2x = 0.$$

Dans ce cas particulier, l'aimant n'est soumis qu'au champ extérieur et au frottement du milieu. Si la quantité ω^2 donnée par la relation

$$\omega^2 + \lambda^2 = n^2$$

est positive (532), le mouvement est oscillatoire avec amortissement; en prenant pour origine du temps une époque de passage par la position d'équilibre, l'écart x peut s'écrire

$$x = Ae^{-\lambda t}\sin\omega t.$$

Pour un circuit fermé, l'intégrale générale de l'équation différentielle est de la forme

$$x = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + A_3 e^{\rho_3 t},$$

les différentes valeurs de ρ étant les racines de l'équation du troisième degré

$$(15) \qquad \varepsilon(\rho^3 + 2\lambda\rho^2 + n^2\rho) + \rho^2 + 2(\lambda + \mu)\rho + n^2 = 0.$$

L'une des racines ρ_1 est toujours réelle; comme le rapport ε est très petit, cette racine est très grande et on a sensiblement $\varepsilon\rho_1 + 1 = 0$. Les deux autres ρ_2 et ρ_3 diffèrent très peu des racines de l'équation du second degré

$$(16) \qquad u^2 + 2(\lambda + \mu)u + n^2 = 0.$$

Ces racines sont imaginaires quand on a $n > \lambda + \mu$; nous poserons encore

$$m^2 + (\lambda + \mu)^2 = n^2 = \omega^2 + \lambda^2.$$

L'équation (15) étant mise sous la forme

$$(17) \qquad \varepsilon f(\rho) + \varphi(\rho) = 0,$$

on remplacera ρ par $u + y$, pour ces deux racines, y étant une quantité très petite.

Si on développe cette équation par rapport à y par la série de Taylor réduite aux premiers termes, en tenant compte de la relation (16), il en résulte

$$\frac{y}{\varepsilon} = -\frac{f(u)}{\varphi'(u)} = -\frac{u}{2}\,\frac{u^2 + 2\lambda u + n^2}{u + \lambda + \mu} = \mu\,\frac{u^2}{u + \lambda + \mu},$$

$$\rho = -(\lambda + \mu) \pm m\sqrt{-1} - 2\mu\varepsilon\left[\lambda + \mu \pm \left(\frac{n^2}{2m} - m\right)\sqrt{-1}\right].$$

Prenant pour origine du temps l'époque où l'aiguille arrive à une élongation d'amplitude a, les coefficients A_1, A_2 et A_3

seront déterminés par les conditions suivantes, qui correspondent à $t = 0$:

$$x = a, \qquad \frac{dx}{dt} = 0, \qquad i = 0.$$

Le coefficient A_1 est proportionnel au cube du rapport ε et le terme correspondant est négligeable.

Si t_0 est l'époque de passage par la position d'équilibre, la valeur de x peut encore se mettre sous la forme

$$x = A' e^{-\lambda' t} \sin \omega' (t - t_0),$$

avec les conditions

$$(18) \qquad \lambda' = (\lambda + \mu)(1 + 2\mu\varepsilon), \qquad \omega' = m - \frac{\mu\varepsilon}{m}(n^2 - 2m^2).$$

Négligeant le carré du rapport ε, on en déduit

$$\lambda'^2 = (\lambda + \mu)^2 + 4\mu\varepsilon(\lambda + \mu)^2,$$
$$\omega'^2 = m^2 - 2\mu\varepsilon(n^2 - 2m^2) = m^2 + 2\mu\varepsilon[n^2 - 2(\lambda + \mu)^2].$$
$$n'^2 = \lambda'^2 + \omega'^2 = n^2(1 + 2\mu\varepsilon).$$

Les quantités λ et ω, λ' et ω', définissent l'amortissement et la période des oscillations, suivant que le circuit du galvanomètre est ouvert ou fermé.

Les périodes d'oscillation, corrigées de l'amortissement, sont respectivement en raison inverse de n et de n'; elle diffèrent d'une quantité du premier ordre en ε.

Quand on néglige le rapport ε, il en résulte

$$(19) \qquad \lambda' - \lambda = \mu = \frac{M^2 G^2}{2KR}.$$

L'amortissement à circuit fermé croît donc comme le carré de la constante galvanométrique, comme le rapport du carré du moment magnétique du barreau aimanté au moment d'inertie de l'équipage, et en raison inverse de la résistance

du circuit ; cet amortissement est maximum lorsque la bobine est fermée sur elle-même.

La première des équations (18) peut encore s'écrire, dans les mêmes limites d'erreur et en remplaçant $\lambda' - \lambda$ dans l'un des termes de correction par sa valeur approchée μ,

$$\lambda' - \lambda = \mu(1 + 2\mu\varepsilon) + 2\mu\varepsilon\lambda,$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1 + 2\mu\varepsilon}{\lambda' - \lambda} + \frac{2\varepsilon\lambda}{\mu} = \frac{n'^2}{n^2(\lambda' - \lambda)} + \frac{2L}{\mu R}\lambda;$$

$$\lambda' - \lambda = \mu + 2\mu\varepsilon(\lambda + \mu) = \mu(1 + 2\varepsilon\lambda'),$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1 + 2\varepsilon\lambda'}{\lambda' - \lambda} = \frac{1}{\lambda' - \lambda} + \frac{2L}{\mu R}\lambda'.$$

On en déduit les deux valeurs

$$R = \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{\mu R}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda = \frac{\mu R}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda'.$$

Le produit μR dans les seconds membres étant exprimé en fonction de la quantité $n^2 = \omega^2 + \lambda^2$, d'après l'équation (14), on obtient finalement

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{G^2}{2}\,\frac{M}{H} \cdot \frac{\omega^2 + \lambda^2}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda'. \\ R &= \frac{G^2}{2} \cdot \frac{M}{H} \cdot \frac{\omega'^2 + \lambda'^2}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda. \end{aligned} \right.$$

C'est là le principe de l'une des méthodes employées pour déterminer les résistances en valeurs absolues.

L'étude des oscillations (539) dans les deux cas fera connaître les périodes T et T', et les décréments logarithmiques λT et $\lambda' T'$; on en déduira les valeurs de ω, ω', λ et λ'.

622. Galvanomètre de Nobili. — Le galvanomètre qui pendant longtemps a été le plus répandu est celui de Nobili [1]. Dans cet appareil, l'aimant est formé par deux morceaux

[1] Nobili, *Descrizione d'un nuovo galvanometro* (Maggio 1825).

d'aiguilles à coudre, de 5 à 6 centimètres de longueur, constituant un système quasi-astatique ; le cadre est rectangulaire et le noyau juste assez grand pour permettre le libre mouvement de l'une des aiguilles ; sa largeur est de 4 à 5 centimètres (fig. 164). L'aiguille inférieure est à l'intérieur du cadre, l'autre est à l'extérieur et munie d'un index effilé. Le système est attaché à un fil de cocon L et peut être élevé ou abaissé à l'aide d'une vis K.

Une plaque de cuivre rouge S est interposée entre le cadre et l'aiguille supérieure ; elle porte le cadran divisé et contribue en même temps à amortir les oscillations. A la partie supé-

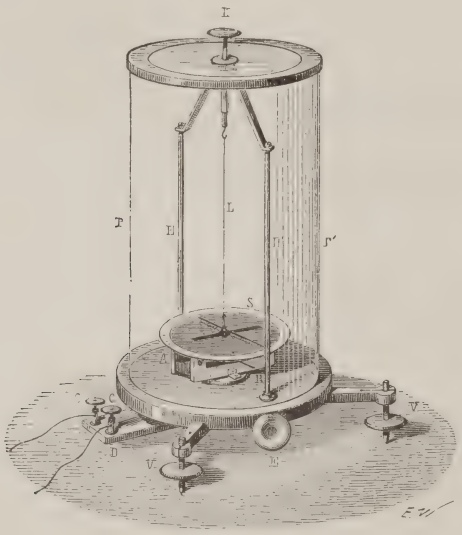


Fig. 164.

rieure, les spires forment deux paquets laissant entre eux un intervalle pour l'introduction du système astatique ; on doit alors percer la plaque de cuivre d'une fente correspondante, qui nuit beaucoup à l'amortissement. Une cloche PP' garantit l'appareil contre les courants d'air.

Cette forme de galvanomètre a été l'objet de travaux importants de Nobili, Melloni, Péclet, Dubois-Raymond, de la Provostaye et Desains, etc., relatifs à la chaleur rayonnante ou à la physiologie. Ces instruments très sensibles sont su-

jets à l'inconvénient de donner plusieurs positions d'équilibre, par suite de la présence de quelques traces de fer dans le fil de cuivre. Pour faire disparaître en grande partie les difficultés relatives au zéro, Péclet [1] réunissait en un seul paquet le fil enroulé sur la bobine et supportait l'aiguille par un étrier coudé faisant le tour du cadre; cette disposition supprimait la fente diamétrale de la plaque de cuivre.

623. Galvanomètre de Weber. — Les méthodes employées par Weber [2] l'avaient conduit à augmenter beaucoup les dimensions du galvanomètre. L'aimant est un barreau cylindrique de 10 centimètres de longueur et 15 millimètres de diamètre; ce cylindre est ordinairement creux, pour diminuer le moment d'inertie sans affaiblir notablement le moment magnétique. L'aimant est entouré d'un manchon de cuivre rouge, de forme elliptique et très épais, qui sert à la fois d'amortisseur et de noyau pour la bobine. La suspension est formée par un faisceau de fils de soie, et on fait les lectures par la méthode du miroir.

Cette disposition ne permet guère l'emploi de systèmes astatiques, mais on peut augmenter la sensibilité par une suspension bifilaire qui maintient le barreau dans une direction opposée à celle du champ terrestre.

624. Galvanomètres de Lord Kelvin. — Dans ces instruments, aujourd'hui généralisés, Lord Kelvin s'est rapproché autant que possible des conditions théoriques.

L'aiguille est formée d'une lame mince d'acier, de $0^{c},8$ environ de longueur, collée sur le dos du miroir qui doit servir aux observations; au lieu d'une seule lame, on peut en employer quatre ou cinq disposées parallèlement; le poids du miroir et de l'aiguille ne dépasse guère $0^{gr},05$. Le système est suspendu à un fil de cocon de 1 centimètre environ, et logé dans une cavité juste suffisante pour laisser à l'aiguille de très petits mouvements de part et d'autre de la position d'équilibre. Les courants d'induction n'interviennent que pour une faible part dans l'amortissement, à cause de la petitesse de l'aiguille, de sa distance au cadre et de la grande résistance que le fil présente ordinairement. La bobine est

(1) Péclet, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. II, p. 103; 1841.
(2) W. Weber, *Electrodyn. Maasbest. Widerstandmess.*, p. 337.

circulaire et la section de la gorge est un rectangle circonscrit à la courbe théorique (563) de meilleur enroulement. Un aimant courbe, mobile sur une tige verticale, permet de faire varier à volonté le champ directeur.

Pour d'autres appareils (*graded galvanometer*), la bobine renferme plusieurs couches de fils, de diamètres variables, dont chacune communique avec un bouton extérieur ; on peut ainsi utiliser, à partir de la couche centrale, la longueur totale de fil dont la résistance est égale à celle du circuit extérieur et obtenir le maximum de sensibilité.

Le galvanomètre astatique (fig. 165) est formé de deux bobines superposées, parcourues par le courant en sens contraires, dont chacune agit sur l'un des systèmes d'aiguilles. Les bobines se composent de deux cadres qui s'appliquent l'un contre l'autre en laissant seulement entre eux un passage suffisant pour la tige d'aluminium qui relie les aiguilles. Cette tige porte le miroir au centre de l'une des bobines et, dans le vide de l'autre bobine, une lame mince d'aluminium ou de mica pour l'amortissement. Un aimant correcteur modifie inégalement le champ extérieur sur les deux aiguilles et permet de faire varier à volonté la sensibilité de l'appareil. Si le système des aiguilles est très voisin d'être astatique, la position d'équilibre ne dépend plus que de l'aimant et le zéro est beaucoup plus stable.

La résistance des bobines, sauf pour les instruments destinés aux expériences de chaleur rayonnante, est généralement considérable et s'élève jusqu'à 40 000 ohms.

Ces galvanomètres ont des oscillations rapides qui s'amortissent très promptement. Leur sensibilité est très grande et ils sont surtout appropriés aux méthodes de réduction au zéro, dans lesquelles on a seulement à constater l'existence et le sens d'un courant très faible.

Le *galvanomètre marin* est destiné aux observations sur les navires. Comme il est alors impossible d'utiliser le champ terrestre, on place la bobine entre les branches d'un aimant en fer à cheval, qui produit un champ magnétique sensiblement uniforme. En outre, on annule d'une façon presque absolue l'action du champ terrestre, ainsi que celle des masses de fer du navire, en enfermant l'instrument tout entier dans

un cylindre épais de fer doux qui fait écran magnétique. Un aimant correcteur, parallèle à l'aiguille et ayant ses pôles opposés à celui de l'aimant fixe, peut être déplacé parallèlement à lui-même au moyen d'une vis. Enfin, on supprime les mou-

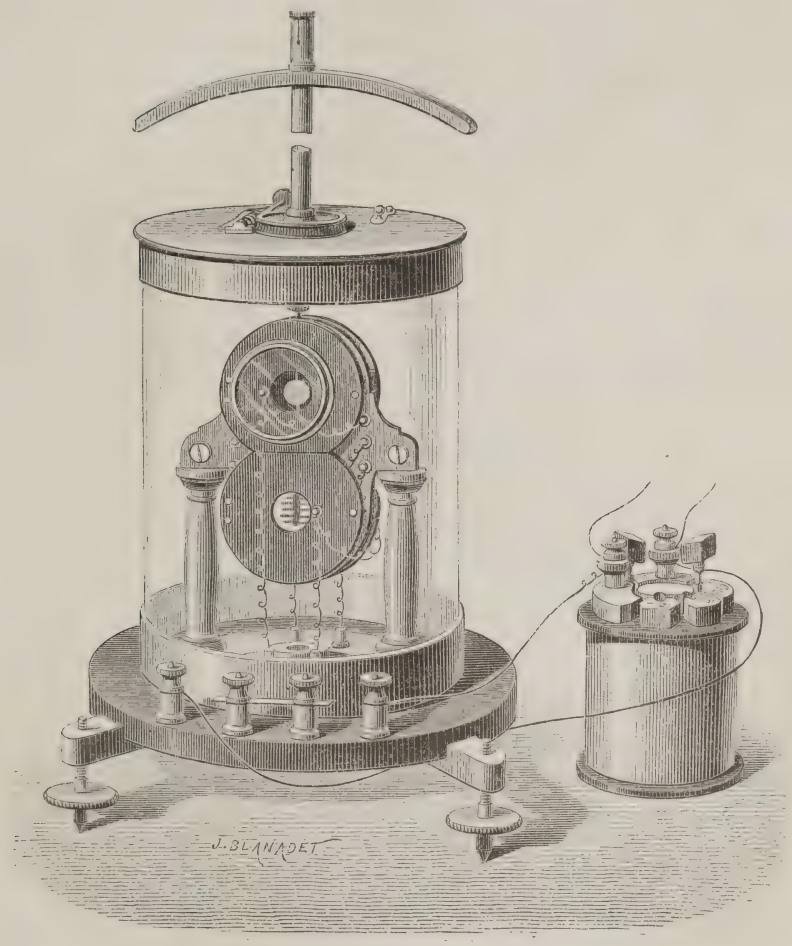


Fig. 165.

vements pendulaires de l'aiguille en lui donnant pour axe un fil de soie attaché d'une part à un point fixe et de l'autre à un ressort qui maintient une tension convenable. La résistance de ces galvanomètres est toujours très grande.

625. Sensibilité des galvanomètres. — On apprécie la sensibilité d'un galvanomètre par le plus faible courant capable de donner une déviation observable. Il semble d'abord que l'on peut augmenter cette sensibilité sans limite en diminuant le champ extérieur, mais les oscillations deviennent alors si lentes que la position d'équilibre n'a plus aucune stabilité.

Si l'on s'impose une limite de 5 secondes comme durée τ de l'oscillation simple [1], le moment d'inertie K de l'équipage de l'aimant intervient dans l'évaluation de la sensibilité. On a alors, à part des termes de correction,

$$\tau^2 = \pi^2 \frac{K}{MH}.$$

Si le champ électromagnétique du courant est à peu près perpendiculaire au champ extérieur et que les déviations restent très petites, on peut écrire

$$\delta = \frac{G}{H} I = \frac{\tau^2}{\pi^2} \cdot \frac{M}{K} GI.$$

D'autre part, lorsque l'épaisseur de l'isolant reste dans un rapport constant avec le diamètre du fil (559), la constante G est proportionnelle à la racine carrée de la résistance R du fil; si l'on pose alors

$$G = G_0 \sqrt{R},$$

la valeur de G_0 est simplement définie par les dimensions de la gorge. Faisant $\tau = 5$, il en résulte

$$\frac{\delta}{\sqrt{R}} = \frac{\tau^2}{\pi^2} \frac{M}{K} G_0 I = 2{,}53 \frac{M}{K} G_0 I.$$

Pour un courant donné, le second membre ne dépend plus que de l'aimant et du volume occupé par la bobine; le produit $\frac{M}{K} G_0$ caractérise ainsi le mode de construction.

On voit par là que le rapport du moment magnétique de

[1] Ayrton, Mather et Sumpner, *Ph. Mag.* [5], t. XXX, p. 58; 1890.

l'aiguille au moment d'inertie de l'équipage doit être aussi grand que possible ; il y a donc tout avantage à prendre des aimants très courts et même plusieurs aiguilles parallèles afin de réduire l'importance relative des organes accessoires, tels que le miroir à réflexion.

Si l'on emploie un système quasi-astatique, formé de deux aiguilles de moments M et M′ situées dans deux cadres identiques superposés, et que les champs correspondants soient H et H′, on a

$$\tau^2 = \pi^2 \frac{K}{HM - H'M'},$$

$$\delta = \frac{G(M+M')}{HM - H'M'} I = \frac{\tau^2}{\pi^2} \cdot \frac{M+M'}{K} GI.$$

La sensibilité paraît proportionnelle à la somme des moments magnétiques des aiguilles, mais le moment d'inertie des parties mobiles est nécessairement augmenté et l'appareil exige deux cadres. Il ne semble donc pas que les systèmes astatiques présentent de sérieux avantages.

Dans les aimants courts, la force démagnétisante (292) tend à diminuer l'aimantation. M. Weiss [1] forme le système astatique avec deux aiguilles verticales aimantées en sens contraires, qu'il supporte par un fil de cocon. Les pôles opposés forment ainsi, au centre de chaque bobine, un petit aimant dont la longueur magnétique est très faible et qui ne subit aucune action démagnétisante ; on diminue ainsi beaucoup les dimensions des bobines et la cavité libre.

On peut appeler sensibilité S du galvanomètre le nombre de divisions dont l'image se déplace pour un microampère, quand l'échelle est à une distance de 2 000 divisions du miroir et que la résistance des bobines est d'un ohm. La déviation δ correspondant à la moitié de S, si on évalue la résistance en ohms et le courant en ampères, et que M désigne le moment magnétique du système unique ou la somme des moments d'un système astatique, on aura

$$\frac{S}{4000} = 2{,}53 \frac{M}{K} \cdot G_0 10^{-6}.$$

[1] P. Weiss, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 212; 1895.

Il suffit alors de déterminer le nombre n de divisions qui correspond au courant de I ampères avec un cadre de R ohms, ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{n}{4\,000} = 2{,}53\,\frac{M}{K}\cdot G_0 I,$$

$$\frac{S\sqrt{R}}{n} = \frac{10^{-6}}{I}, \qquad S = \frac{n}{\sqrt{R}}\,\frac{10^{-6}}{I}.$$

Dans les conditions indiquées, il est généralement possible d'observer le dixième de division sur l'échelle, c'est-à-dire une déviation de $\frac{1}{40\,000}$ ou $5''$; l'appareil est donc capable de mettre en évidence un courant de

$$I = \frac{n}{S\sqrt{R}}\,10^{-6} = \frac{10^{-7}}{S\sqrt{R}}.$$

On a ainsi réalisé des galvanomètres dont la sensibilité S est représentée par 1 500 ou même 2 000. Avec une résistance de 400 ohms, le moindre courant observable serait alors

$$I = \frac{10^{-7}}{2\,000.20} = \frac{1}{4}\,10^{-11} \text{ ampère.}$$

626. Galvanomètre différentiel. — A. Becquerel [1] a imaginé d'utiliser le galvanomètre pour constater la différence de deux courants. L'appareil est formé de deux bobines, parcourues respectivement par les courants I et I', dont les champs GI et G'I' sur l'aiguille sont directement opposés.

La déviation dépend de la différence GI — G'I', ou simplement de G(I — I'), c'est-à-dire de la différence I — I' des courants, lorsque les constantes galvanométriques G et G' des deux bobines sont égales; habituellement les résistances de ces bobines ont aussi la même valeur.

Pour vérifier le réglage d'un galvanomètre différentiel, on fait d'abord passer un même courant dans les deux bobines en

[1] A. Becquerel, *Ann. de Ch. et de Phys.* [2], t. XXXII, p. 420; 1826.

sens contraires; la déviation doit être nulle si $G = G'$. On divise ensuite un même courant entre les deux cadres; l'aiguille doit encore rester au zéro si les résistances sont égales.

Un moyen simple de réaliser à la fois ces deux conditions consiste à prendre deux fils identiques tordus ensemble que l'on enroule ensuite sur un même cadre. Quels que soient l'enroulement et la position de l'aiguille, les actions des deux fils sont égales. Comme le fil tordu donne un enroulement peu régulier, les constructeurs préfèrent enrouler simultanément et parallèlement les deux fils sur le cadre; mais il est alors moins facile, sans des précautions particulières, d'obtenir la symétrie électrique.

Du reste, il n'est pas nécessaire que les bobines coïncident. Le galvanomètre astatique de lord Kelvin, à deux bobines superposées (fig. 165), peut être employé comme galvanomètre différentiel : il suffit que les courants traversent séparément les deux bobines de manière que leurs actions sur les aiguilles correspondantes soient de sens contraires. Appelant M et M′ les moments magnétiques des aiguilles, H et H′ les champs extérieurs correspondants, on a, au moins pour les petites déviations,

$$GMI - G'M'I' = (MH - M'H')\delta.$$

La déviation ne s'annule avec des courants égaux que si la condition $GM = G'M'$ est réalisée. Pour faciliter le réglage, on complète le cadre de moindre action par une petite bobine additionnelle de même axe, qu'on peut rapprocher ou éloigner de l'aiguille correspondante. On cherche alors par tâtonnements la position que doit occuper cette bobine auxiliaire pour qu'un même courant, traversant les deux systèmes en sens contraires, ne produise pas de déviation. Les deux circuits ont aussi la même résistance, de sorte qu'un courant dérivé entre eux est sans action.

Le galvanomètre différentiel est employé le plus souvent pour vérifier l'égalité de deux courants; la disposition suivante [1] permettrait d'en déterminer le rapport.

[1] Jenkin, *Report of the commitee of B. A.*; *Dundee*, 1867.

Les plans moyens des deux cadres sont rectangulaires, avec un même diamètre vertical, et l'ensemble est mobile sur un cercle gradué ; l'aiguille est placée au centre commun.

Si l'on fait passer des courants I et I′ séparément dans les deux cadres, on peut trouver une position du système telle que l'aiguille reste dans le méridien. Appelons φ l'angle que fait alors l'un des cadres avec le méridien, l'équation d'équilibre de l'aiguille est alors

$$GI\cos\varphi - G'I'\sin\varphi = 0, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{G}{G'}\cdot\frac{I}{I'}.$$

Le rapport des courants est simplement égal à $\operatorname{tang}\varphi$ si les constantes galvanométriques G et G′ relatives à la position de l'aiguille sont égales entre elles. On peut toujours choisir les dimensions des cadres et de l'aiguille de manière que les valeurs de G et G′ soient indépendantes de l'angle φ ; si elles ne sont pas égales, on en déterminera le rapport par une expérience préliminaire avec un même courant $I = I'$ dans les deux cadres.

627. Balance électromagnétique. — C'est aussi à Becquerel [1] qu'on doit l'idée d'évaluer en poids l'intensité des courants. Un aimant est suspendu verticalement au fléau d'une balance, dans l'axe d'une bobine cylindrique. Suivant le sens du courant dans la bobine, il y a attraction ou répulsion et on compense cet effet par des poids. L'action du courant est nulle lorsque le milieu de l'aimant est placé au centre O de la bobine et elle prend une valeur maximum quand le milieu de l'aimant est un certain point P de l'axe.

Il est nécessaire que l'aimant ait des dimensions notables par rapport à la longueur de la bobine, sans quoi l'action serait très faible. Il est facile de voir que l'équilibre est stable lorsque le milieu de l'aimant est situé dans l'intervalle OP ou au delà du point P, suivant que l'action est attractive ou répulsive. Pour une position déterminée de l'aimant, la stabilité dépend donc en général du sens du courant. Cet équilibre est toujours stable, par le seul fait de la balance, lorsque

[1] A. Becquerel, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. V, p. 35; 1837.

l'aimant se trouve au voisinage du point d'action maximum. Cette position est évidemment celle qu'il convient de choisir; c'est la seule qui conserve à la balance sa sensibilité propre.

Pour une aimantation absolument rigide, l'action serait proportionnelle à l'intensité du courant. C'est ce qui a lieu avec des courants faibles; mais, en général, la bobine produit en outre une aimantation temporaire qui est d'abord, avec des courants moyens, proportionnelle à l'intensité et donne toujours une action attractive.

La condition d'équilibre peut alors se traduire par une expression de la forme

$$p = (A \pm A'I)I,$$

dans laquelle p est le poids qui rétablit l'équilibre, A et A′ deux constantes à déterminer par l'expérience.

Cette formule a été employée par Lenz et Jacobi [1] qui ont apporté quelques modifications à la balance de Becquerel. Leur appareil comprend deux bobines et deux aimants suspendus aux deux extrémités du même fléau. Les deux fils de suspension sont inégaux et, les deux pôles N étant en bas, l'un des aimants est au-dessus de la bobine correspondante, l'autre au-dessous; on opère par répulsion.

La proportionnalité de l'aimantation temporaire à l'intensité du courant ne serait plus admissible pour des courants très intenses, et la graduation de l'appareil devrait alors être déterminée empiriquement.

Si l'on remplace l'aimant par un morceau de fer doux, l'action, toujours attractive, commence par être proportionnelle au carré de l'intensité du courant pour croître ensuite moins rapidement; dans ce cas encore, une graduation empirique est nécessaire.

Toutefois, dès que l'aimantation est variable, sa valeur ne dépend pas seulement de l'état actuel du courant (285) et la méthode ne comporte plus aucune précision.

628. Cadres mobiles. — Supposons qu'une bobine de surface S, attachée à une suspension bifilaire de coefficient C,

[1] Lenz et Jacobi, *Pogg. Ann.*, t. XLVII, p. 227 et 239; 1839.

soit en équilibre quand son plan moyen est parallèle au champ magnétique extérieur H. Si la bobine est parcourue par le courant I, on peut la ramener dans sa position primitive par une torsion convenable de la suspension, ou bien, ce qui est plus simple, abandonner l'appareil à lui-même et observer la déviation δ qui correspond au nouvel équilibre. On a alors

$$(21) \qquad \mathrm{HSI}\cos\delta = \mathrm{C}\sin\delta, \qquad \mathrm{I} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{HS}}\tan\delta.$$

Cette méthode est due à Weber [1]. Si la suspension est bifilaire, les deux fils sont utilisés pour amener le courant à la bobine. Si elle est unifilaire, le circuit est complété, soit par un second fil vertical situé au-dessous de la bobine et attaché à un ressort léger, soit par une tige qui plonge dans un godet contenant du mercure; il suffit alors de remplacer dans les équations $\sin\delta$ par l'angle δ.

Pour régler la position initiale de la bobine, on met son axe à peu près parallèle au champ et on agit sur la suspension jusqu'à ce que le passage d'un courant ne produise aucune déviation; on tourne alors la suspension ou l'appareil tout entier de 90°.

On corrige le petit défaut d'ajustement qui pourrait encore subsister, en renversant le sens du courant dans la bobine. Soit α l'angle de l'axe de la bobine avec la normale au méridien dans la position initiale, δ et δ' les déviations observées de part et d'autre pour les deux sens du courant; les équations d'équilibre sont

$$\mathrm{HSI}\cos(\delta+\alpha) = \mathrm{C}\sin\delta, \qquad \mathrm{HSI}\cos(\delta'-\alpha) = \mathrm{C}\sin\delta'.$$

Sauf la différence des facteurs constants, on retrouve ainsi les équations (8) obtenues pour la boussole des tangentes. Si les déviations δ et δ' sont peu différentes, il suffira de remplacer l'angle δ dans la formule simple (21) par la moyenne des dérivations observées.

L'amortissement dû aux courants induits dans le cadre se déterminera comme précédemment (621).

[1] W. Weber, *Electrodyn. Maasbestimmungen*, t. I, p. 16; 1846.

Si α est l'angle primitif du cadre avec le champ, x_0 la déviation permanente produite par le courant I, et $x_0 + x$ la déviation qui correspond à l'époque t, le flux de force φ émis par le champ dans le cadre est $HS \sin(\alpha + x_0 + x)$ et sa variation pour le déplacement dx

$$d\varphi = HS \cos(\alpha + x_0 + x)\, dx.$$

Le courant induit i satisfait à l'équation

$$L\frac{di}{dt} + Ri + HS \cos(\alpha + x_0 + x)\frac{dx}{dt} = 0.$$

D'autre part, la condition d'équilibre est

$$IHS \cos(\alpha + x_0) = C \sin x_0,$$

et le couple moteur relatif à la déviation $x_0 + x$

$$(I + i)HS \cos(\alpha + x_0 + x) - C_1 \frac{dx}{dt} - C \sin(x_0 + x).$$

Si l'on compare ces équations avec les équations analogues obtenues pour le mouvement d'une aiguille dans un cadre, on voit qu'il suffit de remplacer dans les précédentes HM par C et MG par HS. En se bornant encore au cas des petites déviations, on aura donc

$$L = \varepsilon R, \qquad \lambda = \frac{C_1}{2K}, \qquad \mu = \frac{H^2 S^2}{2KR},$$

$$\lambda' = (\lambda + \mu)(1 + 2\mu\varepsilon) = \frac{1}{2K}\left(C_1 + \frac{H^2 S^2}{R}\right)(1 + 2\mu\varepsilon).$$

Dans le cas actuel, le coefficient d'amortissement λ' peut être très grand, au point de produire un mouvement apériodique. Il faut, pour cela, diminuer d'une manière suffisante le moment d'inertie K du système, ainsi que la résistance R du circuit, et rendre très intense le champ H dans lequel se déplace le cadre mobile.

Les expériences à circuit ouvert et à circuit fermé donneraient encore la résistance R par l'une des expressions

$$R = \frac{H^2S^2}{2C} \cdot \frac{\omega^2 + \lambda^2}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda' = \frac{H^2S^2}{2C} \cdot \frac{\omega'^2 + \lambda'^2}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda.$$

629. Combinaison des deux méthodes. — Quand on utilise le champ terrestre, l'intensité du courant est proportionnelle à la composante horizontale H, dans la boussole des tangentes, tandis qu'elle est en raison inverse de cette composante quand on l'évalue au moyen d'une bobine mobile. La combinaison des deux méthodes permettra donc de déterminer, en même temps, l'intensité du courant et celle du champ terrestre en fonction des dimensions des deux instruments et du coefficient de torsion du bifilaire.

Supposons [1] que l'on fasse passer le même courant I dans les deux appareils ; on aura alors, en affectant d'un accent la déviation et le champ relatif à la bobine mobile et supposant toutes les corrections de réglage effectuées,

$$I = \frac{H}{G} \operatorname{tang} \delta = \frac{C}{H'S} \operatorname{tang} \delta'.$$

Les instruments devant être très éloignés l'un de l'autre, pour éviter toute influence réciproque, il est possible que les champs H et H′ n'aient pas exactement la même valeur. En posant $H' = (1 + \varepsilon)H$, on déterminera le rapport $1 + \varepsilon$ dans une expérience directe, par exemple par les oscillations d'une même aiguille. Les deux expressions du courant donnent alors

$$(22) \qquad I^2 = \frac{C'}{GS(1+\varepsilon)} \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\delta' \qquad H^2 = \frac{GC'}{S'(1+\varepsilon)} \frac{\operatorname{tang}\delta'}{\operatorname{tang}\delta}.$$

Lord Kelvin [2] a proposé de combiner l'expérience de manière à obtenir les deux déviations δ et δ' par un même instrument. Ce galvanomètre double serait constitué par un cadre

[1] F. Kohlrausch, *Pogg. Ann.*, t. CXXXVIII, p. 1; 1869.
[2] Maxwell, *Electricity and Magnetism*, t. II, p. 328.

de diamètre assez grand, ayant en son centre une petite aiguille, comme dans une boussole des tangentes, le cadre et l'aiguille étant tous deux mobiles. On observe les déviations δ et δ' que l'aiguille et le cadre éprouvent, en sens contraires, pendant le passage du courant.

Si les conditions de réglage sont réalisées, l'équilibre de l'aiguille est déterminé par l'équation

$$\text{(23)} \qquad \mathrm{IMG}\cos(\delta+\delta') = \mathrm{MH}\sin\delta.$$

Comme l'action qui s'exerce entre l'aiguille et le cadre est réciproque, on a aussi, pour l'équilibre du cadre,

$$\text{(24)} \qquad \mathrm{HIS}\cos\delta' + \mathrm{IMG}\cos(\delta+\delta') = \mathrm{C}\sin\delta'.$$

On en déduit les deux expressions

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}}\cdot\frac{\cos(\delta+\delta')}{\sin\delta} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{HS}}\,\frac{\tang\delta'}{1+\dfrac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}}\,\dfrac{\cos(\delta+\delta')}{\cos\delta'}}.$$

Le terme de correction $\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}}$ est très petit et le rapport $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}}$ pourra être déterminé d'une manière approchée par les méthodes habituelles.

L'appareil permettrait d'ailleurs de faire cette correction directement, sans avoir recours à aucune observation étrangère. En effet, si on fixe l'aiguille dans sa position primitive, indépendamment du cadre, et qu'on observe la déviation δ_1 du cadre produite par le même courant, la condition d'équilibre est alors

$$\mathrm{C}\sin\delta_1 = \mathrm{I}(\mathrm{HS}+\mathrm{MG})\cos\delta_1 = \mathrm{IHS}\left(1+\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}}\right)\cos\delta_1.$$

Comparant avec l'équation (24), il en résulte

$$\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}}\,\frac{\cos(\delta+\delta')}{\cos\delta'} = \frac{\tang\delta_1 - \tang\delta'}{\dfrac{\sin\delta'}{\cos(\delta+\delta')} - \tang\delta_1}.$$

L'idée de Lord Kelvin ne paraît pas avoir été encore réalisée sous cette forme simple. La précision de la méthode exige que les deux déviations soient de même ordre ; on ne pourrait arriver à ce résultat qu'avec un cadre très léger, ayant seulement quelques tours de fil et porté par une suspension à coefficient très faible. Dans ces conditions, il serait difficile de rendre le cadre assez rigide pour connaître exactement ses dimensions, et de déterminer son moment d'inertie pour en déduire le couple de torsion. On peut éviter tous ces inconvénients en utilisant une des dispositions employées par Weber pour la boussole des tangentes.

L'aiguille est placée en dehors du cadre dans une position principale, sur l'axe ou dans le plan moyen, et à une distance assez grande pour que l'action du courant soit considérablement diminuée ; on peut alors donner à la bobine un grand nombre de tours et employer une suspension dont le couple directeur se détermine aisément.

Supposons, par exemple, la bobine étant réglée par rapport au champ, qu'on place l'aiguille sur l'axe à une distance d du centre ; appelons δ et δ' les déviations de l'aiguille et du cadre produites par le passage d'un courant I, $x = d\cos\delta'$ et $y = d\sin\delta'$ les coordonnées du milieu P de l'aiguille par rapport à l'axe et à une droite située dans le plan moyen de la bobine pour sa nouvelle position.

Réduisant d'abord le cadre à la spire de rayon moyen a, les composantes X et Y, au point P, de l'action relative à l'unité de courant, peuvent être calculées comme au n° 566.

Le couple produit sur l'aiguille a pour expression

$$M[X\cos(\delta+\delta')+Y\sin(\delta+\delta')] = M\cos(\delta+\delta')[X+Y\tang(\delta+\delta')].$$

Si les déviations restent petites, on remplacera X et Y par leurs développements en série en fonction de y, en négligeant les termes d'ordre supérieur au second ; le dernier facteur devient alors

$$2\pi\frac{a^2}{u^3}\left\{1+\frac{3}{2}\frac{d^2}{u^2}\sin\delta'\left[\cos\delta'\tang(\delta+\delta')-2\left(1-\frac{5}{4}\frac{a^2}{u^2}\right)\sin\delta'\right]\right\}.$$

Si l'aiguille est à une distance notable du cadre, on peut,

dans le terme de correction, remplacer u par d, les sinus et la tangente par les angles correspondants, et négliger le produit du carré des déviations par le rapport $\frac{a^2}{d^2}$, ce qui donne

$$X + Y \operatorname{tang}(\delta + \delta') = 2\pi \frac{a^2}{u^3}\left[1 + \frac{3}{2}\delta'(\delta - \delta')\right].$$

Pour tenir compte de la longueur de l'aiguille, on multipliera ce résultat par le facteur habituel (**574**), qui se réduit sensiblement à $1 - 3\frac{l^2}{d^2}$. On a donc l'expression

$$D = X + Y \operatorname{tang}(\delta + \delta') = 2\pi \frac{a^2}{u^3}\left[1 + \frac{3}{2}\delta'(\delta - \delta') - 3\frac{l^2}{d^2}\right],$$

dans laquelle on remplacera u^2 par

$$x^2 + a^2 = d^2 \cos^2 \delta' + a^2.$$

Enfin, pour une bobine, on substituera au facteur principal $2\pi\frac{a^2}{u^3}$, qui représente l'action du cadre sur l'axe, la valeur de G donnée par l'équation (10) du n° **560**.

La valeur du facteur D ainsi déterminée doit remplacer la constante galvanométrique G dans les équations d'équilibre de l'aiguille et du cadre.

On calculerait d'une manière analogue, par les formules du n° **599**, les expériences relatives au cas où l'aiguille serait située dans le plan moyen de la bobine.

630. Siphon recorder. — Dans un champ magnétique très intense, les appareils à cadre mobile peuvent acquérir une grande sensibilité, en même temps que l'amortissement est très rapide. Lord Kelvin a mis à profit cette propriété dans la construction du *siphon recorder*, employé comme récepteur pour la télégraphie sous-marine (fig. 166). La bobine s est enroulée sur un cadre rectangulaire mince, placé entre les pôles d'un électro-aimant dont les extrémité A et B sont indiquées sur la figure ; en outre, une masse fixe de fer doux f occupe l'espace vide au milieu du cadre et augmente l'intensité du champ dans la région que traverse le fil. Le cadre est

attaché à une suspension bifilaire ; la partie inférieure porte un poids Q qui glisse le long d'une planchette plus ou moins inclinée sur la verticale et sert à régler la tension. Le courant est amené par deux spirales très flexibles en communication avec les boutons *p* et *q*.

Le nom de *siphon recorder*, ou enregistreur à siphon, provient d'un détail de construction. Le cadre agit par un fil *ab* et des leviers amplificateurs sur un tube de verre très fin et

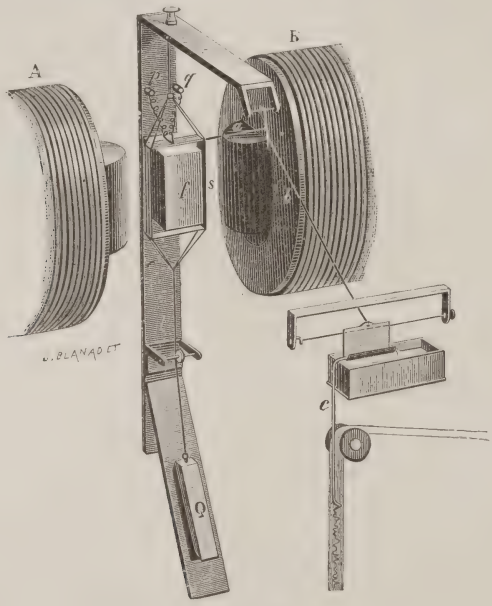


Fig. 166.

très léger *c*, courbé en siphon, et dont la courte branche plonge dans un liquide coloré. Le liquide, étant électrisé par une petite machine électrique à rotation (*mouse mill*), est projeté par le tube sur une bande de papier mobile. Les mouvements du cadre se transmettent au siphon et produisent sur le papier un trait continu, avec des dents à droite et à gauche qui correspond aux signes + ou — du courant.

631. Galvanomètre Deprez-d'Arsonval [1]. — Dans cet appareil (fig. 167), qui repose sur le même principe, le cadre

[1] Deprez et d'Arsonval, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIV, p. 1347; 1882.

mobile est suspendu entre deux fils métalliques qui servent à amener le courant et dont on règle la tension par un ressort à vis. Le champ est produit par un aimant en fer à cheval, à branches très rapprochées, et un cylindre creux en fer doux est placé dans l'intérieur du cadre. La lecture des déviations se fait par un miroir attaché au cadre.

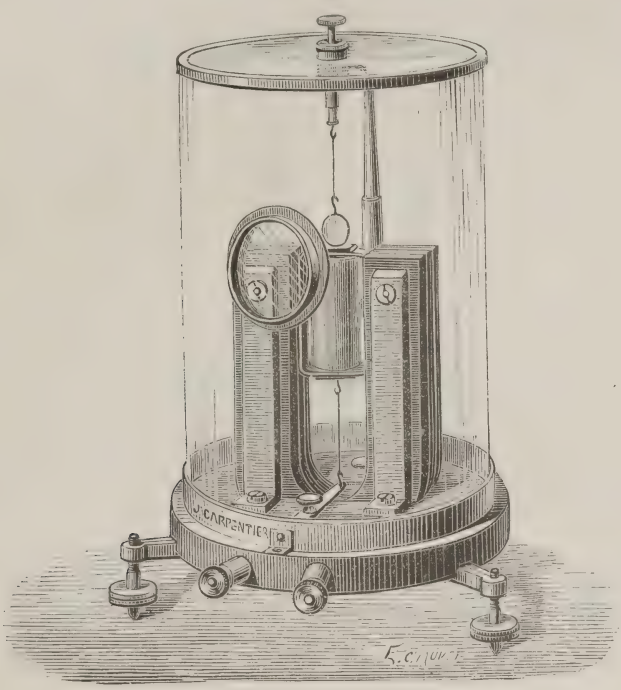


Fig. 167.

Ce galvanomètre est remarquable par la fixité du zéro, la sensibilité et l'amortissement rapide des oscillations; son usage s'est beaucoup répandu.

632. Galvanomètre de M. Lippmann(1). — Le champ magnétique agit ici sur un conducteur liquide parcouru par le courant. Deux tubes verticaux contenant du mercure (fig. 168), communiquent par leur partie inférieure avec une cavité très étroite comprise entre deux lames de verre parallèles, et située

(1) G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCVIII, p. 1256; 1884.

dans un champ magnétique dont la direction est perpendiculaire au plan des lames.

Le courant I, amené par deux lames de platine, traverse verticalement le liquide situé dans cette cavité. Si la cavité est rectangulaire et de hauteur a, l'action de la composante horizontale H du champ, perpendiculaire à la nappe du courant, est égale à $\mathrm{IH}a$, et tend à déplacer le liquide dans un certain sens ; il s'établit donc une différence de niveau entre les deux branches de mercure. En appelant p la différence de pres-

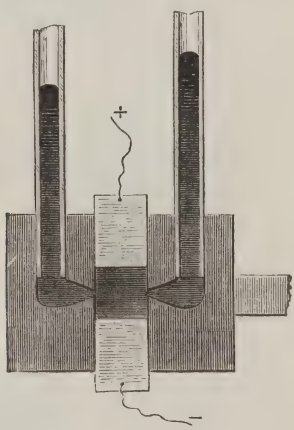


Fig. 168.

sion correspondante et e l'épaisseur de la cavité, la condition d'équibre du liquide est

$$pea = \mathrm{IH}a, \qquad \mathrm{I} = \frac{e}{\mathrm{H}}p.$$

Pour un même courant, la différence de niveau est proportionnelle à l'intensité du champ et en raison inverse de l'épaisseur de la cavité.

633. Électrodynamomètres. — L'action réciproque de deux circuits parcourus par des courants I et I′ peut donner un couple $k\mathrm{II}'$ et une force $h\mathrm{II}'$, les coefficients k et h étant définis par la forme et la position relative des circuits.

On peut remarquer ici que le produit II′ de deux courants représente une force mécanique (**329**) ; il en résulte que le facteur k est une longueur et le facteur h un nombre abstrait. Si donc on veut employer cette méthode pour des me-

sures absolues, en faisant passer le même courant dans les deux circuits, la détermination expérimentale du couple kI^2 exigera encore que l'on connaisse exactement l'une des longueurs qui entrent dans la construction de l'appareil; si l'on a déterminé la force hI^2, la valeur du coefficient h ne renferme que les rapports des dimensions de même nature.

Il y a ainsi deux espèces d'électrodynamomètres, suivant que les appareils sont disposés pour mesurer, soit le couple produit par l'action réciproque des circuits, soit l'attraction ou la répulsion qui s'exerce entre eux.

634. Couple de deux courants. — L'électrodynamomètre de Weber [1] se compose d'une bobine mobile de surface S', que nous supposerons à suspension bifilaire, sur laquelle on fait agir le courant d'une bobine fixe. Dans la position initiale d'équilibre, les deux bobines sont à angle droit et, pour diminuer autant que possible l'action de la terre, l'axe de la bobine mobile est parallèle au méridien magnétique.

Si les bobines sont parcourues respectivement par des courants I et I', la bobine mobile est déviée d'un angle δ; le couple de l'action réciproque peut être représenté par $II'GS'\cos\delta$, le facteur G désignant une valeur moyenne de la constante galvanométrique du cadre fixe dans la région occupée par le cadre mobile.

On peut d'abord équilibrer ce couple en donnant à la suspension, par la partie supérieure, une torsion θ qui ramène le cadre dans sa position primitive. On a alors

$$II'GS' = C\sin\theta.$$

L'angle θ change de signe quand on change le sens d'un seul des courants, mais il reste le même quand on renverse en même temps les deux courants; c'est là une propriété caractéristique de l'électrodynamomètre.

Lorsque les deux bobines sont parcourues par le même courant I, on en déduit

$$I^2 = \frac{C}{GS'}\sin\theta.$$

[1] W. Weber, *Electrodyn. Maasbestimm.* 1re partie; 1846.

On peut, au contraire, laisser l'appareil libre et observer la déviation δ; le champ extérieur intervient alors dans la condition d'équilibre, qui devient

$$\Pi' GS' \cos\delta = (C \pm S'I'H) \sin\delta.$$

On doit encore tenir compte des défauts de réglage. Supposons que le méridien fasse un angle α avec l'axe de la bobine mobile et un angle β avec le plan de la bobine fixe.

Les déviations δ_1 et δ_2, obtenues pour deux directions différentes du courant dans la bobine mobile seule, donnent

$$\Pi' GS' \cos(\delta_1 + \alpha + \beta) = C \sin\delta_1 + I'S'H \sin(\delta_1 + \alpha),$$
$$\Pi' GS' \cos(\delta_2 - \alpha - \beta) = C \sin\delta_2 - I'S'H \sin(\delta_2 - \alpha).$$

On aura, de même, pour les déviations δ_3 et δ_4 relatives à un changement de sens du courant dans la bobine fixe,

$$\Pi' GS' \cos(\delta_3 - \alpha - \beta) = C \sin\delta_3 + I'S'H \sin(\delta_3 - \alpha),$$
$$\Pi' GS' \cos(\delta_4 + \alpha + \beta) = C \sin\delta_4 - I''S''H \sin(\delta_4 + \alpha).$$

Lorsque les erreurs d'ajustement α et β sont très petites et que le coefficient C est assez grand par rapport au produit I'S'H, les quatre déviations sont très voisines. En négligeant les termes du second ordre, ces équations donnent

$$\Pi' = \frac{C}{2GS'}\left(\operatorname{tang}\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \operatorname{tang}\frac{\delta_3 + \delta_4}{2}\right),$$

ou sensiblement

$$\Pi' = \frac{C}{GS'} \operatorname{tang}\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}{4}.$$

Avec un ajustement approché, on peut donc négliger l'action de la terre et prendre, comme déviation normale, la moyenne des quatre lectures. En tous cas, le champ extérieur n'intervient que par des termes de correction.

Dans l'appareil de Weber, les deux cadres sont concentriques et la bobine mobile, formée par un grand nombre de spires, occupe une partie notable du vide laissé par la bobine fixe; le calcul de la constante G est assez long.

Dans l'électrodynamomètre construit par Latimer Clark [1] pour l'Association britannique, les deux cadres sont encore concentriques; mais le diamètre de la bobine mobile est petit par rapport à celui de la bobine fixe, et chacune d'elles est formée, comme la boussole de Von Helmholtz, par deux cadres égaux dont la distance est égale à leur rayon moyen.

Les deux bobines étant toujours rectangulaires pour la position primitive d'équilibre, ce qui facilite les calculs, on peut éloigner ces bobines l'une de l'autre à quelque distance, de façon par exemple que la bobine mobile occupe une position principale, c'est-à-dire que son centre soit situé dans le plan moyen ou sur l'axe de la bobine fixe.

Ces dispositions ont été employées par W. Weber dans les expériences qu'il a instituées pour étudier les lois relatives à l'action réciproque des courants.

L'application de cette méthode aux mesures absolues exige que l'on détermine le coefficient C pour chaque appareil et même pour chacune des séries d'expériences.

M. Pellat [2] a construit un instrument dans lequel le couple électrodynamique est évalué par des poids agissant à l'extrémité d'un fléau de balance; les constantes de l'appareil sont déterminées par les éléments de construction.

Afin de rendre le calcul plus facile, le circuit fixe est une bobine cylindrique horizontale, assez longue pour que le champ intérieur soit à peu près uniforme dans une certaine étendue. Le circuit mobile est une bobine à axe vertical située au centre de la première et attachée à un fléau de balance qui oscille dans le méridien vertical de la bobine fixe. Le même courant passe dans les deux systèmes; la communication avec la seconde bobine est faite par des fils d'argent très fins situés au voisinage du couteau, et disposés de manière à ne pas troubler les oscillations de la balance.

Si l'action du courant est compensée par p grammes agissant à l'extrémité d'un bras de levier de longueur l, la condition d'équilibre est, abstraction faite du champ terrestre,

$$I^2 GS' = pgl.$$

(1) Maxwell, *Electr. and Magnet.*, t. II, p. 339.
(2) H. Pellat, *Journ. de Phys.* [2], t. VI, p. 175; 1887.

Soient N et N′ les nombres de spires des deux bobines, L la longueur de la première, a' le rayon moyen de la seconde. A part les termes de correction, on a

$$G = 4\pi \frac{N}{L}, \qquad S' = N'\pi a'^2, \qquad GS' = 4\pi^2 a'^2 \frac{NN'}{L}.$$

Les formules précédemment établies (**570** et **571**) permettent de calculer le champ de la grande bobine au voisinage de la section médiane; le produit GS′ doit alors être remplacé par une intégrale qui ne diffère de sa valeur approchée que par un facteur très voisin de l'unité.

On élimine l'influence du champ terrestre, soit en plaçant la balance dans un plan perpendiculaire au méridien, soit à l'aide de deux expériences avec des courants de sens contraires dans la bobine fixe.

Dans l'appareil de M. Pellat, un courant de 0,3 ampère est équilibré environ par $0^{gr},418$ et la précision de mesure des différentes dimensions est telle que l'erreur relative sur le courant ne dépasse pas 0,0005. L'exactitude même des pesées est beaucoup plus grande et donne une approximation de 0,0001 dans les expériences de comparaison.

635. Attractions et répulsions. — L'action réciproque qui s'exerce entre deux bobines A et A′ de même axe passe par une valeur maximum (**592**) lorsque la distance des centres est convenablement choisie. Il y a évidemment avantage à choisir cette position pour l'équilibre, puisque l'action est alors sensiblement constante.

A. Lallemand [1] suspendait à un fil métallique un levier horizontal portant à l'une de ses extrémités une bobine plate, en spirale, à laquelle le courant était transmis par des godets à mercure situés sur l'axe. Une spirale fixe située en regard de la première agissait par répulsion; le courant est alors proportionnel à la racine carrée de la torsion nécessaire pour ramener les spirales à la même distance.

On peut éliminer l'action de la Terre en plaçant le levier perpendiculaire au méridien, mais il est préférable, au lieu d'équilibrer la spirale par un contre-poids, de monter à l'autre

[1] A. Lallemand, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. XXII, p. 419; 1848.

extrémité du levier une seconde spirale identique à la première et parcourue par le même courant, de manière à constituer un système astatique (**325**).

Les spirales ne se prêtent pas facilement au calcul. Dans l'électrodynamomètre employé par Maxwell [1] pour la détermination du rapport des unités (**419**), le levier horizontal porte à chaque extrémité une bobine située entre deux autres bobines fixes dont les dimensions et la distance sont choisies de manière à réaliser la condition du maximum (**597**). L'action électrodynamique est évaluée soit par la torsion qui ramène à la position primitive, soit par la déviation.

Il est alors préférable d'avoir recours directement à la balance. Joule [2] employa ainsi, pour étudier les variations d'un courant dans ses recherches de calorimétrie, un système de trois bobines symétriques, de dimensions égales et constituées par des spirales plates.

Si l'on tient compte seulement des fils voisins, en considérant chaque élément comme soumis à l'action d'un courant parallèle indéfini, et qu'on désigne par L la longueur du fil de chaque spirale, par a le rayon de la surface, par p la charge nécessaire pour ramener la spirale mobile au milieu de l'intervalle des deux autres, le courant sera donné par une expression de la forme

$$I^2 = \frac{a^2}{4L^2} gp(1 + \varepsilon),$$

dans laquelle le terme de correction ε était déterminé par comparaison avec une boussole des tangentes.

Lord Rayleigh s'est servi d'une disposition analogue (**593**), mais avec la précaution de remplacer les spirales par des bobines satisfaisant à la condition du maximum. L'avantage de ce système de trois bobines est que l'action mutuelle dépend surtout des rayons moyens et que les dimensions des gorges n'interviennent que par un terme de correction; la régularité d'enroulement n'est pas absolument nécessaire.

Cazin [3] avait aussi employé la balance pour déterminer

(1) Cl. Maxwell, *Phil. Trans.* R. S. L. for 1868, p. 643.
(2) J. P. Joule, *Br. Ass. Rep.*, 1864. — *Scientif. pap.*, t. I, p. 584.
(3) Cazin, *Ann de Chim. et de Phys.*, [4], t. I, p. 257; 1864.

l'action, attractive ou répulsive, de deux cadres rectangulaires (406), mais il est alors nécessaire de connaître exactement la distance des deux courants ou la distance moyenne des fils si les cadres contiennent plusieurs spires.

J'ai utilisé, dans le même but [1], l'action de deux bobines circulaires (596) sur une longue bobine cylindrique, dont la base inférieure est située dans le plan de symétrie des deux premières. Le calcul est alors simple, mais l'inconvénient de cette méthode est qu'une grande partie des fils de la bobine cylindrique n'interviennent que pour une fraction très petite et que l'enroulement doit être bien régulier.

Comme dans tous les appareils qui exigent le retour d'un organe mobile à un repère déterminé, des précautions particulières sont nécessaires, quand on fait usage de la balance, pour éliminer, par une suite d'épreuves régulières, les variations presque inévitables du courant.

Enfin nous citerons une disposition de Von Helmholtz [2] qui est d'un emploi commode et pourrait aussi se prêter aux mesures absolues. Aux plateaux d'une balance ordinaire on suspend deux bobines identiques qui se meuvent devant deux autres bobines fixes, dont l'une agit par attraction, l'autre par répulsion, sur la bobine mobile correspondante. On règle la position des bobines fixes par la condition que le passage du courant n'altère ni la stabilité ni la sensibilité de la balance; l'action est alors maximum.

Le courant est amené dans les bobines mobiles, par des bandes très minces de clinquant, ayant de 5 à 6 millimètres de largeur et $8^{m},30$ de longueur; la résistance de ces bandes est très faible, elles ne s'échauffent pas d'une manière notable, grâce à leur grande surface, et ne nuisent pas aux oscillations. L'appareil permet de mesurer, à 0,0005 près, un courant équilibré par 1 gramme.

636. Dérivations et shunts. — Lorsque le courant à mesurer a une intensité trop grande eu égard à l'échelle du galvanomètre, on en mesure par dérivation une fraction déterminée. Le courant principal aboutissant aux deux bornes du galvanomètre est divisé en deux parties, dont l'une passe par le

(1) E. Mascart, *Journal de Physique* [2], t. I, p. 109; 1882.
(2) Helmholtz, *Wied. ann.*, t. XIV, p. 52; 1881. — *J. de Phys.* [2], t. I, p. 52; 1882.

cadre et l'autre par un conducteur en dérivation, auquel on donne habituellement le nom de *shunt*.

Soit g la résistance du galvanomètre, s celle du shunt, I le courant principal, i le courant qui passe dans le galvanomètre muni du shunt; on a

$$\frac{i}{s} = \frac{I - i}{g} = \frac{I}{g+s}, \qquad I = \frac{g+s}{s}\, i = mi.$$

Le facteur m, par lequel il faut multiplier la valeur i du courant observé pour avoir celle du courant principal I, est *le pouvoir multiplicateur* du shunt.

La résistance g_1 du système formé par le shunt et le galvanomètre est donnée par la relation

$$\frac{1}{g_1} = \frac{1}{g} + \frac{1}{s} = \frac{g+s}{gs} = \frac{m}{g}.$$

Pour réaliser un shunt de pouvoir m, il est préférable, au lieu de mesurer la résistance s, d'ajuster le fil sur les deux bornes du galvanomètre jusqu'à ce que la résistance g_1 de l'ensemble soit le m^e de g.

Supposons que le circuit renferme une force électromotrice constante E; soit R la résistance extérieure jusqu'aux bornes du galvanomètre, I_0 l'intensité qu'aurait le courant dans le circuit R seul, I_1 son intensité dans la résistance $R + s$ du circuit et du shunt, I_2 dans la résistance R et le galvanomètre, et I quand on met sur le galvanomètre un shunt de pouvoir multiplicateur m. Les équations

$$E = I_0 R = I_1 (R + s) = I_2 (R + g) = I\left(R + \frac{g}{m}\right) = i(mR + g)$$

permettront de calculer les différentes intensités I_0, I_1 et I_2 en fonction de l'intensité totale I ou de l'intensité observée i.

Si l'on veut que l'intensité ne change pas dans le circuit extérieur, quel que soit le shunt mis sur le galvanomètre, il suffit d'insérer en même temps dans le circuit principal une résistance ρ telle que

$$g = \frac{g}{m} + \rho, \qquad \rho = g\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

L'opération se fait d'une manière automatique par la disposition représentée dans la figure 169 : s, s', s'' sont les shunts de résistances $\frac{g}{m-1}$, $\frac{g}{m'-1}$, $\frac{g}{m''-1}$ et ρ, ρ', ρ'' des résistances qui satisfont aux équations

$$\rho = g\left(1 - \frac{1}{m}\right), \quad \rho + \rho' = g\left(1 - \frac{1}{m'}\right), \quad \rho + \rho' + \rho'' = g\left(1 - \frac{1}{m''}\right).$$

Une cheville placée en a laisse passer le courant entier dans le galvanomètre G; en b, elle introduit à la fois le shunt s

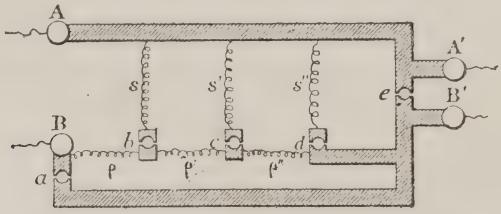


Fig. 169.

avec la résistance compensatrice ρ, et ainsi de suite pour les autres positions c et d. Quand on la met en e, elle ferme le galvanomètre sur lui-même; c'est une position de sûreté.

Un système de shunts, munis de leurs résistances *compensatrices*, forme le complément nécessaire de tout galvanomètre de précision; les pouvoirs multiplicateurs sont habituellement 10, 100 et 1000.

L'emploi des shunts facilite beaucoup les opérations galvanométriques, mais il entraîne quelques inconvénients qui exigent une grande circonspection toutes les fois que l'on doit faire des mesures exactes. Un des principaux résulte des variations de température qui, se faisant sentir inégalement sur le fil de la bobine et sur celui du shunt, altèrent d'une manière inconnue le rapport de leurs résistances et, par suite, la valeur du pouvoir multiplicateur.

637. Chutes de potentiel. — Une disposition fréquemment employée, et qui est surtout avantageuse quand il s'agit de courants très intenses, consiste à mettre les extrémités du

fil galvanométrique en communication avec deux points A et B du circuit principal, comprenant entre eux une résistance connue s, qui joue le rôle de shunt. Si le galvanomètre a une résistance considérable par rapport à celle du shunt, la résistance composée

$$g_1 = \frac{g}{m} = s\,\frac{g}{g+s}$$

diffère très peu de la résistance s, de sorte que l'introduction du galvanomètre en dérivation dans le circuit consideré n'altère pas d'une manière sensible l'intensité du courant total. On évalue ainsi la différence de potentiel $E = V_1 - V_2$ qui existe entre les deux points A et B en comparant la déviation obtenue δ, correction faite de la graduation, avec la déviation δ_0 que donne une force électromotrice étalon E_0, comme celle d'un couple Daniell, dont la résistance propre est faible par rapport à celle du galvanomètre. On a alors

$$\frac{E}{\delta} = \frac{E_0}{\delta_0}, \qquad \text{d'où} \qquad I = \frac{E}{s} = \frac{E_0}{s}\,\frac{\delta}{\delta_0}.$$

L'introduction d'un galvanomètre à très grande résistance entre deux points A et B équivaut à l'emploi d'un électromètre dont les électrodes seraient reliées aux mêmes points. L'électromètre, une fois gradué par une force électromotrice étalon, donne la différence de potentiel E, d'où l'on déduit l'intensité I du courant.

En particulier, si l'aiguille de l'électromètre à quadrants est reliée à l'une des paires de quadrants (609) et ceux-ci séparément aux points A et B, la déviation θ peut être représentée par

$$2\theta = k(V_1 - V_2)^2 = kE^2.$$

En appelant θ_0 la déviation produite par la force électromotrice étalon E_0, on a encore [1]

$$\frac{E^2}{E_0^2} = \frac{\theta}{\theta_0}, \qquad I = \frac{E}{s} = \frac{E_0}{s}\sqrt{\frac{\theta}{\theta_0}}.$$

[1] JOUBERT, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCI, p. 161; 1880.

La différence de potentiel E entre deux points peut être due simplement au passage du courant dans la résistance interposée, ou comprendre en outre une force électromotrice de nature quelconque. Dans tous les cas, si l'on connaît la valeur I du courant et la différence de potentiel E, le produit EI représente le travail électrique effectué entre ces deux points par unité de temps.

Pour déterminer séparément ces deux facteurs, il suffit de mettre successivement l'appareil, galvanomètre ou électromètre, en communication avec les points A et B comprenant la force électromotrice totale E, et avec deux autres points A′ et B′ séparés seulement par une résistance connue R.

Le travail EI peut encore être évalué directement par l'électromètre à quadrants [1]. Soient V_1 et V_2, V'_1 et V'_2 les potentiels respectifs des points A et B, A′ et B′; on met les deux paires de quadrants en communication avec A′ et B′. Si l'aiguille est reliée successivement aux points A et B, les déviations correspondantes étant α et β, on a

$$\alpha = k(V'_1 - V'_2)\left[V_1 - \frac{V'_2 + V'_1}{2}\right],$$

$$\beta = k(V'_1 - V'_2)\left[V_2 - \frac{V'_2 + V'_1}{2}\right];$$

$$\alpha - \beta = k(V'_1 - V'_2)(V_1 - V_2) = kRI.E,$$

$$EI = \frac{\alpha - \beta}{kR}.$$

Enfin, si l'on emploie un électrodynamomètre dont la bobine fixe est dans le circuit principal, et dont la bobine mobile, de grande résistance, est placée en dérivation sur les deux points A et B, l'action réciproque est proportionnelle au produit EI, c'est-à-dire à la puissance électrique entre ces deux points; c'est le principe des *wattmètres*.

638. Graduation des galvanomètres. — Dans les instruments à miroir, où les déviations restent très petites, l'intensité du courant est sensiblement proportionnelle à la tangente de la déviation, ou à la simple déviation, et il en est de même pour

[1] Potier, *Journal de Physique*, t. IX, p. 445; 1881.

tous les galvanomètres tant que les déviations restent comprises entre certaines limites.

Toutefois cette proportionnalité cesse rapidement d'être admissible quand les aiguilles sont d'une longueur notable par rapport aux dimensions du cadre; une graduation empirique est alors nécessaire.

Quand on a à sa disposition un galvanomètre à graduation systématique, comme une boussole de sinus ou une boussole de tangentes, on fait passer un même courant dans l'instrument étalon et dans le galvanomètre étudié, en ayant recours à l'emploi d'un shunt au besoin, pour que les déviations dans les deux instruments soient d'un ordre de grandeur convenable. Faisant varier ensuite l'intensité du courant commun, les indications du galvanomètre gradué donneront la graduation de l'autre. Toutefois, on préfère éviter autant que possible l'emploi d'un appareil auxiliaire.

La méthode de Poggendorff [1] consiste à transformer le galvanomètre en boussole des sinus. On place l'instrument sur un plateau dont la rotation autour d'un axe vertical soit mesurée par un cercle gradué. Le cadre étant d'abord parallèle au méridien, on y fait passer un courant constant, la déviation δ_0 donne une équation de la forme

$$I = H \frac{\sin \delta_0}{\varphi(\delta_0)}.$$

On fait alors tourner le cadre des quantités α', α'', α''', ..., à partir de la position initiale, et on observe les déviations correspondantes δ', δ'', δ''', ..., de l'aiguille par rapport au cadre pour le même courant. D'après les relations

$$\frac{I}{H} = \frac{\sin \delta_0}{\varphi(\delta_0)} = \frac{\sin(\alpha' + \delta')}{\varphi(\delta')} = \frac{\sin(\alpha'' + \delta'')}{\varphi(\delta'')} = \ldots,$$

les fonctions $\varphi(\delta)$ sont proportionnelles aux sinus d'angles déterminés par expérience; on en déduit la table des valeurs de $\frac{\sin \delta}{\varphi(\delta)}$ relatives à la position normale du cadre.

[1] Poggendorff, *Pogg. Ann.*, t. LVI, p. 324; 1842.

On peut ainsi déterminer la correction d'une boussole des tangentes. Si la loi des tangentes était exacte, la valeur de $\varphi(\delta)$ devrait, en effet, être proportionnelle à $\cos\delta$.

Pétrina [1] utilisait les propriétés des courants dérivés en plaçant le galvanomètre en dérivation entre deux points d'un conducteur rectiligne homogène parcouru par un courant. Si la résistance g du galvanomètre est très grande par rapport à la résistance s comprise entre les deux points, l'intensité I du courant principal et celle i du galvanomètre satisfont à la relation simple

$$gi = s\mathrm{I}.$$

L'intensité I étant constante, l'intensité i est proportionnelle à la résistance s, c'est-à-dire à la distance des points où se font les prises de contact.

La méthode la plus rapide est encore d'utiliser la loi d'Ohm en faisant varier suivant une loi connue, par l'addition de résistances étalonnées, l'intensité du courant produit par une force électromotrice constante, comme celle d'un couple Daniell. Si la résistance propre du couple est très faible par rapport à la résistance totale, les différentes intensités $\mathrm{I}, \mathrm{I}', \mathrm{I}'', \ldots$ du courant, qui correspondent à des résistances $\mathrm{R}, \mathrm{R}', \mathrm{R}'', \ldots$ de la portion du circuit extérieure au galvanomètre, donnent les relations

$$\mathrm{I}(\mathrm{R}+g) = \mathrm{I}'(\mathrm{R}'+g) = \mathrm{I}''(\mathrm{R}''+g), = \ldots.$$

Les rapports des courants seront ainsi déterminés par des rapports de résistances.

L'expérience devient très simple quand le galvanomètre est muni d'un shunt bien ajusté avec sa résistance compensatrice. Le shunt étant placé sur le galvanomètre, on règle la résistance extérieure de manière à obtenir une déviation de n divisions; on enlève alors le shunt, le courant principal ne change pas, mais il devient m fois plus grand dans le galvanomètre et donne une nouvelle déviation n', laquelle équivaut à mn.

Beaucoup d'autres méthodes ont été proposées pour le

[1] Pétrina, *Holger's Zeitschrift.*, Bd., I, p. 171; 1842.

même objet, mais nous n'insisterons pas davantage sur cette question qui a perdu la plus grande partie de son intérêt.

639. Expériences de comparaison. — Soient, pour deux galvanomètres, G et G′ les constantes des cadres supposées indépendantes de la déviation, H et H′ les composantes efficaces du champ extérieur sur chacune des aiguilles, δ et δ' les déviations, corrigées de la graduation, qui correspondent au passage d'un même courant I dans les deux instruments; on a évidemment la relation

$$I = \frac{H}{G}\delta = \frac{H'}{G'}\delta'.$$

Lorsque les sensibilités des deux instruments sont de même ordre, les déviations δ et δ' sont données directement par le courant commun; dans le cas contraire, on interpose un shunt sur l'instrument le plus sensible.

Si le galvanomètre de comparaison est un instrument absolu, cette expérience donne immédiatement le facteur par lequel il faut multiplier les indications du second pour en déduire l'intensité du courant en valeurs absolues.

Si le champ extérieur était le même pour les deux instruments, on en déduirait aussi le rapport des constantes galvanométriques des deux cadres; mais les influences locales permettent rarement d'obtenir des champs identiques, même en des points assez rapprochés.

Pour déterminer directement la constante galvanométrique G′ d'un galvanomètre, on le place au milieu du cadre d'une boussole des tangentes, les plans moyens des spires étant parallèles, et on met les deux cadres en dérivation sur deux points d'un même circuit, de manière à constituer une sorte de galvanomètre différentiel. Soit I l'intensité dans la boussole, I′ dans le galvanomètre et δ la déviation; on a

$$H \operatorname{tang} \delta = GI - G'I'.$$

L'action du galvanomètre serait en général prépondérante, mais on peut la réduire par une résistance convenable. Si on ramène ainsi l'aiguille au zéro et que les résistances totales

des deux instruments soient g et g', on a alors

$$\frac{G'}{G} = \frac{I}{I'} = \frac{g'}{g}.$$

Il est important de remarquer que cette expérience donne, par la comparaison des résistances g et g', le rapport des rayons d'action moyenne des deux cadres (**560**) et, par suite, le rapport de leurs rayons moyens, lorsque les gorges ont une forme assez simple pour que l'on puisse calculer facilement les termes de correction.

640. Tarage d'un galvanomètre. — Dans les galvanomètres à aiguilles astatiques ou à aimants correcteurs, la sensibilité peut changer d'une manière notable, soit par les variations de température, soit par le déplacement des aimants ; il serait nécessaire de répéter fréquemment la comparaison avec un instrument absolu, mais cette méthode n'est pas assez expéditive pour les mesures pratiques qui ne demandent pas une grande précision.

Le plus simple est d'avoir recours à un étalon de force électromotrice E, par exemple un couple Daniell, que l'on réunit au galvanomètre par l'intermédiaire d'une résistance convenable R (20 000 ou 30 000 ohms avec les galvanomètres astatiques de Lord Kelvin).

Supposons, en outre, que l'on emploie un shunt de pouvoir multiplicateur m; la déviation observée correspondant à un nombre x de divisions, l'intensité i du courant dans le galvanomètre peut s'écrire (**636**)

$$i = \frac{I}{m} = \frac{E}{mR + g} = \frac{x}{N}.$$

Comme cette intensité est sensiblement proportionnelle à la déviation, la constante N désigne le nombre de divisions qui correspondrait à l'unité de courant.

Appelant R_1 la résistance que devrait avoir le circuit pour que la force électromotrice employée E produise une déviation d'une division, on a

$$\frac{1}{N} = \frac{E}{R_1}, \qquad \text{ou} \qquad R_1 = NE.$$

La valeur de R_1 mesure encore la sensibilité; on l'appelle souvent le *nombre de mérite* du galvanomètre.

Avec les galvanomètres très sensibles, tels qu'on les emploie aujourd'hui, la résistance R est en général très grande par rapport à celle de l'instrument, ce qui donne simplement

$$R_1 = NE = mR.v.$$

Si on exprime la force électromotrice E en volts et la résistance R en ohms, l'intensité i est évaluée en ampères.

Lorsque la résistance propre ρ du couple n'est pas négligeable devant celle du circuit, on peut l'éliminer par une des méthodes suivantes [1].

La disposition de l'expérience étant représentée par la figure 170, on note la déviation du galvanomètre G muni du

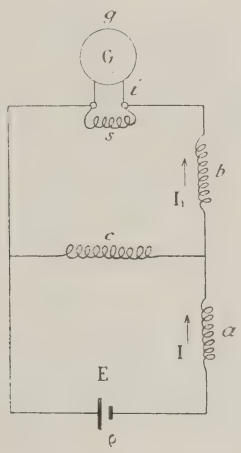


Fig. 170.

shunt s. Appelant a, b et c les résistances des trois branches indiquées par ces mêmes lettres, g_1 celle du galvanomètre avec son shunt, I le courant dans la branche a et $I_1 = mi$ dans la branche b, on a

$$\frac{I_1}{c} = \frac{I - I_1}{g_1 + b} = \frac{I}{c + g_1 + b},$$

(1) Hockin, *Report of the Committee of electrical Standards* (*Brit. Assoc.*), edited by F. Jenkin, p. 149.

et, comme la résistance totale du circuit est

$$R = \rho + a + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{b+g_1}} = \rho + a + \frac{c(b+g_1)}{c+b+g_1},$$

$$E = IR = \frac{I_1}{c} R(c+g_1+b) = \frac{I_1}{c}[(\rho+a)(c+b+g_1)+c(b+g_1)].$$

On remplace alors a par une autre résistance très différente a' et on donne à la branche b une résistance b' telle que le courant reste le même dans le galvanomètre, c'est-à-dire que l'intensité I_1 ne change pas.

La nouvelle résistance R' devant satisfaire à la condition

$$R(c+g_1+b) = R'(c+g_1+b'),$$

qui détermine la valeur de ρ, il en résulte

$$\frac{E}{I_1} = c\left[\frac{a'-a}{b-b'}\left(1+\frac{g_1+b}{c}\right)\left(1+\frac{g_1+b'}{c}\right)-1\right],$$

$$i = \frac{I_1}{m} = \frac{x}{N} = \frac{Ex}{R_1},$$

$$R_1 = mx\frac{E}{I_1} = c\left[\frac{a'-a}{b-b'}\left(1+\frac{g_1+b}{c}\right)\left(1+\frac{g_1+b'}{c}\right)-1\right]mx.$$

Il est encore plus simple, après avoir observé le courant dans le premier état, de couper ensuite le conducteur c et de remplacer b par une résistance b_1 telle que la déviation ne change pas. On a alors

$$(\rho+a)\left(1+\frac{g_1+b}{c}\right)+g_1+b = \rho+a+g_1+b_1 = \frac{b_1-b}{g_1+b}c+g_1+b_1,$$

$$R_1 = c\left(\frac{b_1-b}{g_1+b}+\frac{g_1+b_1}{c}\right)mx.$$

641. Observation des déviations. — Avec les galvanomètres dont l'amortissement est rapide, l'équilibre s'établit au bout d'un temps assez court pour que la déviation relative au courant permanent s'observe sans difficulté. Dans les autres cas,

on a recours à un amortisseur auxiliaire, aimant ou courant, mais on peut aussi utiliser le courant lui-même par l'une des méthodes suivantes, qui sont dues à Gauss, et qui conviennent surtout pour l'observation de systèmes, aimants ou cadres mobiles, dont le moment d'inertie est considérable.

L'établissement du courant déplace d'un angle δ la position d'équilibre. Lorsque le mouvement est pendulaire, l'arc de de première impulsion relatif au courant permanent est 2δ; mais si on supprime le courant quand l'arc parcouru est la moitié de la déviation permanente δ, ce qui correspond au tiers de la demi-période τ, le système a acquis une vitesse suffisante pour atteindre la position d'équilibre, avec une vitesse nulle, à l'époque $\frac{2\tau}{3}$; si on rétablit alors le courant, l'appareil restera immobile. Comme il y a toujours un peu d'amortissement, et que le courant n'est pas supprimé ou rétabli exactement aux époques voulues, il se produit encore de petites oscillations dont on peut prendre la moyenne.

De même, pour ramener le système au zéro avec une vitesse nulle, il faut interrompre le courant pendant un tiers du temps τ, le rétablir pendant le deuxième tiers, puis le supprimer d'une manière définitive.

Cette règle ne suffit plus lorsque l'amortissement est notable. Gauss a calculé, par les formules du n° **532**, et pour différentes valeurs du décrément $\lambda\tau$, la table suivante qui donne les temps $t_1 - t_0$ et $t_2 - t_1$ pendant lesquels on doit maintenir et supprimer le courant pour qu'après rétablissement du courant à l'époque t_2, l'appareil arrive à la position d'équilibre avec une vitesse nulle :

$\lambda\tau$.	$\frac{t_1 - t_0}{\tau}$.	$\frac{t_2 - t_1}{\tau}$.
0	0,333	0,333
0,1	0,376	0,291
0,2	0,418	0,251
0,3	0,459	0,214
0,4	0,498	0,180
0,5	0,535	0,149
0,6	0,569	0,123

La première fraction croît avec l'amortissement et la seconde en sens contraire ; leur somme est d'abord égale à deux tiers et augmente très lentement avec la valeur de $\lambda\tau$.

Il est inutile de pousser plus loin la table, car, si l'amortissement est plus rapide, les oscillations s'éteignent assez vite pour qu'il n'y ait pas lieu de s'en préoccuper.

On corrigera les changements d'intensité du champ extérieur en répétant souvent la tare du galvanomètre, mais en réalité on doit se préoccuper surtout d'éliminer les changements de direction qui correspondent, pour le champ terrestre, aux variations de déclinaison. Au lieu de déterminer le zéro à chaque observation, il vaut mieux renverser le courant et observer les élongations de part et d'autre, ce qui élimine la position du zéro. Cette inversion est surtout nécessaire dans les observations continues ; on renverse alors le courant à intervalles réguliers, toutes les trois oscillations par exemple. Pour que celles-ci restent très petites, on laisse le courant interrompu juste pendant la durée τ d'une oscillation avant de le rétablir en sens contraire. Désignant par x_1, x_2, x_3 ; x_4, x_5 x_6 ;... les élongations observées à droite et à gauche, et comptées à partir d'un zéro arbitraire, on aura (540), pour la division x_0 relative à l'écart permanent, une série de valeurs déduites des élongations successives, telles que

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4} + \frac{x_4 + 2x_5 + x_6}{4}\right).$$

642. Arcs d'impulsion. — On pourrait aussi calculer la déviation permanente a_0, comptée à partir de l'équilibre, par l'écart de première impulsion. L'appareil étant d'abord en repos, cet écart est de $2a_0$ quand l'amortissement est nul ; si l'amortissement est notable, l'écart a_1 est une oscillation dont la première partie est a_0, la seconde $a_0\alpha_1$, et l'on a

$$a_1 = a_0(1 + \alpha), \quad a_0 = \frac{a_1}{1 + \alpha}.$$

Quand la déviation est très faible, on peut, par des renversements, obtenir des écarts plus facilement observables. Il suffit, au moment où le système, arrêté à la première élon-

gation, va prendre un mouvement dans la direction contraire, de changer le sens du courant, en le maintenant pendant toute la durée de l'oscillation, et de répéter ensuite plusieurs fois la même manœuvre.

Les écarts successifs dans les deux sens sont alors

$$a_1 = a_0(1+\alpha) = a_0\alpha + a_0,$$

$$a_2 = (a_0 + a_1)\alpha + a_0 = a_0(1+\alpha)(1+\alpha),$$

$$a_3 = (a_0 + a_2)\alpha + a_0 = a_0(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = (a_0 + a_{n-1})\alpha + a_0 = a_0(1+\alpha)(1+\alpha+\dots+\alpha^{n-1}).$$

L'écart limite a relatif à un régime permanent d'inversions donnerait alors

$$a = a_0\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \qquad a_0 = a\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Cette méthode se prêterait difficilement à des mesures précises, mais elle est excellente pour mettre en évidence l'existence d'un courant très faible.

643. Galvanomètre balistique. — L'emploi du galvanomètre pour déterminer la quantité d'électricité que débite un courant momentané, ou une décharge de forme quelconque, exige que la durée de la décharge soit faible par rapport à la période des oscillations de l'aiguille, en d'autres termes, que le courant cesse avant que l'aiguille se soit écartée d'une manière notable de sa position d'équilibre.

On a vu (**365**) que la vitesse angulaire initiale ω_0 imprimée à l'aiguille d'un galvanomètre par la décharge q est déterminée par l'expression

$$K\omega_0 = MGq.$$

D'autre part, si les déviations restent assez faibles et que α_1 soit le premier angle d'écart, on a (**541**)

$$\omega_0 = \alpha_1\sqrt{\omega^2+\lambda^2}\, e^{\frac{\lambda}{\omega}\operatorname{arc\,tang}\frac{\omega}{\lambda}}.$$

Il en résulte, en tenant compte de la relation

$$\frac{MH}{K} = \omega^2 + \lambda^2,$$

$$q = \frac{K}{MG}\,\omega_0 = \frac{H}{G}\,\frac{\omega_0}{\omega^2+\lambda^2} = \frac{H}{G}\,\frac{\alpha_1}{\sqrt{\omega^2+\lambda^2}}\,e^{\frac{\lambda}{\omega}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{\lambda}}.$$

Si τ est la durée d'une oscillation simple, on remplacera ω par sa valeur $\frac{\pi}{\tau}$ et la formule devient

$$q = \frac{H}{G}\cdot\frac{\tau}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2\tau^2}{\pi^2}}}\cdot e^{\frac{\lambda\tau}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\lambda\tau}}.$$

L'étude des oscillations donne la durée τ et le décrément logarithmique correspondant. Dans la plupart des cas, on peut prendre la valeur approchée

$$q = \frac{H}{G}\cdot\frac{\tau}{\pi}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right).$$

Les observations au galvanomètre balistique ne comportent un certain degré d'exactitude que si les oscillations sont assez lentes; cette condition est nécessaire, non seulement pour éliminer l'influence de la durée de décharge, mais aussi pour permettre la lecture des élongations. Si l'on veut répéter une série d'observations successives, on arrêtera chaque fois l'aiguille par un amortisseur auxiliaire, aimant ou courant.

Comme l'aiguille n'est pas absolument immobile au début des expériences, on observe d'abord l'amplitude totale primitive $2\alpha_0$; la décharge étant faite au moment du passage au zéro, il faut ensuite diminuer ou augmenter de α_0 l'angle d'écart observé α_1, suivant que l'impulsion a eu lieu dans le sens ou en sens contraire du mouvement initial.

Quelle que soit la forme de la décharge (**536** et **537**), elle produit le même effet qu'un choc à une époque intermédiaire et, si sa durée totale est petite par rapport à la période d'oscillation, l'amplitude ne dépend, au second ordre près, que de la quantité totale d'électricité. Dans ces mêmes conditions,

l'élongation produite par deux ou plusieurs décharges successives ne dépend que de leur somme algébrique.

On a vu encore (542) comment on peut, par la répétition d'une même décharge à des époques différentes du mouvement oscillatoire, multiplier les angles d'écart ou obtenir un régime permanent par des méthodes de recul, mais ces dispositions compliquées ne donnent jamais de meilleurs résultats que l'observation exacte d'une seule impulsion.

L'emploi des shunts n'est pas permis dans un galvanomètre balistique. Les décharges ne se partagent suivant les lois des courants dérivés, entre le shunt et le galvanomètre, que si l'aiguille reste immobile pendant toute la décharge (385), condition qu'il est presque impossible de réaliser.

L'expérience suivante [1] met bien en évidence l'influence du mouvement de l'aiguille. Deux galvanomètres identiques, placés en dérivation l'un par rapport à l'autre sur le même circuit, reçoivent la décharge d'un condensateur; tous les deux donnent une même déviation, moitié moindre que celle qu'on observe dans chacun d'eux quand il reçoit seul la décharge. Si on recommence l'expérience en fixant l'une des aiguilles, on trouve une déviation beaucoup moindre pour l'aiguille restée libre ; le circuit correspondant est le seul qui soit le siège d'un travail électromagnétique et dont la résistance apparente soit augmentée.

Avec les galvanomètres différentiels employés dans les conditions où l'aiguille reste immobile, l'usage des shunts est légitime, même pour les courants instantanés.

La méthode balistique comporte deux sortes d'erreurs qu'il paraît difficile d'éliminer complètement et qui, dans certains cas, peuvent avoir une influence notable.

En premier lieu, le courant qui traverse le galvanomètre agit pendant un temps très court, mais avec une grande énergie. Est-il permis d'admettre que cette action, qui est perpendiculaire à l'axe de l'aiguille, n'est pas de nature à amener dans son moment magnétique un changement temporaire assez grand pour que l'impulsion reçue ne soit plus égale à celle qui correspondrait au moment primitif?

[1] L. Clark, *Journ. Telegr. Eng.* t. II, p. 16; 1873.

En second lieu, on applique à la correction de l'arc d'impulsion le décrément logarithmique déduit de l'observation des oscillations continues. Ce procédé serait parfaitement correct si l'amortissement était dû uniquement aux courants induits par le mouvement de l'aiguille; mais, lorsqu'une partie notable de l'effet est due à la résistance de l'air, il y a lieu de se demander si cette résistance agit encore de la même manière, en particulier au voisinage de la position d'équilibre, sur un mobile soumis à des oscillations régulières, que sur ce même mobile, primitivement au repos, et qui se meut sous l'action d'un choc. La résistance de l'air doit être plus grande dans le second cas que dans le premier; par suite, la correction est insuffisante. Il est vrai que la même cause a pour effet d'augmenter la durée de l'oscillation et d'introduire une nouvelle erreur, de sens contraire à la première, qui peut la compenser en grande partie.

644. Mesure d'une durée très courte. — Si la décharge q qui traverse le galvanomètre provient d'un courant constant I_0, dont le circuit a été fermé pendant un temps θ très court par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille, l'angle d'impulsion α, corrigé de l'amortissement et de la durée de la décharge, satisfait à l'équation

$$q = \frac{H}{G}\frac{\tau}{\pi}\alpha.$$

Appelant δ la déviation réduite que donnerait le courant permanent I_0, on en déduit

$$\theta = \frac{q}{I_0} = \frac{\tau}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\delta}. \tag{25}$$

Pouillet [1] a indiqué cette méthode pour mesurer un intervalle de temps très petit, comme celui que met une balle pour parcourir le canon d'un fusil. Elle n'est applicable qu'autant que les effets d'induction sont négligeables; dans les autres cas, il faut tenir compte des extra-courants de fermeture et de rupture. Ce dernier n'a le plus souvent qu'une influence

[1] Pouillet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XIX, p. 1384; 1884.

très faible, parce que le circuit se trouve alors complété par la couche d'air dans laquelle a lieu l'étincelle et dont la résistance est très grande.

Si l'on considère comme négligeable la quantité d'électricité qui correspond à l'extra-courant de rupture, et qu'on appelle R et L les éléments du circuit (**381**), on a

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

$$(26) \qquad q = \int_0^\theta I\,dt = I_0\left[\theta - \frac{L}{R}\left(1 - e^{-\frac{R\theta}{L}}\right)\right].$$

Lorsque la durée θ est très grande par rapport au temps nécessaire pour l'établissement définitif du courant, l'exponentielle est négligeable et cette équation donne, au moins d'une manière très rapprochée,

$$(25)' \qquad \theta = \frac{\tau}{\pi}\frac{\alpha}{\delta} + \frac{L}{R}.$$

Il suffit alors d'ajouter, à la durée calculée par l'équation (25), un terme constant égal au quotient du coefficient de self-induction du circuit par sa résistance.

Un artifice expérimental permet d'éliminer toutes les difficultés relatives aux courants induits : au lieu de rompre le circuit à la fin de l'intervalle θ, on supprime seulement la force électromotrice constante en lui substituant un fil métallique de résistance égale. Les deux courants d'induction de sens contraires sont alors égaux et la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre est bien $I_0\theta$.

Lorsqu'on réunit par un conducteur de résistance R, sans induction propre, les armatures d'un condensateur de capacité C, dont la conductibilité intérieure est négligeable, l'intensité I du courant à une époque quelconque est liée à la différence E du potentiel des armatures par la loi d'Ohm $E = IR$ et on a $I\,dt + C\,dE = 0$. Il en résulte, en appelant E_0 et E_1 les différences de potentiel initiale et finale,

$$\frac{E}{R} + C\frac{dE}{dt} = 0, \qquad \text{ou} \qquad t = RC\,\mathcal{L}.\frac{E_0}{E_1}.$$

Telle est la méthode employée par M. R. Sabine [1] pour déterminer la vitesse des projectiles. Les armatures d'un condensateur communiquent, d'une part, avec les pôles d'une pile à faible résistance qui maintient constante une différence de potentiel E_0 et, d'autre part, avec un fil de très grande résistance R. Les deux fils étant situés à une distance déterminée sur le trajet d'un projectile, le premier est coupé d'abord, puis le second au bout du temps t. Le rapport de la différence de potentiel résiduelle E_1 à la valeur initiale E_0 s'évalue, soit par un électromètre, soit par les décharges correspondantes dans un galvanomètre balistique.

On peut d'ailleurs graduer l'appareil directement à l'aide d'un commutateur tournant auquel on donne brusquement une vitesse déterminée et qui, une fois le condensateur chargé et isolé, ferme le circuit pendant un intervalle de temps connu par la distance de deux butoirs sur le bord d'un disque dont on connaît la vitesse. On évalue ainsi des intervalles de temps qui ne dépassent pas $0^s,0001$.

645. Décharges dans l'électrodynamomètre. — Lorsqu'un même courant I passe dans les deux bobines d'un électrodynamomètre (**634**), le couple relatif à une déviation δ est égal à $S'GI^2\cos\delta$.

K étant le moment d'inertie de la bobine mobile, la vitesse angulaire ω_0, imprimée par une décharge dont la durée totale θ est très petite par rapport à la durée des oscillations, est donnée par l'équation

$$(27) \qquad K\omega_0 = S'G\int_0^\theta I^2\cos\delta\,dt.$$

Si les déviations restent très petites et que I_m^2 soit le carré moyen du courant, l'intégrale peut être remplacée par $I_m^2\theta$. On a alors, en posant

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{\tau^2} = \frac{C}{K} - \lambda^2,$$

$$I_m^2\theta = \frac{K}{S'G}\omega_0 = \frac{C}{S'G}\frac{\tau}{\pi}\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda\tau}{\pi}\right)^2}}\,e^{\frac{\lambda\tau}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\lambda\tau}},$$

[1] R. Sabine, *Ph. Mag.* [5], t. I, p. 337; 1876.

et, pour un amortissement très faible,

$$I_m^2\theta = \frac{C}{S'G}\frac{\tau}{\pi}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{4}\right).$$

Si les deux bobines de l'électrodynamomètre sont parcourues par des courants différents, on remplacera dans l'équation (27) le carré I^2 par le produit des intensités I et I', les termes de l'intégrale ne différant de zéro que pendant le temps où les deux courants existent à la fois. La valeur de l'intégrale dépend de la loi de variation des deux courants; cette loi n'est généralement pas la même, non seulement pour deux décharges distinctes, mais aussi pour une même décharge qui serait partagée par dérivation entre les deux bobines. L'impulsion produite dans ces conditions correspondrait à un phénomène très complexe.

L'observation des impulsions imprimées par une même décharge au galvanomètre et à l'électrodynamomètre permet, comme l'a montré Weber [1], d'apprécier sa durée, au moins d'une manière approximative.

Si l'on suppose, en effet, le courant I uniforme et qu'on distingue par des accents les quantités relatives à l'électrodynamomètre, les deux lectures donnent, abstraction faite des termes de correction,

$$I\theta = \frac{H}{G}\frac{\tau}{\pi}\alpha, \qquad I^2\theta = \frac{C}{S'G'}\frac{\tau'}{\pi}\alpha';$$

$$\theta = \frac{H^2}{G^2}\cdot\frac{S'G'}{C}\cdot\frac{\tau^2\alpha^2}{\pi\tau'\alpha'}.$$

On peut éliminer les constantes des deux instruments en observant les déviations réduites δ et δ' que produit un même courant dans le galvanomètre et dans l'électrodynamomètre; il en résulte

$$\frac{H^2}{G^2}\delta^2 = \frac{C}{G'S'}\delta',$$

$$\theta = \frac{\delta'}{\delta^2}\cdot\frac{\tau^2\alpha^2}{\pi\tau'\alpha'}.$$

[1] W. Weber, *Electrodyn. Maasb.*, I, p. 80; 1846.

La dernière expression ne renferme plus que les nombres de l'expérience, mais elle ne donnera en général qu'une évaluation assez grossière de la durée réelle de la décharge, parce que l'hypothèse de l'uniformité du courant est le plus souvent très éloignée de la vérité.

646. Courants interrompus. — Il est évident qu'une série continue de décharges identiques, dont l'intervalle de succession est petit par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille, donnera au galvanomètre la même déviation permanente que le courant uniforme de même débit.

Pour démontrer que l'action d'un courant est proportionnelle à la quantité d'électricité qui s'écoule par unité de temps, Pouillet [1] envoyait à travers un galvanomètre la succession des courants interrompus d'une pile constante. L'interrupteur était formé par une roue en bois portant sur son contour un anneau métallique continu d'un côté et dentelé de l'autre; deux languettes élastiques appuient l'une sur la partie pleine, l'autre sur la dentelure, de sorte que le courant est interrompu chaque fois que cette dernière se trouve sur un vide. Quand la roue est mise en rotation, si le circuit est court et sans induction propre sensible, la déviation croît d'abord avec la vitesse; elle devient ensuite constante et proportionnelle au rapport qui existe entre la largeur d'une dent et la somme d'un plein et d'un vide. Dans les expériences de Pouillet, les courants ont pu être interrompus 1 200 fois par seconde sans que l'intensité subît de variation appréciable; mais cette loi cesse d'être vraie dès que les effets d'induction ne sont plus négligeables et on ne tarde pas à constater que l'intensité diminue à mesure que la vitesse augmente.

Soit, en effet, I_0 l'intensité du courant permanent; la décharge q pendant la durée θ de chaque contact est donnée par l'équation (26). S'il y a N interruptions par seconde, le courant moyen est Nq. En appelant α le rapport de la largeur d'une dent à la somme d'un plein et d'un vide, on a $N\theta = \alpha$ et l'intensité moyenne I est

$$I = \alpha I_0 \left[1 - \frac{NL}{R\alpha} \left(1 - e^{-\frac{R\alpha}{LN}} \right) \right].$$

[1] Pouillet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IV, p. 187; 1837.

Cette expression tend évidemment vers zéro lorsque les interruptions deviennent très rapides.

Les expériences de Bertin [1] et de Cazin [2] sur les courants interrompus sont entièrement d'accord avec cette formule ; il en résulte ainsi que la quantité d'électricité qui correspond à l'extra-courant de rupture est réellement négligeable.

647. Courants variables. — Lorsqu'un circuit est parcouru par une série de courants instantanés, ou de décharges alternativement de sens contraires qui se succèdent avec une rapidité suffisante, l'intensité moyenne du courant est égale à la somme algébrique des quantités d'électricité qui passent dans chaque unité de temps ; elle est nulle, en particulier, pour les courants sinusoïdaux. Il en serait encore de même avec les courants d'une bobine d'induction, comme celle de Ruhmkorff, dans un circuit fermé, puisque les quantités d'électricité qui correspondent aux deux espèces de courants induits sont égales. Si le circuit renferme en outre une force électromotrice constante, la déviation est la même que si cette force électromotrice existait seule [3].

648. Déviation indifférente ou bilatérale. — Il arrive cependant, en particulier avec des galvanomètres astatiques, que, pour un courant dont l'intensité moyenne est nulle, l'aiguille est en équilibre instable au zéro, et qu'une fois déviée, elle s'en écarte jusqu'à 90°. Ce fait, signalé par Poggendorff [4] et appelé par lui *déviation indifférente*, est dû au magnétisme temporaire développé par le courant ; il a été expliqué d'une manière plus complète par M. Chrystal [5].

Lorsque le champ extérieur est faible et le courant alternatif suffisamment intense, l'aiguille quitte sa position d'équilibre et dévie de 90 degrés environ, indifféremment dans un sens ou dans l'autre ; c'est le phénomène observé d'abord par Poggendorff et que M. Chrystal désigne sous le nom de *déviation bilatérale*.

Quand on diminue le courant ou qu'on augmente le champ magnétique, deux cas peuvent se présenter, suivant la posi-

(1) Bertin, *Ann. de Chim. et de phys.*, [4], t. XVI, p. 25; 1869.
(2) Cazin, *Ann. de Chimie et de Phys.*, [4], t. XVII, p. 385; 1869.
(3) Schuster, *Phil. Mag.* [4], t. XLVIII, p. 251; 1874.
(4) Poggendorff, *Pogg. Ann. Bd.*, t. XLV, p. 353; 1838.
(5) Chrystal, *Phil. Mag.* [5], t. II, p. 401; 1876.

tion initiale de l'aiguille : 1° si elle est alors exactement dirigée dans le plan de symétrie du cadre, elle reste immobile; 2° si sa direction initiale est à droite ou à gauche du plan de symétrie, le passage du courant augmente toujours la déviation d'une quantité qui est d'abord proportionnelle à l'écart primitif. Cette déviation, que M. Chrystal appelle *unilatérale*, est indépendante de la période des courants alternatifs.

Soient α l'angle que fait la direction de l'aiguille avec le plan moyen des spires dans sa position d'équilibre, β la valeur de cet angle sous l'influence du courant I à l'époque t. L'aiguille est soumise au couple

$$C = \mathrm{HM}\sin(\beta - \alpha) - \mathrm{GMI}\cos\beta = \mathrm{M}[\mathrm{H}\sin(\beta - \alpha) - \mathrm{GI}\cos\beta].$$

Supposons que l'aimantation de l'aiguille renferme un terme proportionnel à la composante du champ parallèle à sa direction; on devra remplacer M par une expression de la forme

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_0 k[\mathrm{GI}\sin\beta + \mathrm{H}\cos(\beta - \alpha)].$$

Pour obtenir la valeur moyenne C_m du couple, il faut, après cette substitution, multiplier C par dt, l'intégrer de o à θ et diviser le résultat par θ. Les termes qui ne contiennent pas l'intensité I ne changent pas; ceux qui ont en facteur la première puissance de I disparaissent, puisque le courant moyen est nul; dans les termes en I^2, ce facteur devra être remplacé par le carré moyen I_m^2. Il reste ainsi

$$\frac{C_m}{\mathrm{HM}_0} = \sin(\beta - \alpha) + \frac{k\mathrm{H}}{2}\left[\sin 2(\beta - \alpha) - \frac{\mathrm{G}^2\mathrm{I}_m^2}{\mathrm{H}^2}\sin 2\beta\right].$$

Le facteur $\frac{\mathrm{G}^2\mathrm{I}_m^2}{\mathrm{H}^2}$ représente le carré de la déviation δ que produirait le courant uniforme I_m dans le galvanomètre; le terme correspondant est très grand par rapport à celui qui précède. Comme le coefficient k est très petit, on peut écrire, en posant

$$\mathrm{A} = k\frac{\mathrm{G}^2\mathrm{I}_m^2}{2\mathrm{H}},$$

$$C_m = \mathrm{HM}_0[\sin(\beta - \alpha) - \mathrm{A}\sin 2\beta].$$

Pour rendre compte de l'effet produit, on construira les deux courbes B et B′ définies par les équations

$$y = \sin\beta, \qquad y' = A\sin 2\beta.$$

En les superposant avec une différence de phase α pour la première, l'équilibre correspond à leurs points d'intersection.

Supposons d'abord $\alpha = 0$; deux cas peuvent alors se présenter. Si $2A > 1$, il y a quatre positions d'équilibre: O, P, P′ (fig. 171) et celle des points Q ou Q′ qui indiquent un retour-

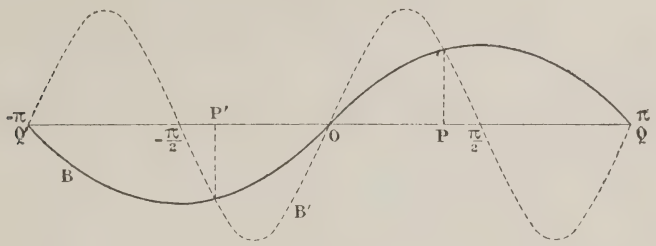


Fig. 171.

nement de 180° pour l'aiguille, cette dernière étant toujours instable; la première O, qui correspond à la position primitive, est aussi instable. Les deux autres P et P′ sont stables; elles correspondent à des déviations symétriques, d'autant plus voisines de + 90° que le coefficient A est plus grand.

Si $2A < 1$, les deux courbes B et B′ ne se rencontrent plus qu'aux points O et Q; le zéro devient alors une position d'équilibre stable.

Lorsque l'écart α est positif, la courbe B sera déplacée vers la droite de cette quantité α. Les positions d'équilibre P′ et P sont alors dissymétriques et la première ne tarde pas à disparaître si $A < 1$. La valeur de β pour l'équilibre P est d'autant plus voisine de 90° que l'écart α est plus grand.

649. Courants alternatifs. — L'électrodynamomètre se prête particulièrement à la mesure des courants alternatifs, à la condition que leur période soit petite par rapport à celle des oscillations de la bobine mobile et que le courant passe intégralement dans les deux bobines. La déviation δ détermine le

carré du courant efficace (393) par les mêmes expressions que s'il s'agissait d'un courant uniforme.

Il est bon de remarquer alors que, si le circuit renferme une force électromotrice sinusoïdale, la résistance et l'induction propre de l'électrodynamomètre interviennent dans l'impédance du circuit et dans la phase du courant.

Si les bobines sont parcourues séparément par des courants sinusoïdaux de même période, mais différents par l'intensité et par la phase, tels que

$$I_1 \sin(\omega t - \alpha_1) \quad \text{et} \quad I_2 \sin(\omega t - \alpha_2),$$

le produit moyen des courants est $I_1 I_2 \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}$; l'action du champ terrestre est nulle et la déviation δ de l'électrodynamomètre devient

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{S'G}{2C} I_1 I_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Supposons que les bobines soient placées en dérivation sur un courant principal d'amplitude I. En appelant r_1 et r_2 les résistances des branches dérivées, L_1, L_2 et M leurs coefficients de self-induction et d'induction mutuelle, on aura (397)

$$\frac{I_1^2}{r_2^2 + (L_2 - M)^2\omega^2} = \frac{I_2^2}{r_1^2 + (L_1 - M)^2\omega^2} = \frac{I^2}{(r_1 + r_2)^2 + (L_1 + L_2 - 2M)^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 - \alpha_2) = \omega \frac{r_2(L_1 - M) - r_1(L_2 - M)}{r_1 r_2 + (L_1 - M)(L_2 - M)\omega^2}.$$

La différence de phase $\alpha_1 - \alpha_2$ pouvant varier de 0 à 90°, $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ varie de 1 à 0.

Si la déviation δ est assez faible pour que les bobines restent à peu près rectangulaires, le coefficient M est négligeable. Dans ce cas, la différence de phase est nulle pour la condition $r_2 L_1 = r_1 L_2$, c'est-à-dire quand les résistances des bobines sont dans le rapport de leurs coefficients de self-induction, ce qui a lieu pour des bobines semblables.

Supposons enfin que r_1 et L_1 désignent la résistance et le coefficient de self-induction de l'électrodynamomètre dont les

bobines sont réunies, et que l'instrument soit placé en dérivation sur deux points du circuit principal entre lesquels existe un conducteur dont les éléments sont r_2 et L_2. Les mêmes équations déterminent alors l'amplitude I_1 en fonction de l'amplitude I du courant principal.

Il est généralement facile de disposer l'expérience de manière que la valeur de M soit nulle. En tous cas, ce coefficient est nul lorsque $L_2 = 0$ pour le conducteur qui sert de shunt; on a alors

$$I^2 = I_1^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{L_1 \omega}{r_1 + r_2}\right)^2\right].$$

Si le second terme de la parenthèse est très petit, ce qui est le cas le plus habituel quand la fréquence du courant n'est pas très grande, on voit que l'emploi des shunts, avec les précautions indiquées, permet aussi de déterminer les courants alternatifs à l'aide d'un électrodynamomètre.

Lorsque ce terme a une valeur notable, on peut l'éliminer par deux expériences différentes en faisant varier l'une des résistances r_1 ou r_2.

L'électromètre à quadrants élimine ces difficultés d'induction. L'aiguille étant reliée à l'une des paires de quadrants et ceux-ci en communication avec deux points A et B du circuit, la déviation θ est proportionnelle au carré moyen E_m^2 de la différence de potentiel (**637**).

Si la résistance R du conducteur compris entre les points A et B n'a pas d'induction propre sensible, il en résulte

$$2\theta = kE_m^2 = kRI_m^2.$$

Une simple modification de l'expérience donnera encore le travail électrique entre deux points A et B dont les potentiels sont V_1 et V_2: on relie les quadrants à deux autres points A′ et B′, aux potentiels V_1' et V_2', séparés par une résistance R sans induction propre, et on fait communiquer l'aiguille successivement avec les points A et B.

Le courant variable I est déterminé à chaque instant par la relation $V_1' - V_2' = IR$. Les déviations α et β correspondent

respectivement à la valeur moyenne des expressions

$$RI\left(V_1 - \frac{V_1' + V_2'}{2}\right) = RIV_1 - RI\,\frac{V_1' + V_2'}{2},$$

$$RI\left(V_2 - \frac{V_1' + V_2'}{2}\right) = RIV_2 - RI\,\frac{V_1' + V_2'}{2}.$$

Il en résulte, par différence,

$$2\,\frac{\alpha - \beta}{kR} = \text{moy.}\,IV_1 - \text{moy.}\,IV_2 = \text{moy.}\,I(V_1 - V_2).$$

La dernière expression représente évidemment le travail électrique considéré pendant l'unité de temps.

Les courants alternatifs produisent dans le téléphone un bruit ou un son musical, suivant leur fréquence; M. Wien [1] en a fait un appareil de mesure. La membrane du téléphone est reliée à un petit miroir par un ressort de montre. Le passage d'un courant continu produit une déviation sensiblement proportionnelle à l'intensité. Sous l'influence d'un courant alternatif, le miroir entre en vibration et l'amplitude peut être augmentée dans de grandes proportions lorsque les oscillations propres du miroir, de la membrane et du courant ont la même période. Dans ce cas, l'appareil est à peu près insensible aux courants de périodes différentes.

C'est sur le principe de la résonance qu'est fondé aussi le galvanomètre à vibrations employé par M. Rubens [2]. Un faisceau d'aiguilles de fer doux, suspendu à un fil métallique, est situé dans le champ de deux aimants; le passage d'un courant alternatif dans des bobines convenablement disposées dévie le système à droite ou à gauche. L'amplitude des oscillations est encore multipliée quand la période du système mobile est la même que celle du courant; on peut ainsi mettre en évidence des courants inférieurs à 10^{-8} ampère (625).

650. Étude des courants dans l'état variable. — Les méthodes galvanométriques permettent de suivre d'une manière

[1] M. Wien, *Wied. Ann.*, t. XLII, p. 593; 1891. — *Journ. de Phys.* [3], t. I, p. 547; 1892.

[2] H. Rubens, *Wied. Ann.* t. LV, p. 27; 1895. — *Journ. de Phys.* [3], t. V, p. 31; 1896.

continue la marche d'un courant dont les variations restent très lentes par rapport au temps nécessaire pour l'amortissement, mais elles ne suffisent plus quand il s'agit de variations rapides, comme celles qui accompagnent les effets d'induction. On doit alors recourir à d'autres procédés, qui dépendent beaucoup des conditions de l'expérience : nous nous bornerons à quelques exemples.

1° Le moyen le plus direct pour connaître l'état d'un courant à l'époque t est de mettre deux points A et B du circuit, pendant un temps θ très court, en communication respective avec les quadrants d'un électromètre dont l'aiguille est chargée, et d'isoler ensuite l'électromètre. Si l'équilibre électrostatique a eu le temps de s'établir, la déviation permanente, ou l'impulsion initiale de l'aiguille, est proportionnelle à la différence de potentiel E_0 qui existe entre les points A et B, c'est-à-dire à l'intensité I du courant à l'époque t.

On peut aussi substituer à l'électromètre un condensateur de capacité C, dont on mesure ensuite la charge par un galvanomètre balistique. Toutefois, cette charge n'est pas en toute rigueur indépendante de la durée θ du contact. Si les effets de self-induction sont négligeables, la différence de potentiel E des armatures au temps θ est donnée (172) par la formule

$$E = E_0 \frac{R}{R + r}\left[1 - e^{-\frac{\theta(R+r)}{CRr}}\right],$$

dans laquelle R désigne la résistance du diélectrique et r celle des fils de communication.

Comme le rapport de r à R est en général très petit, on a, sans erreur sensible,

$$E = E_0\left[1 - e^{-\frac{\theta}{Cr}}\right].$$

La charge peut être considérée comme instantanée, si la quantité Cr est très petite par rapport à la durée θ du contact, laquelle doit être assez courte pour que le courant principal n'ait pas eu le temps de subir une variation sensible.

Enfin, il faut admettre encore que la quantité d'électricité enlevée au circuit principal par l'électromètre ou le condensateur ne modifie pas d'une manière appréciable le courant

qui a lieu entre les points A et B. Ces conditions sont en général faciles à réaliser.

Les communications en A et B doivent être établies et rompues simultanément, à moins que les conditions de l'expérience ne permettent de maintenir l'un de ces points A à un potentiel constant, en le joignant au sol par exemple; il suffit alors de régler le contact au point B.

On peut aussi remplacer l'électromètre par un galvanomètre. L'impulsion imprimée à l'aiguille sera proportionnelle, toutes choses égales d'ailleurs, au courant principal.

2° Une autre méthode consiste à mesurer la décharge q' produite dans un circuit voisin, de résistance R', par la rupture du courant principal I à une époque t. Si les variations naturelles de ce courant sont assez lentes pour ne produire dans le circuit voisin que des intensités très faibles et s'il n'existe pas de capacités ou d'inductions propres telles que l'étincelle de rupture ait une durée appréciable, la décharge latérale ne dépend que de la suppression du flux d'induction mutuelle et l'on a

$$R'q' = MI.$$

La mesure de la décharge q' par un galvanomètre balistique donnerait ainsi la valeur de I à chaque instant.

3° La disposition suivante a été utilisée encore par M. R. Sabine [1] pour déterminer la forme et le mode de propagation de l'onde électrique produite sur un câble dont l'un des bouts communique au sol et dont l'origine O est portée à un potentiel qui varie suivant une loi quelconque.

L'origine O du câble est isolée et un point quelconque M de sa longueur est relié à un condensateur dont la seconde armature communique au sol. Un commutateur tournant relie d'abord le point O à une pile, puis isole le condensateur du point M au bout d'un temps t et le décharge par un galvanomètre balistique. L'angle d'impulsion est proportionnel au potentiel acquis par le point M au moment de la rupture.

Toutefois, cette manière d'opérer suppose que la présence du condensateur au point M ne change pas les conditions

[1] R. Sabine, *Phil. Mag.* [5], t. II, p. 321; 1876.

primitives de l'expérience, ce qui exige que sa capacité soit très petite par rapport à celle du câble.

En disposant des butoirs d'une manière convenable sur le commutateur tournant, on peut limiter la durée de contact du point O avec la pile, ou porter successivement ce point, pendant des intervalles de temps connus, à des potentiels différents, d'un signe quelconque, de manière à propager dans le câble des ondes électriques alternativement positives et négatives ; si le butoir relatif au point M est alors réglé de manière que la charge du condensateur soit nulle, l'expérience déterminera l'époque à laquelle ce point reste à l'état neutre entre deux ondes successives.

4° Les expériences de Von Helmholtz [1] relatives à la période variable du courant de fermeture correspondent à un phénomène plus complexe.

La quantité totale d'électricité q_1 de l'extra-courant (381) de fermeture ou d'ouverture, pour un courant I arrivé à l'état permanent, satisfait à la relation $Rq_1 = LI$.

On peut remarquer d'abord que, si la gorge d'une bobine est donnée ainsi que le courant I, la quantité q_1 ne dépend que du poids du fil, car la résistance R (557) et le coefficient L (589) sont tous deux proportionnels au carré du nombre des spires. Pour des bobines semblables, cette quantité d'électricité est proportionnelle à la section de la gorge et augmente avec le poids du métal ; il y a donc tout avantage à employer un gros fil et un métal très conducteur pour constituer le cadre du galvanomètre balistique.

Un mécanisme spécial ferme d'abord le circuit et l'ouvre au bout d'un temps θ ; la décharge q est alors (644)

$$q = \int_0^\theta I\,dt = I_0\left[\theta - \frac{L}{R}\left(1 - e^{-\frac{R\theta}{L}}\right)\right].$$

On recommence ensuite l'expérience avec cette différence qu'au lieu de rompre le circuit au temps θ, on remplace alors la pile par une résistance de même valeur ; les quantités d'électricité induites par l'établissement et la rupture du courant étant égales et de signes contraires, la nouvelle impulsion

[1] Helmholtz, *Pogg. Ann.* t. LXXXIII, p. 505 ; 1851.

correspond simplement à la décharge $q_0 = I_0 \theta$. Le rapport des impulsions α et α_0 donne le rapport du courant moyen pendant le temps θ à sa valeur finale; une série d'expériences permettra d'en déduire l'intensité à chaque instant.

Pour ouvrir ou fermer un circuit à des époques connues, on peut employer des appareils animés d'un mouvement de translation, comme la chute d'un poids, des systèmes oscillants ou rotatifs. On obtient d'excellents résultats avec un pendule très lourd, qu'on laisse tomber d'une hauteur déterminée et qu'on utilise, au moment de sa vitesse maximum, pour manœuvrer des clefs de contacts successifs.

Dans le cas d'un courant de fermeture, par exemple, le pendule rencontre d'abord un premier levier qui ferme le circuit et marque l'origine du phénomène, puis un autre levier qui ouvre le circuit. Ce second levier peut être déplacé parallèlement à lui-même au moyen d'une vis micrométrique; l'intervalle θ qui sépare les deux contacts se déduit de la durée de l'oscillation et de la distance des leviers.

Nous verrons plus loin l'application de ces méthodes à l'étude des oscillations électriques.

5° Lorsque les phénomènes se reproduisent d'une manière périodique, on peut répéter les effets relatifs à la même phase et obtenir des indications permanentes. Telle est la méthode employée par M. Joubert [1] pour l'étude des courants alternatifs produits par les machines d'induction. On monte sur l'arbre de la machine un interrupteur à deux contacts momentanés qui mettent en relation deux points du circuit avec les quadrants d'un électromètre; cet interrupteur est calé sur l'arbre de manière que les contacts s'établissent à une phase déterminée de la force électromotrice. L'électromètre prend une déviation permanente qui correspond à la différence de potentiel relative à cette phase.

Un galvanomètre remplirait encore le même but, sauf que la dérivation dans le circuit du galvanomètre au moment du contact peut altérer la distribution primitive des potentiels. On évite cette difficulté par une méthode d'opposition, en intercalant dans le circuit du galvanomètre une force électro-

[1] J. Joubert, *Ann. de l'Éc. Norm. sup.* [2], t. X, p. 145; 1882.

motrice capable de ramener l'aiguille au zéro; la compensation est indépendante de la résistance introduite par l'interrupteur, puisqu'il commande de la même manière le courant à mesurer et celui de la pile qu'on lui oppose.

La figure 172 indique la disposition employée. Soit R la résistance qui sépare deux points A et B du circuit principal, R_1 une résistance ACB en dérivation sur ces deux points, enfin AKGC une dérivation de très grande résistance, interceptant entre les deux points A et C une résistance r. Cette dérivation contient le galvanomètre G, la pile d'opposition E

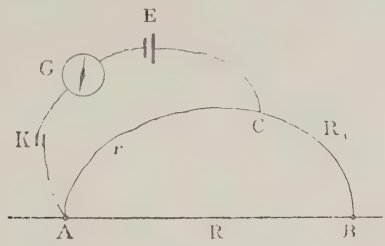


Fig. 172.

et l'interrupteur K. Si les résistances R et R_1 n'ont pas d'induction propre, on a, en appelant V la différence de potentiel des deux points A et B, I l'intensité du courant principal, I_1 celle du courant dérivé à l'instant du contact, et enfin E la force électromotrice de la pile d'opposition,

$$V = I_1 R_1 = \frac{E}{r} R_1 = IR, \qquad I = \frac{E}{r} \cdot \frac{R_1}{R}.$$

651. Galvanomètre optique. — Le pouvoir rotatoire magnétique (474) fournit encore un autre moyen de mesure.

Supposons que, dans le champ d'un circuit parcouru par l'unité de courant, un rayon de lumière polarisée traverse, suivant la direction x, un milieu d'épaisseur $x_2 - x_1 = e$, pour lequel la constante de Verdet est ρ. En désignant par X la composante du champ parallèle à la direction considérée, la rotation du plan de polarisation est

$$\rho \int_{x_1}^{x_2} X\, dx = \rho e X_m,$$

le facteur X_m désignant la valeur moyenne du champ relative au chemin considéré. Pour un courant I, la rotation $R = \rho I e X_m$ est proportionnelle à l'intensité I ; on aura le rapport de deux courants par le rapport des rotations.

Si l'on veut déterminer la valeur absolue du courant par la rotation R, il faut connaître d'abord la constante ρ du corps observé et calculer l'expression eX_m. Suivant l'axe d'une bobine, par exemple, le produit eX_m s'obtiendra par la somme des intégrales relatives aux différentes spires.

Il est facile d'ailleurs de choisir des conditions expérimentales qui éliminent toute mesure de dimensions. Le produit IeX_m est le travail du courant sur l'unité de magnétisme parcourant la longueur e. Supposons que la bobine renferme N spires et que les extrémités A_1 et A_2 de la longueur e se trouvent en dehors de la bobine, en des points où les potentiels des feuillets magnétiques équivalents soient V_1 et V_2. Le travail du courant sur une masse qui suivrait l'axe de $-\infty$ à $+\infty$ est $4\pi NI$ (**319**). Jusqu'au point A_1, ce travail est $-V_1$; à partir du point A_2, il est égal à V_2. Il faut donc retrancher $V_2 - V_1$ de la valeur précédente, ce qui donne

$$R = \rho\,[4\pi NI - (V_2 - V_1)].$$

Si la bobine a un enroulement régulier, les valeurs de V_1 et V_2 sont les potentiels des deux couches $-nI$ sur la face d'entrée, et $+nI$ sur la face de sortie (**262**), lesquels se déterminent aisément par les distances des points A_1 et A_2.

Les termes ρV_1 et ρV_2 deviennent négligeables lorsque les points A_1 et A_2 sont très éloignés de la bobine. On peut encore les déterminer par expérience en plaçant le corps en dehors de la bobine de manière qu'il se termine en A_1, pour le premier cas, et commence en A_2 pour le second, les potentiels étant supposés négligeables au delà, ce qui donne avec le même courant les rotations R_1 et R_2; on a alors

$$R + R_1 + R_2 = \rho\, 4\pi NI.$$

Dans chaque cas, il suffit de renverser le courant pour changer le sens de la rotation ; la différence des deux lectures donne le double de la rotation électromagnétique.

Différents observateurs ont employé cette méthode pour déterminer la constante du *sulfure de carbone* relative à la raie D du spectre. Les mesures les plus exactes, ramenées à la température de zéro, indiquent pour cette constante des valeurs comprises entre 0′,0430 et 0′,0434.

Avec une bobine de 1000 tours et l'unité de courant, ou 10 ampères, on aurait

$$\rho 4\pi NI = 43'.4\pi = 540'.$$

Un ampère dans une bobine de 5000 tours donnerait la même valeur pour la rotation double, c'est-à-dire une approximation relative de 0,002 si l'erreur de lecture est de 1′.

Cette méthode optique présente de grands avantages, car il n'y a pas de perturbation due à l'échauffement du circuit par le passage du courant; la seule précaution est de maintenir constante la température du sulfure de carbone, surtout dans les couches les plus efficaces.

Comme la rotation du plan de polarisation ne présente aucun retard sur le courant lui-même (**478**), on peut encore l'utiliser pour l'étude des courants alternatifs. Il suffit alors d'avoir recours à une disposition mécanique, miroir tournant ou fente mobile, qui ne laisse apparaître la lumière que dans une phase déterminée; la rotation ne dépend que de la valeur correspondante du courant. En modifiant la phase d'apparition d'une manière graduelle, une série d'observations différentes fournirait les données nécessaires pour tracer par points la courbe du courant.

652. Mesures calorimétriques. — L'énergie calorifique dégagée par le courant I pendant un temps t, dans un conducteur de résistance R, a pour valeur I^2Rt. Si l'on détermine la quantité Q de chaleur correspondante en plongeant le conducteur dans un calorimètre, on aura, en désignant par J l'équivalent mécanique de la chaleur (**17**),

$$JQ = I^2Rt, \qquad I^2 = \frac{JQ}{Rt}.$$

Appelons M la masse totale du calorimètre réduite en eau, $T_1 - T_0$ l'élévation de température, correction faite des déper-

ditions qui ont lieu par rayonnement ou par conductibilité; la quantité Q est égale à $Mc(T - T_0)$.

Pour tenir compte des variations qu'éprouvent la résistance du conducteur, ainsi que la chaleur spécifique c du liquide, on peut admettre que ces variations sont proportionnelles à la température et poser

$$R = R_0(1 + \alpha T), \qquad c = c_0(1 + \gamma T).$$

L'effet élémentaire produit à la température T est alors

$$JMc_0(1 + \gamma T)dT = I^2 R_0(1 + \alpha T)dt,$$

$$\frac{dT}{1 + (\alpha - \gamma)T} = \frac{R_0}{JMc_0} I^2 dt.$$

En intégrant cette expression pendant le temps θ, qui correspond à l'échauffement total $T_1 - T_0$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha - \gamma} \mathcal{L} . \frac{1 + (\alpha - \gamma)T_1}{1 + (\alpha - \gamma)T_0} = \frac{R_0}{JMc_0} \int_0^\theta I^2 dt = \frac{R_0}{JMc_0} I_m^2 \theta.$$

Comme les coefficients α et γ sont très petits, on peut écrire

$$\frac{R_0}{JMc_0} I_m^2 \theta = (T_1 - T_0)\left[1 - \frac{\alpha - \gamma}{2}(T_1 + T_0)\right].$$

On détermine ainsi le carré moyen I_m^2 du courant pendant la durée θ de l'expérience, de sorte que la méthode s'applique aux courants alternatifs.

On peut varier de bien des manières la disposition expérimentale : une des plus simples est celle où le calorimètre, ayant la forme d'un thermomètre [1], donne directement les températures. Si le courant passe d'une manière continue, l'échauffement du calorimètre est compensé à chaque instant par les pertes de chaleur; comme ces dernières sont sensiblement proportionnelles à l'excès de la température du calorimètre sur celle de l'enceinte, le carré moyen du courant est proportionnel au même excès de température.

[1] Jamin et Amaury, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. LXX, p. 661; 1870.

Dans ces expériences, le conducteur doit être isolé électriquement du liquide et cependant la transmission de chaleur doit être assez facile pour que l'équilibre de température s'établisse rapidement.

Une autre cause d'erreur tient à ce que, pendant le passage d'un courant continu, l'intérieur du fil est nécessairement à une température plus élevée que l'extérieur ; il en résulte que la résistance réelle est plus grande que la résistance calculée par la température du calorimètre et qu'on obtient une valeur trop forte pour l'intensité du courant.

Cette méthode a été souvent mise à profit pour déterminer l'équivalent mécanique J de la chaleur, en mesurant le courant et la résistance par d'autres procédés.

653. Actions chimiques. — La mesure des courants par l'électrolyse est une méthode qui peut être utile dans beaucoup de cas, surtout pour les courants très intenses.

Comme l'action chimique est proportionnelle au débit total d'électricité (**181**), le rapport de la quantité d'électrolyte décomposé au temps correspondant donnera le courant moyen dans le même intervalle. Les corps qui ont été le plus employés, et qui paraissent le mieux convenir, sont l'eau acidulée, une dissolution aqueuse de sulfate de cuivre, une dissolution de nitrate ou de chlorate d'argent.

Avec l'eau, on mesure généralement le volume des gaz dégagés ; les gaz doivent être desséchés et il faut connaître leur température et leur pression. Pour éviter ces corrections et l'emploi des densités, Bunsen a trouvé préférable de peser l'eau décomposée ; le voltamètre est pesé avant l'expérience, les gaz s'échappent en abandonnant leur vapeur d'eau à un appareil desséchant qui fait corps avec le voltamètre, et on pèse de nouveau, après avoir remplacé les gaz restants par de l'air. Une cause d'erreur résulte de la quantité de gaz qui reste en dissolution dans l'eau ; on pourrait s'en affranchir en récoltant les gaz avec une pompe à mercure.

L'eau doit être acidulée. Quand on emploie l'acide sulfurique, il se forme généralement des corps accessoires, tels que l'ozone, l'acide persulfurique, etc., et la quantité de gaz recueillie est trop faible ; ces composés oxygénés sont en quantité négligeable si on porte la température du voltamètre

à 40 ou 50°. M. Berthelot [1] a reconnu qu'il n'y a plus que des traces d'ozone tout à fait inappréciables quand on rend l'eau conductrice par de l'acide phosphorique.

Les expériences sont plus commodes et plus sûres avec les sels métalliques. La condition essentielle est d'obtenir sur l'électrode négative un dépôt continu et bien adhérent, qu'on puisse laver facilement, de manière à le débarrasser de toute trace de sel dissous, et qui ne s'oxyde pas à l'air.

La forme du dépôt dépend surtout de la *densité* du courant, c'est-à-dire du quotient de l'intensité par la surface des électrodes. Avec le cuivre, le dépôt n'est beau que si cette densité est faible; si elle augmente, il est rugueux et mamelonné; avec un courant plus fort, il devient pulvérulent. La concentration de la dissolution n'a qu'une influence beaucoup plus faible. La lame recouverte de cuivre doit être plongée dans l'eau distillée bouillie, immédiatement au sortir du bain, puis, après quelques minutes d'immersion, essuyée et séchée avec du papier buvard. Elle s'oxyderait rapidement si elle restait humide au contact de l'air.

Avec l'argent, la lame, une fois lavée dans l'eau distillée, peut être abandonnée à elle-même jusqu'à ce qu'elle se soit desséchée par évaporation spontanée.

On peut employer comme électrode positive ou anode, soit une lame de platine, soit une lame de même nature que le métal déposé et qui, en se dissolvant, reconstitue le sel décomposé par électrolyse. Avec le platine, la dissolution s'appauvrit et l'acide est mis en liberté, mais cette circonstance n'a pas d'influence sur le dépôt, si la réduction du sel n'est pas poussée au point d'altérer d'une manière notable la richesse de la dissolution.

Quand on emploie deux lames de même métal, l'électrode soluble doit, théoriquement, perdre tout ce que l'autre électrode a gagné; par suite, il devrait être indifférent de peser l'une ou l'autre lame. C'est ce que l'on constate, en effet, avec des lames d'argent bien pur, dans une dissolution d'azotate à 15 pour 100 et une densité convenable du courant. Mais l'expérience montre, en général, pour le cuivre surtout, que la perte de l'anode est plus grande que le gain de la cathode : le

[1] Berthelot, *C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. LXXXVI, p. 71; 1878.

métal en se désagrégeant tombe en parcelles très fines qui peuvent se déposer irrégulièrement; il se forme en outre sur la lame soluble des composés oxygénés dont l'importance et la nature varient avec l'intensité du courant.

Les expériences faites sur le nitrate d'argent (**421**), avec des précautions particulières, ont montré qu'un ampère dépose 0,001118 gramme d'argent par seconde ou $4^{gr},025$ par heure.

Si l'on adopte pour l'argent l'équivalent 107,93 donné par Stass, il en résulte, pour un ampère, 0,09323 milligramme d'eau ou $0^{mgr},01036$ d'hydrogène.

Remarquons encore que l'unité d'électricité, exprimée en mesures électromagnétiques C.G.S., fournit $11^{mgr},18$ d'argent et $0^{mgr},1036$ ou $1^{gr},036.10^{-4}$ d'hydrogène. En d'autres termes, un gramme d'hydrogène, ou un équivalent d'un corps quelconque, correspond à $0,965.10^{4}$ ou $96,5.10^{2}$ unités d'électricité, c'est-à-dire $96,5.10^{3}$ coulombs; la masse d'hydrogène est à peu près le produit de la quantité d'électricité par 10^{-4}.

654. Appareils industriels. — Il est important dans les applications d'avoir des instruments dont on peut lire rapidement les indications sur des échelles graduées. On les appelle *ampèremètres* ou *voltmètres*, suivant qu'ils servent à déterminer les courants ou les différences de potentiel. Le même mode de construction peut généralement servir aux deux usages, quand on utilise les actions électromagnétiques des courants, suivant que l'appareil est intercalé dans le circuit ou que, possédant par lui-même une très grande résistance, il est mis en dérivation sur deux points.

Les *wattmètres* comprennent deux systèmes de bobines dont l'une est parcourue par le courant principal I, l'autre, de grande résistance, étant en dérivation sur deux points A et B dont la différence de potentiel est E. L'action électrodynamique est proportionnelle au produit EI, c'est-à-dire au travail absorbé par seconde entre les points A et B ou à la puissance en watts, au moins quand il s'agit de courants continus.

La plupart de ces instruments se présentent sous la forme d'une boîte circulaire munie d'un cadran avec aiguille indicatrice, et les principes de construction sont les mêmes que ceux des galvanomètres étudiés précédemment; nous en citerons seulement quelques exemples.

Dans l'ampèremètre de M. Deprez [1], un ensemble d'aiguilles de fer doux ou une lame unique dentée sur chaque bord, en forme d'arête de poisson, tourne autour d'un axe horizontal au milieu d'un cadre rectangulaire parcouru par le courant. Ce cadre est entouré par les deux branches d'un aimant en fer à cheval, de sorte que l'aiguille est aimantée par un champ très intense. Des poulies de multiplication transmettent la rotation produite par le courant à une aiguille indicatrice mobile devant un cercle dont la graduation est faite en ampères. L'amortissement est tel que le système est presque apériodique; on peut facilement observer la durée d'établissement du courant dans un circuit à grande induction propre, comme les bobines de Ruhmkorff.

Les ampèremètres de Lord Kelvin se composent de deux bobines horizontales A et B portées aux extrémités d'un fléau de balance. Chacune d'elles est située dans l'intervalle de deux autres bobines A_1 et A_2, B_1 et B_2, dont les dimensions et la distance sont réglées de manière que l'action soit maximum et à peu près uniforme (**634**). Les courants sont dirigés en sens contraires dans les bobines A et B, de sorte que l'appareil n'est pas sensible aux champs magnétiques extérieurs; les bobines fixes agissent par attraction sur l'une des bobines mobiles A, et par répulsion sur l'autre. Le couple électrodynamique est compensé par des poids gradués et l'équilibre s'achève par le déplacement d'un curseur sur une échelle divisée horizontale mobile avec le fléau.

La balance devient un wattmètre quand les deux systèmes de bobines sont parcourus par des courants différents; elle peut servir aussi pour les courants alternatifs si l'on complète le circuit des bobines mobiles par une grande résistance dont l'induction propre est négligeable.

Dans l'ampèremètre de Cardew, on utilise la dilatation d'un fil métallique par le courant. Les extrémités du fil sont attachées à deux points voisins A et B; les branches remontent verticalement, passent séparément dans les gorges de deux poulies et le coude des branches descendantes porte une petite poulie reliée à un ressort qui la tire de haut en bas.

[1] M. Deprez, *Journ. de Phys.*, t. IX, p. 227; 1880.

Le fil conserve ainsi une tension régulière ; quand il s'allonge par le passage du courant, la contraction du ressort est transmise à une aiguille indicatrice.

Comme la résistance du fil est très grande, l'appareil sert habituellement de voltmètre.

Il est utile de ramener l'aiguille au zéro avant chaque observation, parce que les variations de température ambiante modifient d'une manière notable la longueur primitive du fil ; la dilatation électrique correspond à l'excès permanent de température produit par le courant, lequel paraît assez indépendant des conditions extérieures.

Toutefois, pour que les indications du voltmètre restent comparables, il est nécessaire que la résistance du fil soit à peu près indépendante de la température ; on emploie à cet effet des alliages tels que le *platinoïde* (maillechort contenant 1 à 2 % de tungstène), la *nikéline* (61 Cu, 19 Zn, 18 Ni), ou la *manganine* (Cu, Mn, Ni), dont le coefficient de variation avec la température ne dépasse pas 0,0003.

655. Compteurs. — On a imaginé aussi un grand nombre d'appareils pour mesurer le débit total d'électricité pendant un certain temps ou l'énergie dépensée.

Le *compteur d'électricité* le plus simple, au moins en théorie, s'obtiendra en déterminant l'action chimique totale, soit par des électrodes en cuivre ou en argent dans une solution des mêmes métaux, soit par un voltamètre à gaz.

Un procédé plus fréquemment en usage dans la pratique consiste à rendre les ampèremètres enregistreurs, par la photographie ou par le tracé d'une plume sur un papier mobile, en évaluant l'aire totale de la courbe ; il est encore préférable d'employer des mécanismes qui font l'intégrale du débit.

La même méthode s'applique aux wattmètres, qui mesurent à chaque instant la puissance du courant, et que l'on transforme ainsi en *compteurs d'énergie* totale. Ce problème présente un intérêt particulier dans l'industrie, surtout quand il s'agit de courants alternatifs.

En effet, la distribution industrielle des courants continus se fait généralement à différence de potentiel à peu près constante, de sorte que le débit total d'électricité est en même temps une mesure de l'énergie.

La question est moins simple avec les courants alternatifs. Lorsque l'énergie dépensée dans le circuit que l'on considère correspond uniquement à la chaleur dégagée dans sa résistance r, le travail élémentaire a pour expression $rI_m^2 dt$, en désignant par I_m^2 le carré moyen du courant, ou le carré du courant *efficace*.

Un appareil qui enregistre à chaque instant le carré du courant efficace permettra donc de mesurer l'énergie totale, par un système quelconque d'intégration, et deviendra un compteur d'énergie; les électrodynamomètres à courant unique donnent la valeur de I_m^2.

On peut toujours, sans erreur sensible, assimiler les courants alternatifs industriels à des courants sinusoïdaux (**393**). Le carré I_m^2 du courant efficace est alors la moitié du carré I^2 de l'amplitude du courant alternatif.

Le circuit de consommation étant placé en dérivation sur deux points A et B de la ligne, dont la différence de potentiel est $e = E \sin \omega t$, supposons encore que l'une des bobines à gros fil de l'électrodynamomètre se trouve dans ce circuit secondaire dont les constantes sont r_1 et L_1, la bobine à fil fin (r_2, L_2) étant aussi en dérivation sur les mêmes points A et B. Les deux courants dérivés sont de la forme $i_1 = I_1 \sin(\omega t - \alpha_1)$, $i_2 = I_2 \sin(\omega t - \alpha_2)$, et l'électrodynamomètre donne à chaque instant (**649**) le produit $P = I_1 I_2 \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}$. L'induction mutuelle étant négligeable, on a

$$E = \frac{I_1 r_1}{\cos \alpha_1} = \frac{I_2 r_2}{\cos \alpha_2}.$$

D'autre part, le travail élémentaire fourni par la ligne est

$$dW = e(i_1 + i_2)dt = E[I_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + I_2 \sin(\omega t - \alpha_2)] \sin \omega t dt,$$

ou, en prenant la valeur moyenne relative à chaque période,

$$dW = E \frac{I_1 \cos \alpha_1 + I_2 \cos \alpha_2}{2} dt = K dt,$$

$$K = \frac{I_1 I_2}{2}\left(r_2 \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} + r_1 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}\right) = P \frac{r_2}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}\left(\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} + \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}\right).$$

Le dernier terme, qui correspond au travail dépensé dans le fil fin, est négligeable. D'après la relation $r_2 \operatorname{tang} \alpha_2 = L_2 \omega$, l'angle α_2 est aussi très petit et il reste sensiblement $K = P r_2$, c'est-à-dire que les indications de l'électrodynamomètre, intégrées par un enregistreur, fourniront encore une mesure de l'énergie dépensée.

Nous signalerons en particulier le compteur très ingénieux imaginé par M. Elihu Thomson. Un petit anneau Gramme de grande résistance et sans armature de fer doux, muni de son collecteur à balais, est monté sur un axe vertical; il reçoit le courant i_2, dit de voltage.

Le champ est produit par des bobines également sans fer que traverse le courant utilisé i_1. Dans ce cas, le couple moteur est proportionnel à ei_1 et le travail pendant l'unité de temps au produit de la vitesse angulaire ω, par la valeur moyenne $(ei_1)_m$. Pour absorber le travail à chaque instant, l'arbre porte un disque de cuivre qui tourne entre les pôles d'aimants permanents en fer à cheval; les courants induits dans le disque sont proportionnels à la vitesse et donnent une espèce de frottement qui est lui-même proportionnel à ces courants et à la vitesse, c'est-à-dire finalement proportionnel à ω^2. La condition de régime régulier est donc, en désignant par k une constante,

$$\omega(ei_1)_m = k\omega^2, \qquad (ei_1)_m = k\omega.$$

Un rouage engrené avec une vis sans fin montée sur l'arbre totalise la rotation $\int \omega\, dt$ et, par suite, l'énergie électrique dépensée $\int ei_1\, dt$. Ce compteur paraît fournir des résultats tout à fait satisfaisants, aussi bien pour les courants alternatifs que pour les courants continus.

CHAPITRE TROISIÈME

DES RÉSISTANCES

APPAREILS GRADUÉS

656. Unités de résistance. — Ohm international. — L'étalon auquel on rapporte toutes les mesures pourrait être choisi arbitrairement. C'est ainsi que Jacobi [1] avait proposé d'employer un fil de cuivre de dimensions déterminées et, pour éviter toute erreur, de distribuer aux différents physiciens des échantillons d'un même fil.

Pendant longtemps les administrations télégraphiques ont pris, comme unité, un kilomètre ou un mille de fil de fer ou de cuivre d'un diamètre donné, mais l'industrie exige aujourd'hui des mesures plus exactes. En effet, les moindres traces de matières étrangères et les changements physiques, tels que la trempe ou l'écrouissage, modifient tellement la conductibilité d'un métal, que la nature et les dimensions d'un fil ne suffisent pas pour en définir la résistance ; en outre, la température a une influence considérable. Pouillet [2], qui a constaté ces différentes causes de variations, a rapporté toutes ses mesures de conductibilités, dès 1837, à celle du mercure distillé. Il prenait comme terme de comparaison la colonne de mercure comprise dans un tube cylindrique, dont le diamètre

(1) Jacobi, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXXIII, p. 277; 1851.
(2) Pouillet, *Éléments de Physique*, 3e édit., t. I, p. 586; 1837.

était déterminé par des pesées de mercure, et dont les extrémités se terminaient par deux flacons de large ouverture.

Werner Siemens [1] a répandu dans l'industrie un grand nombre d'étalons qui représentent très approximativement la résistance d'une colonne de mercure à 0°, ayant 1 mètre de longueur et 1 millimètre carré de section.

Cette unité reste encore arbitraire. Tout en conservant le mercure comme métal étalon, il est plus rationnel de choisir une colonne dont la résistance soit rapportée aux unités électromagnétiques C. G. S. La commission internationale des Unités électriques, réunie à Paris en 1884, avait adopté comme unité *pratique*, sous le nom d'ohm *légal*, la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur, à la température de la glace fondante. L'incorrection reconnue de cette valeur et la difficulté de comparer au mètre la section d'un tube de verre ont conduit les congrès ultérieurs à définir la colonne de mercure, de section constante, par sa longueur (106,3 centimètres) et par la masse de mercure (14,4521 grammes) qu'elle renferme; c'est la définition de l'ohm international (**421**).

La construction d'un étalon de résistance conforme à cette définition se résume dans le calibrage d'un tube et la pesée du mercure qu'il contient à la température de zéro. Il importe peu d'ailleurs que la forme du tube réalise les conditions imposées, pourvu qu'on connaisse les dimensions de la colonne de mercure qui le remplit, mais il est nécessaire, pour la facilité des comparaisons, que la résistance de l'étalon ne s'écarte pas beaucoup de la valeur adoptée.

Le calibrage doit être fait par les méthodes employées pour les thermomètres de précision, en étudiant, à température constante, la longueur occupée par une même masse de mercure en différentes régions du tube.

Le tube est d'abord divisé en parties d'égale longueur; on détermine ensuite, dans la région qui doit être utilisée, le rapport $1+\alpha$ du volume moyen de l'ensemble des divisions au volume de chacune d'elles, c'est-à-dire le rapport des sections correspondantes s et σ.

[1] W. Siemens, *Pogg. Ann.*, t. CX, p. 1; 1860.

On mesure par un mètre étalonné la longueur $l = N\varepsilon$ de N divisions du tube, ramenée à la température de zéro, et on détermine la masse P de mercure qu'elles renferment dans ces conditions. Le volume total est alors $V = N\varepsilon s = ls$.

Si ρ est la résistivité du mercure, la résistance de chaque division est $\rho \frac{\varepsilon}{\sigma} = \rho \frac{\varepsilon}{s}(1 + \alpha)$ et la résistance totale

$$R = \Sigma \rho \frac{\varepsilon}{\sigma} = \rho \frac{\varepsilon}{s}(N + \Sigma\alpha) = \rho \frac{l}{s}\left(1 + \frac{\Sigma\alpha}{N}\right).$$

Un tube conforme à la définition, de section s_0, renfermerait $P_0 = 14{,}4521$ grammes de mercure; son volume serait $V_0 = s_0 . 106{,}3$ et sa résistance

$$R_0 = 1^{\text{ohm}} = \rho \frac{106{,}3}{s_0}.$$

Il en résulte

$$\frac{P_0}{P} = \frac{V_0}{V} = \frac{s_0}{s} \cdot \frac{106{,}3}{l},$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{l}{106{,}3} \cdot \frac{s_0}{s}\left(1 + \frac{\Sigma\alpha}{N}\right) = \frac{P_0}{P}\left(\frac{l}{106{,}3}\right)^2\left(1 + \frac{\Sigma\alpha}{N}\right).$$

Le rapport de l à P est connu par la loi des sections et à peu près constant; cette dernière équation déterminera donc la longueur l pour laquelle $R = R_0 = 1$ ohm.

Pour faire usage du tube, il faut encore engager les extrémités dans des flacons de grand diamètre renfermant aussi du mercure, et on doit faire intervenir la résistance des portions de mercure qui étalent le courant dans les flacons; la théorie et l'expérience montrent que la correction relative à cette double communication s'obtient avec une exactitude suffisante en ajoutant à la longueur du tube une fraction de son diamètre égale à 0,82. Après avoir calculé la valeur de l qui correspondrait à un ohm, on en retranche 0,82 du diamètre et on coupe le tube à cette nouvelle longueur.

Le diamètre même du tube peut intervenir parce que la surface du mercure n'est pas exactement dans le même état

que les couches intérieures, à cause de la capillarité, mais cette circonstance n'a qu'une influence négligeable.

M. Benoît a pu réaliser ainsi quatre étalons prototypes dont la différence des résistances n'atteint pas 0,000 02 [1].

L'étalon rectiligne de mercure n'est pas d'un emploi commode. On peut en construire des copies à l'aide d'un tube étroit de forme quelconque, contenant du mercure, et dont les extrémités communiquent avec des réservoirs de grand diamètre. La figure 173 représente un étalon dont le tube,

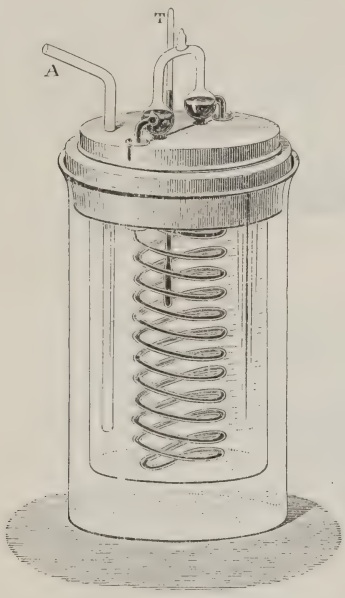


Fig. 173.

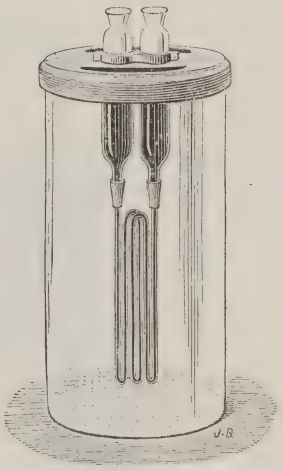


Fig. 174.

contourné sous forme d'une double hélice, a été rempli de mercure dans le vide, et communique avec des réservoirs extérieurs par de gros fils de platine. La partie capillaire du tube plonge dans un bain dont la température est connue par un thermomètre T; un tube latéral A permet d'agiter le liquide par un courant d'air. On a déterminé d'ailleurs par expérience, soit la correction qu'on doit apporter à cette résistance à la température de zéro, soit la température nor-

(1) Benoit, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIX, p. 864; 1884.

male pour laquelle l'étalon vaut un ohm. La variation de résistance du mercure dans un tube de verre, en fonction de la température, peut être calculée par la formule

$$R = R_0(1 + 0{,}0008649t + 0{,}00000112t^2).$$

Toutefois, on peut craindre que le platine situé dans le mercure intérieur ne s'y dissolve en partie avec le temps ou ne donne des contacts imparfaits. M. Benoît a adopté une forme un peu différente (fig. 174). Les extrémités du tube capillaire se terminent dans des tubes plus larges ouverts à l'air libre. Le remplissage a lieu encore dans le vide, mais le mercure peut être facilement renouvelé.

Les instruments de verre étant fragiles, on construit géné-

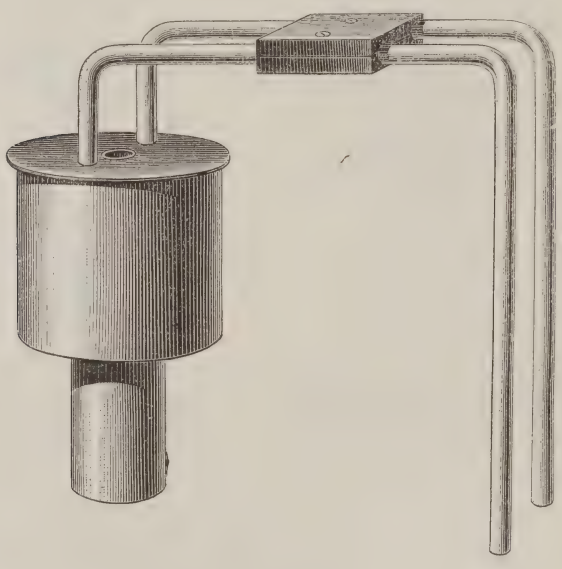


Fig. 175.

ralement les étalons pratiques avec des fils métalliques ; les alliages doivent être préférés aux métaux purs parce que leur résistance varie moins avec la température. Tandis que le coefficient de variation avec la température est de 0,0039 pour le cuivre, il n'est que de 0,00044 pour le maillechort et 0,00031 pour un alliage de platine et d'argent renfermant un tiers de platine.

La figure 175 représente la forme d'étalon qui avait été adoptée par le comité de l'Association Britannique en 1865. Le fil est en alliage de platine-argent, recouvert d'une double enveloppe de soie et verni à la gomme laque; il est replié sur lui-même, enroulé en hélice et noyé dans une masse de paraffine remplissant l'intervalle de deux cylindres concentriques en laiton. Les bouts du fil sont soudés à deux grosses tiges de cuivre recourbées deux fois à angle droit et dont les extrémités amalgamées plongent dans des godets à mercure. Le cylindre peut être entouré de glace ou immergé dans l'eau ; un thermomètre que l'on introduit dans le tube central donne la température. Toutefois, malgré la grande surface de contact avec l'eau, la mauvaise conductibilité de la paraffine pour la chaleur laisse toujours un doute sur la température réelle du fil, à moins que celle du bain n'ait été maintenue constante pendant plusieurs heures.

La forme adoptée par W. Siemens est représentée dans la

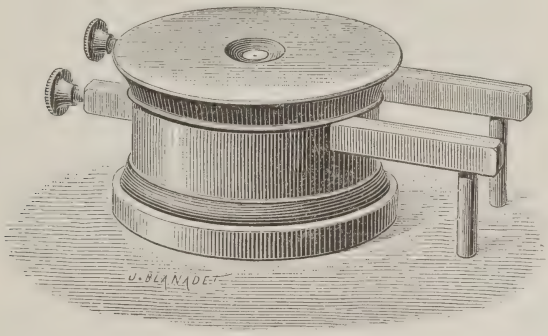


Fig. 176.

figure 176. Le fil, en maillechort recouvert de soie et verni, est enroulé sur la surface d'un cylindre de bois et terminé par deux grosses tiges de métal. Il est protégé par une enveloppe métallique qui laisse un intervalle suffisant pour la circulation de l'air et le tout est enfermé dans une boîte en bois. Une cavité cylindrique ménagée au milieu de la bobine permet d'y placer un thermomètre, mais la détermination de la température est plus difficile; il est bon d'envelopper l'appareil dans une couche épaisse d'ouate.

Le degré de permanence des étalons de résistance est une question sur laquelle on ne possède pas encore de renseignements très exacts. Avec le mercure, les seuls changements à craindre sont ceux qui proviendraient de la déformation du verre; les défauts de pureté que peut présenter le mercure du commerce n'ont pas d'influence appréciable; un nouveau remplissage du tube ne change pas les résultats et, sauf la facilité de l'opération, il paraît indifférent de faire ce remplissage dans le vide ou dans l'air.

Les étalons métalliques ne présentent pas les mêmes garanties. Le comité de l'Association Britannique a fait déposer à l'observatoire de Kew plusieurs étalons, soit en *platine*, soit en alliages de *platine-argent*, de *platine-iridium*, ou d'*or-argent*. Matthiessen et Hockin ont comparé ces étalons en 1867 et déterminé les températures auxquelles ils avaient alors la même résistance ([1]). Une nouvelle comparaison faite en 1876 par MM. Chrystal et Saunder ([2]), avec des précautions minutieuses, n'a pas donné les mêmes résultats, mais on pouvait croire que les différences étaient dues à la détermination des températures. M. Fleming ([3]) a repris le même travail en 1881; il s'est encore présenté des différences notables avec les mesures précédentes et les écarts s'élevaient parfois à 0,011. Deux fils de *patent nickel* et un fil de *platine iridié*, étudiés par M. Klemencic ([4]), n'ont présenté que des variations insignifiantes pendant trois ans, tandis que la résistance d'un fil de *maillechort* augmentait d'une manière continue et même de plus en plus rapide.

657. Boîtes de résistances. — Il est nécessaire d'avoir à sa disposition une série de résistances dont les valeurs croissent d'une manière régulière. Elles sont formées habituellement de bobines placées dans une même boîte, et munies de clefs qui permettent de les introduire à volonté dans un circuit.

Le fil, enveloppé de matière isolante, est encore replié sur lui-même avant d'être enroulé en bobine, afin d'éviter l'action du courant sur les galvanomètres et réduire au minimum l'in-

([1]) *Brit. Ass. Rep.*, for 1867. Dundee. — *Reprint*, p. 145.
([2]) *Brit. Ass. Rep.*, for 1876, p. 13, Glasgow.
([3]) *Brit. Ass. Rep.*, for 1883, p. 41, Southport.
([4]) Klemencic, *Wien. Berichte* [2], t. XCIX, p. 780; 1890.

duction propre (582); des bandes de métal entourées de soie sont encore plus efficaces à ce point de vue [1]. La bobine, une fois construite, est noyée dans une couche de paraffine.

Les deux extrémités du fil de chaque bobine sont soudées à des pièces de cuivre épaisses, laissant entre elles un petit intervalle; une double échancrure permet d'introduire entre elles, avec une forte pression, une cheville en cuivre qui les réunit. Ce mode de communication est excellent dans la pratique, mais la résistance offerte par les chevilles peut quelquefois s'élever à 0,0001 d'ohm [2].

Les bobines sont disposées à la suite les unes des autres, de manière que chaque pièce de cuivre joigne deux bobines successives. Quand une cheville est enlevée, la résistance de la bobine correspondante est introduite dans le circuit; en plaçant la cheville, on supprime cette résistance.

Si, au lieu de souder les fils aux masses de cuivre elles-mêmes, on les réunit à ces masses, comme on le fait souvent pour la facilité de la construction, par de petites tiges en cuivre, on ne doit pas souder les fils de deux bobines successives à une même tige, mais terminer chaque fil par une tige spéciale, afin que la résistance qu'on obtient en enlevant deux chevilles soit exactement la somme des résistances obtenues quand on enlève chacune de ces chevilles successivement.

Il est très avantageux, pour la vérification des boîtes, que chacune des pièces de cuivre soit percée d'un trou pouvant recevoir une cheville spéciale, munie d'un serre-fils. Cette disposition permet d'introduire dans un circuit, et d'une manière indépendante, une quelconque des résistances qui composent la boîte.

Plusieurs systèmes de subdivisions peuvent être adoptés pour graduer les valeurs des résistances. Le plus économique consisterait à employer une série de bobines dont les résistances varieraient comme les termes de la progression 1, 2, 2^2, 2^3, ... 2^n. Avec $n+1$ bobines on aurait toutes les résistances depuis 1 jusqu'à $2^{n+1}-1$. Douze bobines, dont la première est un ohm, suffisent pour réaliser toutes les résistances depuis 1 ohm jusqu'à 8191 ohms.

(1) Ayrton et Mather, *Electrician*, t. XXVII, p. 254; 1891.
(2) Dorn, *Ann. Wied.*, t. XXII, p. 558; 1884.

Pour obtenir une résistance donnée, 107 par exemple, on la traduira dans le système binaire, $2^6 + 2^5 + 2^3 + 2 + 1$, ou 1101011; laissant ouvertes toutes les bobines qui correspondent aux chiffres 1, on ferme par des chevilles toutes celles qui correspondent aux zéros.

Il est bon d'ajouter à la série une unité supplémentaire, qui permettra de vérifier les valeurs relatives des bobines. Ce mode de division n'est pas employé à cause des calculs qui le rendraient très incommode.

On combine souvent les bobines comme les boîtes de poids, en leur donnant la série des valeurs 1, 2, 2, 5 pour les unités, les dizaines, les centaines, etc. Seize bobines, avec une unité supplémentaire pour les vérifications, donneront ainsi toutes les résistances de 1 à 10000 ohms.

Ces dispositions ont l'inconvénient d'introduire un nombre variable de chevilles pour chaque combinaison de résistances et, par suite, un nombre variable de contacts dont l'effet n'est pas toujours négligeable; en outre la lecture des résultats ne se fait pas rapidement.

Dans les appareils de précision, les bobines sont formées par groupes d'unités de différents ordres réunies bout à bout; une cheville fait communiquer la n^e bobine de chaque groupe avec une pièce de cuivre réunie au groupe suivant.

Les bobines de chaque groupe sont rangées, soit en ligne droite avec une barre latérale pour la communication avec le groupe suivant, soit en couronne avec une pièce de communication centrale, de manière à former une série de cadrans. Chaque groupe (fig. 177) renferme 9 bobines égales, reliées entre elles par des plaques de cuivre au nombre de 10 et numérotées de 0 à 9, sans communication entre les dernières plaques 9 et 0. Le disque de cuivre central est relié à la plaque 0 du cadran suivant par l'intermédiaire de lames ou de barres de cuivre L, L′, L″; les chevilles se placent entre le disque et les plaques de la couronne.

Les boîtes contiennent ordinairement quatre cadrans correspondant aux *unités*, *dizaines*, *centaines* et *milles;* on y ajoute aussi une unité supplémentaire placée dans l'intérieur de la boîte, et dont les extrémités aboutissent à deux bornes latérales v et v'.

Des chevilles spéciales, munies de serre-fils, et qui se placent dans des trous situés au milieu des plaques en couronne permettent de prélever une résistance quelconque sur l'ensemble des cadrans.

Dans ce cas, il faut employer 37 bobines pour obtenir un total de 10 000 ohms, mais l'accroissement de prix qui en résulte est largement compensé par l'exactitude des opérations et la facilité des lectures.

Il est encore préférable de former chacun des groupes par

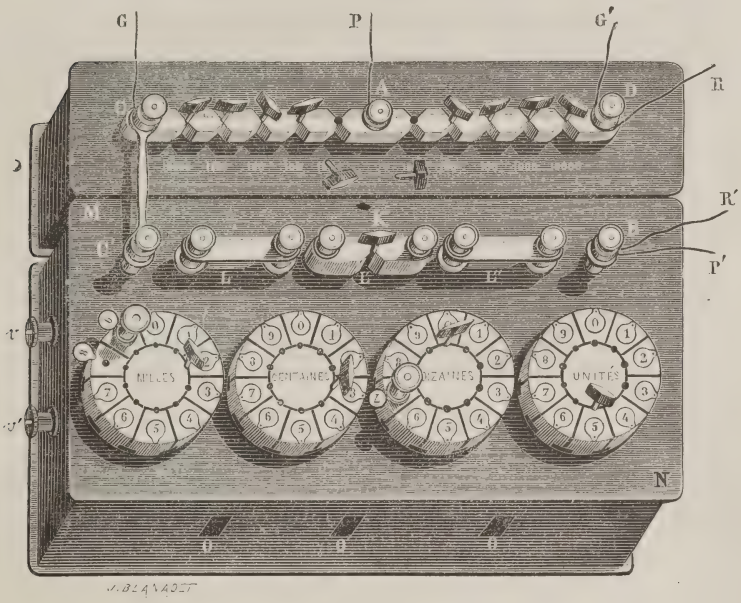


Fig. 177.

des *décades* complètes de 10 bobines, ce qui porte leur nombre total à 40; on a alors l'avantage que les moyens de vérification sont très nombreux.

Le fil des boîtes de résistance est habituellement très fin; il serait dangereux d'y faire passer des courants intenses qui risqueraient d'altérer la matière isolante ou même de brûler le métal. On peut réaliser des résistances moins délicates avec des baguettes de charbon, comme celles qui servent pour la lumière électrique, avec des garnitures de cuivre; ces résistances varient très peu avec la température.

Enfin, on obtient des résistances très grandes et d'un emploi commode avec des traits de plombagine tracés sur l'ébonite, ou mieux dans une rainure bien polie. Les extrémités sont reliées à des bornes de cuivre, et le trait lui-même est ensuite recouvert de vernis [1]. Il est nécessaire de vérifier à différentes époques la valeur de ces résistances, car elles s'altèrent avec le temps, mais elles sont très peu sensibles aux influences de la température.

658. Boîtes de conductances. — Les bobines peuvent être disposées de manière à combiner directement les inverses des résistances, c'est-à-dire les conductances.

Lorsque plusieurs résistances r_1, r_2,.., r_n sont disposées

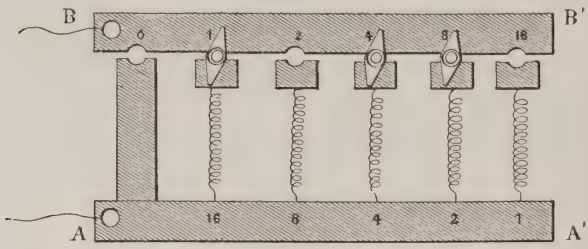


Fig. 178.

en arcs multiples, entre deux points (**156**), la conductance du système, ou l'inverse de sa résistance R, est égale à la somme des conductances de chacun des arcs [2] :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}.$$

Considérons, par exemple, une série de bobines dont les résistances varient comme les puissances de 2. Toutes les bobines communiquent par une de leurs extrémités avec une même barre AA' (fig. 178), tandis que l'autre extrémité est terminée par une plaque de cuivre ; ces plaques peuvent être

[1] Philipps, *Ph. Mag.* [47], t. XL, p. 41; 1870.

[2] Lord Kelvin avait proposé d'appeler *mho*, qui est *ohm* lu en sens inverse, la conductance d'un corps dont la résistance est un *ohm*. Un *mhomètre* serait un appareil de mesure pour les conductances.

réunies par des chevilles à une seconde barre BB′. On introduit ainsi entre les deux barres et, par suite, entre les points A et B du circuit, autant de bobines en arcs parallèles qu'on place de chevilles.

Les chiffres de la barre supérieure représentent les résistances de chaque bobine, les chiffres inférieurs leurs conductances multipliées par 16. Avec la disposition des chevilles indiquées sur la figure, la conductance du système formé par les trois bobines serait $\frac{22}{16}$ et sa résistance $\frac{16}{22}$.

659. Corrections de température. — Les bobines des boîtes de résistances ne représentent réellement les valeurs marquées qu'à une certaine température t_0, que les constructeurs soigneux ne manquent pas d'indiquer ; une correction est nécessaire quand on opère à une température t. Comme cette différence $t - t_0$ est généralement assez faible, la variation est sensiblement linéaire ; les résistances correspondantes R et R_0 sont alors liées par une relation de la forme

$$R = R_0[1 + \alpha(t - t_0)].$$

Les boîtes doivent être disposées de manière qu'on puisse connaître la température des bobines. L'intérieur de la boîte est en communication avec des ouvertures latérales O (fig. 177), dans lesquelles on introduit des thermomètres dont les réservoirs se trouvent ainsi placés auprès des bobines. Une variation de 1° correspond à une erreur relative maximum de 0,0003 ou 0,0004, suivant que le fil est formé par un alliage de platine-argent ou en maillechort.

Dans certains cas, l'unité supplémentaire $\rho\rho'$ est un fil de cuivre rouge, enroulé sur un cylindre d'ébonite et occupant toute la longueur de la boîte. La variation de résistance du cuivre pour 1° étant 0,0039 environ, c'est-à-dire onze fois plus grande que celle des bobines, la mesure de cette résistance par la boîte elle-même, avec une approximation de 0,0001, donnera la température à moins d'un trentième de degré.

Les variations de température les plus à craindre sont celles qui résultent du passage même du courant ; il n'est pas inutile d'en donner une idée numérique.

Dans un fil de résistivité ρ et de section s, où la différence de potentiel par unité de longueur est E, la quantité de chaleur dégagée par seconde est

$$\frac{EI}{J} = \frac{E^2}{J} \cdot \frac{s}{\rho}.$$

Si p est la masse spécifique et c la chaleur spécifique du métal, l'élévation de température correspondante δt est, à part la chaleur perdue par le rayonnement,

$$spc\,\delta t = \frac{E^2}{J} \cdot \frac{s}{p}, \qquad \delta t = \frac{E^2}{J} \cdot \frac{1}{\rho pc}.$$

A même valeur de E, la vitesse d'échauffement est indépendante du diamètre et la variation relative de résistance est

$$\frac{\delta R}{R_0} = \alpha\,\delta t = \frac{E^2}{J} \cdot \frac{\alpha}{\rho pc}.$$

Pour le cuivre et le maillechort, le produit pc, qui représente la capacité calorifique de l'unité de volume, a sensiblement la même valeur 0,87. Le cuivre donne alors

$$\frac{\alpha}{\rho pc} = \frac{0{,}0039}{1600 \,.\, 0{,}87} = 2{,}8 \,.\, 10^{-6}.$$

Pour le maillechort, $\alpha' = \alpha \,.\, 0{,}11$ et $\rho' = 13\rho$; il en résulte

$$\frac{\alpha'}{\rho'} = \frac{1}{120} \cdot \frac{\alpha}{\rho}.$$

Avec des fils de même longueur, soumis à la même différence de potentiel, le changement de résistance sera donc 120 fois moindre pour le maillechort que pour le cuivre.

Si l'on fait $E = n$ volts $= n \,.\, 10^8$ et $J = 4{,}17 \,.\, 10^7$, la variation relative de résistance du cuivre par seconde serait

$$\frac{n^2 \,.\, 10^9}{4{,}17} \cdot 2{,}8 \,.\, 10^{-6} = 672\,n^2.$$

Il faut donc prendre des précautions particulières pour que les bobines ne soient traversées par un courant que pendant le moindre temps possible.

660. Rhéostats. — Avant l'emploi des boîtes de bobines, on faisait usage de fils dont on utilisait une longueur variable. Pouillet [1] se servit d'abord d'un fil de platine de 132 mètres de longueur tendu en bouts parallèles sur une planchette. Wheatstone réalisa le même appareil sous une forme plus commode et lui donna le nom de *rhéostat* [2].

Le rhéostat de Wheatstone se compose de deux cylindres parallèles de même diamètre, tournant dans le même sens et avec la même vitesse ; l'un est en laiton et à surface lisse ; l'autre, en verre ou en bois, porte des rainures en hélice. Un fil de laiton s'enroule de l'un sur l'autre des cylindres, suivant le sens de la rotation commune. Toute la portion du fil située dans les rainures du cylindre rayé est isolée et agit seule comme résistance.

Cette disposition ingénieuse présente de grands inconvénients. Le fil est tiré dans un sens et dans l'autre par des enroulements inverses, qui le modifient ou même le déforment ; on ne plus considérer sa résistance comme régulière et proportionnelle à la longueur. En outre, le point de contact avec le cylindre de laiton est très mal défini.

Dans le rhéostat de Jacobi [3], le fil est enroulé à demeure sur un cylindre isolant qui peut tourner autour de l'axe ; une molette, mobile parallèlement à l'axe, est pressée sur le fil par un ressort et établit le contact en un point variable. Le mouvement de la molette est commandé par celui du cylindre, elle avance d'un pas de l'hélice quand le cylindre fait un tour. On évite ainsi les déformations du fil, mais on n'est jamais assuré que la résistance au contact conserve toujours la même valeur, malgré les différentes dispositions imaginées depuis pour diminuer cet inconvénient. Dans tous les cas, l'emploi des rhéostats tournants est très commode quand on veut faire varier une résistance d'une manière continue, sans qu'il soit nécessaire d'en connaître exactement la valeur.

(1) Pouillet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IV, p. 785; 1837.
(2) Wheatstone, *Bakerian lecture* for 1843.
(3) Jacobi, *Pogg. Ann.*, t. LIV, p. 340; 1841 et t. LIX, p. 145; 1843.

Les rhéostats *à corde* de Pouillet et de Poggendorf comportent plus de précision. Deux fils de platine sont tendus parallèlement; un contact glissant établit en un point quelconque la communication entre les deux fils, pour en introduire une longueur variable dans le circuit. Le double contact s'obtient habituellement à l'aide d'une pièce de métal creusée de deux godets remplis de mercure; chacun des fils passe dans une sorte de filière qui traverse le godet correspondant et la capillarité suffit pour empêcher l'écoulement du mercure. Toutefois, il est difficile d'obtenir que la communication du fil au mercure se produise toujours au même point du contact glissant.

Les résultats sont plus exacts quand on place les fils dans un tube de verre vertical que l'on remplit plus ou moins de mercure à l'aide d'un réservoir latéral. Des bornes convenables permettent d'introduire dans le circuit les deux fils séparément, en série ou en arcs parallèles [1], de manière à obtenir des résistances très inégales. On peut ainsi connaître la température des fils en les noyant dans un liquide très mauvais conducteur comme le pétrole.

MÉTHODES DIVERSES DE COMPARAISON.

661. Rapport des courants. — La méthode la plus simple, au moins en théorie, pour comparer deux résistances est de comparer, par un galvanomètre gradué en valeurs relatives, les courants que donne une même force électromotrice E dans les circuits dont elles font partie successivement.

Soit r_0 la résistance de la pile et du galvanomètre, y compris les fils de jonction, r et r' deux résistances à comparer, I_0 l'intensité du courant avec la résistance r_0 seule, I et I′ les intensités obtenues quand on intercale successivement dans le circuit les résistances r et r'. On a

$$(1) \qquad E = I_0 r_0 = I(r_0 + r) = I'(r_0 + r');$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{I'}{I} \cdot \frac{I_0 - I}{I_0 - I'}.$$

[1] Crova, *Journ. de Phys.*, t. III, p. 124; 1874.

Si les résistances r et r' sont réunies d'abord bout à bout, puis en arcs parallèles, les intensités correspondantes I_1 et I_2 du courant donnent encore

$$(2) \qquad E = I_0 r_0 = I_1(r_0 + r + r') = I_2\left(r_0 + \frac{rr'}{r+r'}\right).$$

On déduit aisément des équations (1) et (2)

$$\frac{r}{r'} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{I_0 - I}{I - I_1} = \frac{I_0}{I} \cdot \frac{I_2 - I}{I_0 - I_2} = \frac{I_0}{I_1} \cdot \frac{I' - I_1}{I_0 - I'} = \frac{I'}{I_0} \cdot \frac{I_0 - I_2}{I_2 - I'}.$$

L'expérience fournit ainsi plusieurs vérifications, mais il est facile de s'assurer que la précision des mesures est inférieure à l'exactitude relative des lectures du galvanomètre.

662. Résistances très grandes. — Lorsque les résistances r et r' sont très grandes par rapport à celle du circuit, et très différentes entre elles, on peut faciliter la comparaison par l'emploi des shunts (**636**).

Appelant ρ la résistance de la pile jusqu'aux bornes du galvanomètre, g celle du galvanomètre, m et m' les pouvoirs multiplicateurs utilisés avec les résistances r et r', i et i' les intensités correspondantes, on a

$$E = mi\left(\rho + \frac{g}{m} + r\right) = mir\left[1 + \frac{1}{r}\left(\rho + \frac{g}{m}\right)\right],$$

ou sensiblement

$$mir = m'i'r', \qquad \frac{r}{r'} = \frac{m'i'}{mi}.$$

Si l'une des résistances r est tellement grande, par rapport à l'autre, que l'emploi des shunts ne suffise pas pour avoir des déviations mesurables dans les deux cas, on modifiera la force électromotrice en prenant des nombres différents n et n de couples identiques, ce qui donne

$$\frac{n}{n'} = \frac{mir}{m'i'r'}, \qquad \frac{r}{r'} = \frac{n}{n'}\frac{m'i'}{mi}.$$

On supprime habituellement le shunt pour l'observation

relative à la grande résistance r, et on ne prend qu'un couple pour la petite; on a alors $n' = 1$, $m = 1$ et, par suite,

$$\frac{r}{r'} = n\,m'\,\frac{i'}{i}.$$

C'est ainsi, en particulier, qu'on mesure la résistance de l'enveloppe isolante d'un câble télégraphique; le câble étant plongé dans une cuve pleine d'eau, l'un des bouts reste isolé et l'autre est relié à la cuve par l'intermédiaire de la pile et du galvanomètre.

Au moment où l'on interpose ainsi un câble isolé dans le circuit d'une pile, le courant est d'abord beaucoup plus grand et diminue ensuite jusqu'à une valeur minimum. Le courant initial est la superposition de trois effets : la charge du câble fontionnant comme condensateur, le courant qui correspond au phénomène de l'absorption électrique, enfin la perte par l'enveloppe isolante. Le premier cesse rapidement, le second est plus durable, le troisième seul est permanent; c'est de l'intensité finale que l'on déduira la résistance d'isolement.

L'emploi d'une pile d'un grand nombre n de couples identiques fournit encore une méthode plus simple [1].

Le circuit extérieur étant formé par les résistances r et r' réunies bout à bout, on met un galvanomètre en communication, d'une part avec le point d'attache des deux résistances et, d'autre part, avec un couple d'ordre p, choisi de telle façon que le courant dans le gavanomètre soit nul. Le courant I est alors le même dans les deux parties du circuit séparées par les points de contact, dont l'une contient p couples et la résistance r, l'autre $n - p$ couples et la résistance r'. En appelant ρ la résistance de chaque couple, les forces électromotrices des deux portions sont respectivement proportionnelles à leurs résistances, ce qui donne

$$\frac{p}{n-p} = \frac{r + p\rho}{r' + (n-p)\rho} = \frac{r}{r'}.$$

663. Mesures électrostatiques. — Avec les grandes résistances, la chute du potentiel (**637**) d'un bout à l'autre est assez

(1) G. Foussereau, *Ann. de chim. et de phys.* [6], t. V. p. 241; 1885.

notable pour qu'on puisse l'évaluer par un électromètre, ou même par un galvanomètre dont la résistance propre est de beaucoup supérieure à celles qu'on veut évaluer. Le rapport des résistances r et r', situées dans le circuit d'un même courant, est égal au rapport des différences de potentiel correspondantes. L'électromètre permet même l'emploi de courants alternatifs, si les résistances comprises entre les points observés ne renferment pas d'induction propre appréciable.

La mesure du débit fournit d'autres méthodes.

L'une des extrémités A de la résistance r est mise en communication avec l'une des armatures d'un condensateur de grande capacité ou avec l'un des pôles d'une pile composée d'un grand nombre de couples, l'autre armature ou l'autre pôle étant au sol; l'extrémité B de la résistance est réunie au sol par un électroscope à décharges. Si le potentiel en A a une valeur sensiblement constante V_0, le nombre des contacts de la feuille d'or est en raison inverse de la résistance.

En substituant à l'électroscope un condensateur de capacité C relié au sol par une armature, on mesurera le potentiel V_0 de la source et le potentiel V acquis par le condensateur au bout du temps t. Lorsque les effets d'induction sont négligeables, ainsi que la conductibilité du condensateur, la relation $(V_0 - V)dt = rIdt = rCdV$ donne encore

$$\frac{t}{Cr} = \mathcal{L}.\frac{V_0}{V_0 - V_1};$$

le second membre se réduit sensiblement à $\frac{V_1}{V_0}$ quand ce rapport est très petit.

Sans avoir recours à une source constante, on peut encore réunir par la résistance r les deux armatures d'un condensateur et déterminer le temps t nécessaire pour que la différence de potentiel passe de V_0 à V_1; on a alors

$$\frac{t}{Cr} = \mathcal{L}.\frac{V_0}{V_1} = \mathcal{L}.\frac{Q_0}{Q_1}.$$

On déterminera le rapport des potentiels V_0 et V_1 par un électromètre ou celui des charges correspondantes Q_0 et Q_1 par le galvanomètre balistique.

L'expérience fournit même une valeur absolu de la résistance, en unités électrostatiques ou électromagnétiques, suivant que la capacité C est évaluée dans l'un ou l'autre des deux systèmes. Pour la comparaison des résistances, la capacité C du condensateur s'éliminera dans le rapport.

Si le condensateur a une déperdition, elle équivaut à celle qui serait produite par une résistance r_0 entre les deux armatures. On détermine d'abord r_0 puis, après avoir réuni les armatures par la résistance r, la conductance totale $\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}$ du système; la valeur de r s'en déduit par différence.

Cette méthode est directement applicable à la résistance d'isolement des câbles; elle détermine le produit Cr de la capacité du câble par sa résistance d'isolement.

L'expérience se trouve alors compliquée par l'absorption électrique et les résultats sont très différents suivant le temps pendant lequel on a laissé l'âme du câble en contact avec la source; il est donc nécessaire de préciser les conditions. La règle établie par l'administration des télégraphes en France est d'employer comme source une pile de 100 couples Daniell ayant chacun une résistance de 10 ohms. On met le cable en communication avec la pile pendant 15 secondes et on mesure alors V_0 par la décharge instantanée. On charge de nouveau pendant 15 secondes, puis on décharge le câble après l'avoir abandonné à lui-même pendant une minute.

Il est à remarquer que le produit Cr est indépendant de la forme et des dimensions du câble et qu'il est simplement proportionnel au produit de la résistivité ρ de l'isolant par son pouvoir inducteur spécifique K. Le câble, avec son âme, son isolant et son armature, peut être assimilé à un condensateur formé de cylindres concentriques de longueur L et de rayons a et a'; les expressions de la capacité et de la résistance (**57**, **83** et **161**) donnent alors

$$\frac{1}{C}=\frac{2}{KL}\mathcal{L}.\frac{a'}{a},\qquad r=\frac{\rho}{2\pi L}\mathcal{L}.\frac{a'}{a};\qquad Cr=\frac{K\rho}{4\pi}.$$

Ce résultat est d'ailleurs général; c'est la conséquence de la corrélation qui existe (**159**) entre le flux d'électricité et le flux d'induction électrostatique.

Pour étudier la résistance des diélectriques, M. Curie [1] argente les deux faces d'une lame et trace un sillon sur l'une des argentures, de manière à isoler une surface a entourée d'un anneau de garde; cette surface a communique avec un quartz piezoélectrique et l'anneau de garde au sol. On porte la surface complète opposée à un potentiel déterminé, par une pile, et on compense avec le quartz la charge que prend la surface a, de manière que son potentiel soit nul. La pile étant supprimée, on abandonne l'appareil à lui-même. Au bout du temps t l'équilibre est détruit; le poids qu'on est obligé d'enlever sur le quartz pour rétablir l'équilibre est proportionnel à la perte de charge électrique.

664. Résistances liquides. — Des difficultés particulières se présentent pour les liquides électrolysables. Le passage d'une quantité quelconque d'électricité dans le liquide produit toujours une décomposition proportionnelle et transporte les produits sur les électrodes. Celles-ci, identiques à l'origine, deviennent le siège d'une force électromotrice de polarisation qui croît jusqu'à une valeur maximum (**182**).

Si la force électromotrice extérieure E est inférieure à ce maximum, un état d'équilibre tend à s'établir et le courant devrait cesser complètement. En réalité, le courant ne s'annule pas, mais reste très faible, sans qu'il y ait décomposition apparente de l'électrolyte; il est juste suffisant pour maintenir la polarisation constante et réparer les pertes par diffusion. Si la force électromotrice E est supérieure au maximum de polarisation, des bulles de gaz se dégagent aux électrodes.

L'effet immédiat de la polarisation des électrodes est donc de diminuer l'intensité du courant et de produire une augmentation *apparente* de la résistance. On attribuait autrefois cet effet à une résistance spéciale que l'électricité aurait rencontrée en passant d'un corps solide dans un liquide ou inversement, et on l'avait appelé *résistance au passage*. La présence sur les électrodes de dépôts non conducteurs, de bulles de gaz par exemple, peut introduire dans certains cas une résistance nouvelle qu'on peut encore appeler résistance au passage, mais dans un sens très différent du précédent.

[1] J. Curie, *Ann. de chim. et de phys.* [6], t. XVIII, p. 203; 1889.

Afin d'éliminer la polarisation des électrodes, Wheatstone [1] opérait avec des colonnes liquides de longueurs différentes et maintenait constante l'intensité du courant en compensant par un rhéostat les variations de résistance. En effet, si on suppose constante la force électromotrice E de la pile, ainsi que la force électromotrice e de polarisation, et qu'on appelle x, x',... les résistances du liquide, R la résistance constante du circuit, r, r',... les résistances correspondantes du rhéostat, on a

$$I = \frac{E - e}{R + x + r} = \frac{E - e}{R + x' + r'} = \ldots;$$

$$x - x' = r - r'.$$

Cependant l'expérience n'est pas à l'abri de toute objection : les dépôts gazeux amènent des variations de résistance dont il est impossible de tenir compte et on n'est pas assuré que la polarisation des électrodes reste invariable.

La difficulté disparaît, au moins en grande partie, quand on considère des dissolutions métalliques et qu'on emploie comme électrodes des lames du métal de la dissolution, car la polarisation est alors extrêmement faible ou nulle. Pouillet [2] a mesuré par ce procédé la résistance des dissolutions de sulfate de cuivre, sulfate de zinc, etc. Il employait un tube bien cylindrique partagé en parties d'égale longueur. Ce tube était fermé à sa partie inférieure par une lame du métal considéré, et un fil du même métal, mastiqué dans un tube de verre, ne laissant en communication avec le liquide que la partie inférieure, pouvait être amené à une distance variable du fond. A des déplacements égaux du fil correspondent évidemment des colonnes de mêmes résistances. Cette disposition fournit même un rhéostat d'un emploi assez commode.

M. Paalzow [3] a généralisé la méthode. Le liquide que l'on veut étudier est renfermé dans un tube en forme de siphon dont les branches plongent dans des vases poreux remplis du même liquide; les deux vases poreux sont placés dans des

(1) Wheatstone, *Phil. Trans.*, *R. S. L.*, vol. CXXXIII, p. 303; 1843.
(2) Pouillet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IV, p. 786; 1837.
(3) Paalzow, *Pogg. Ann.*, t. CXXXVI, p. 419; 1869.

vases plus larges contenant une dissolution de sulfate de zinc et deux électrodes en zinc amalgamé. Pour comparer deux liquides, on en remplit successivement les vases poreux et le siphon. Il est clair que l'on fait ainsi disparaître la polarisation des électrodes métalliques, mais on n'évite pas d'une manière complète les variations de force électromotrice qui peuvent se produire aux surfaces de contact du liquide avec le sulfate de zinc à travers le vase poreux.

La mesure des chutes de potentiel fournit une méthode qui paraît irréprochable [1]. Le liquide est contenu dans un tube bien cylindrique fermé à ses deux extrémités par des plaques de métal de même section qui servent d'électrodes principales. Le flux d'électricité peut être considéré comme uniforme et les surfaces de niveau comme normales à l'axe du tube.

Deux fils de platine isolés, que l'on peut appeler *électrodes parasites* ou *sondes électriques*, plongent en deux points A et B du liquide et communiquent avec les électrodes d'un électromètre. La chute de potentiel mesurée par l'électromètre est égale au produit du courant par la résistance de la colonne liquide entre les deux plans, si les fils ne sont pas polarisés. Il suffit, pour cela, qu'ils n'aient livré passage à aucun courant appréciable, ce qui revient à dire que la capacité de l'électromètre doit être infiniment petite par rapport à la capacité de polarisation des fils.

La capacité d'un électromètre à quadrants est toujours très faible par rapport à celle des électrodes parasites. Si l'on fait usage, au contraire, d'un électromètre capillaire (**613**), on aura soin que la surface immergée des électrodes soit très grande par rapport à celle du mercure dans le tube capillaire de l'instrument. Il y avantage, dans ce cas, à employer des lames de platine comme électrodes, parce que la capacité de polarisation est alors de 20 à 25 fois plus grande que pour les autres métaux.

Pour comparer directement la résistance de la colonne liquide à celle d'un conducteur métallique, on fait passer le courant principal à travers une boîte de résistances et on met alternativement en communication avec l'électromètre les

[1] Branly, *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.* [2], t. II, p. 209; 1873. — G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. LXXXIII, p. 192; 1876.

deux électrodes parasites du liquide et celles de deux points de cette boîte. Si l'indication est la même dans les deux cas, les résistances sont égales. S'il existait entre les forces électromotrices de contact aux points A et B une différence accidentelle, indépendante du courant et de la polarisation, on l'éliminerait en renversant le sens du courant et prenant la moyenne des déviations observées.

On éliminera mieux encore la polarisation des électrodes avec un courant auxiliaire. Les électrodes A et B, séparées dans le liquide par la résistance r que parcourt le courant principal I, sont réunies respectivement aux points A′ et B′ séparés par la résistance métallique r' sur un courant I′. L'électromètre étant intercalé dans le circuit ainsi formé, la déviation est nulle pour la condition $Ir = I'r'$.

665. Emploi des courants alternatifs. — M. Kolhrausch [1] a utilisé pour la mesure des résistances liquides une propriété des courants alternatifs de forme sinusoïdale, comme ceux qu'on obtient par la rotation d'un cadre dans un champ uniforme, ou la rotation d'un aimant dans une bobine.

Considérons un circuit renfermant un voltamètre et une source S. Appelant R et L les constantes du circuit, $e = E \sin \omega t$ la force électromotrice de la source, ε la force électromotrice de polarisation du voltamètre, le courant i, pour une époque quelconque, satisfait à l'équation

$$(3) \qquad L\frac{di}{dt} + Ri + \varepsilon = e = E \sin \omega t.$$

Si la polarisation reste toujours très inférieure à sa valeur maximum, on peut admettre qu'elle est proportionnelle à la quantité d'électricité qui a passé depuis l'origine ; en appelant c la capacité des électrodes, c'est-à-dire l'inverse de la différence de potentiel que leur donnerait l'unité d'électricité, dans l'hypothèse de cette proportionnalité, on peut écrire

$$c\varepsilon = \int i\,dt, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{i}{c}.$$

[1] F. Kohlrausch, *Pogg. Annalen*, t. CXXXVIII, p. 280 et 370; 1869. — T. CXXXXVIII, p. 143; 1873. — Jubelband, p. 290; 1874.

L'équation (3) devient alors

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \mathrm{R}\frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = \frac{de}{dt}.$$

C'est le problème traité précédemment (**395**), puisque la polarisation des électrodes équivaut à l'interposition d'un condensateur de capacité c.

La réactance du circuit est alors $L\omega - \frac{1}{c\omega}$. Comme le carré de cette expression s'ajoute au carré de la résistance R dans l'expression de l'amplitude du courant, il existe une vitesse de l'inducteur sinusoïdal pour laquelle le courant efficace est maximum. On a alors $Lc\omega^2 = 1$ et le courant efficace est simplement égal au quotient de la force électromotrice efficace par la résistance R.

On peut utiliser cette propriété directement. La résistance R du circuit étant complétée par une résistance du liquide x, on détermine le maximum de courant efficace, lequel correspond à une valeur ω_0 satisfaisant à la relation $1 = Lc\omega_0^2$.

Remplaçant le liquide par une résistance métallique r sans induction propre, on fait varier la vitesse de l'inducteur, ou la valeur de ω, de manière à obtenir le même courant. L'impédance étant la même dans les deux cas, il en résulte

$$(\mathrm{R}+x)^2 = (\mathrm{R}+r)^2 + L^2\omega^2.$$

Cette méthode suppose qu'il sera possible de réaliser le courant maximum dans le premier cas ; il faudra ensuite, dans la seconde expérience, mesurer la période T de la force électromotrice et connaître le coefficient L ou l'éliminer par une nouvelle épreuve dans des conditions différentes.

Il est plus avantageux de chercher, pour la même vitesse de rotation de l'inducteur, la résistance métallique r qui, substituée au liquide, reproduit la même intensité. L'égalité des impédances donne

$$(4) \qquad (\mathrm{R}+x)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2 = (\mathrm{R}+r)^2 + L^2\omega^2.$$

Pour que les résistances x et r soient égales, il faut qu'on ait

$$1 = 2Lc\omega^2, \qquad 2\omega^2 = \omega_0^2, \qquad T^2 = 2T_0^2.$$

Dans ce cas encore, il serait souvent difficile de réaliser la vitesse convenable de l'inducteur, et l'introduction des coefficient L et c complique les formules. Kohlrausch échappe à cette difficulté en employant des courants très faibles avec des électrodes platinées à grande surface dont la capacité est considérable. Si la capacité c est assez grande et la période assez petite pour que le produit $Lc\omega^2$ soit un nombre très grand, l'équation (4), se réduit à $x = r$. On devra constater alors que l'équivalence des résistances x et r est indépendante de la vitesse; cette vérification servira de contrôle à l'exactitude des expériences.

666. Entraînement par induction. — MM. Guthrie et Boys [1] ont cherché à déduire la conductibilité des liquides de l'intensité des courants induits dans leur masse par le mouvement d'un aimant. Ces courants étant fermés sur eux-mêmes et sans électrodes ne peuvent donner aucun effet de polarisation.

Le liquide est renfermé dans un vase de révolution suspendu par un fil métallique. Un système d'aimants extérieurs, qui produit un champ horizontal sensiblement uniforme, est capable de recevoir une rotation rapide autour de l'axe commun du fil et du vase. Des écrans empêchent la communication du mouvement par l'intermédiaire de l'air.

Toutes choses égales d'ailleurs, les courants induits dans la masse liquide sont proportionnels à l'intensité du champ, à la vitesse du déplacement relatif et à la conductibilité du liquide; ils tendent à s'opposer au mouvement. S'il n'y avait aucun frottement du liquide contre lui-même, ni contre les parois, le vase resterait immobile et le liquide finirait par prendre la même vitesse de rotation que les aimants. D'autre part, si la masse liquide formait avec le vase un système rigide, celui-ci serait entraîné dans le sens du mouvement jusqu'à ce que le couple de torsion fît équilibre au moment des actions électromagnétiques. En réalité, les diverses couches

(1) Guthrie et Boys, *Phil. Mag.* [5], t. X, p. 398; 1880.

concentriques prennent un mouvement de rotation très lent dont la vitesse angulaire va en décroissant du centre à la circonférence et dont la valeur moyenne n'atteint pas le vingt millième de celle des aimants. On peut donc admettre sans erreur sensible que la torsion mesure l'action électromagnétique et, par suite, pour une même vitesse et un même champ, la conductibilité du liquide.

On s'assurait que le vase seul ne donnait lieu par lui-même à aucune action. Pour tenir compte des variations du champ et du coefficient de torsion du fil, on recommençait chaque expérience en suspendant dans le vase un disque de laiton : la torsion devait rester la même pour une même vitesse, lorsque le champ et le fil n'avaient pas été modifiés.

Les auteurs ont appliqué cette méthode à des mélanges d'acide sulfurique et d'eau. Leurs résultats s'accordent assez bien avec ceux de M. Kolhrausch, surtout en ce qui concerne la position du maximum et du point d'inflexion de la courbe qui représente la conductibilité de ces mélanges.

667. Résistance d'un galvanomètre ou d'une pile. — L'emploi des shunts permet de déterminer la résistance ρ de la pile et la résistance g du circuit galvanométrique lui-même, sans qu'il soit nécessaire de recourir à un autre instrument.

On mesure d'abord le courant primitif I_0, puis le courant i obtenu avec un shunt de pouvoir m, enfin le courant direct I après introduction d'une résistance r. On a alors

$$E = I_0(\rho + g) = mi\left(\rho + \frac{g}{m}\right) = I(\rho + g + r);$$

$$\rho = \frac{r}{m-1} \cdot \frac{I}{i} \cdot \frac{I_0 - i}{I_0 - I}, \qquad g = \frac{r}{m-1} \cdot \frac{I}{i} \cdot \frac{mi - I_0}{I_0 - i}$$

Si la résistance r a été choisie de façon que les deux intensités i et I soient égales, il reste simplement

$$\rho = \frac{r}{m-1}, \qquad g = \frac{r}{m-1} \cdot \frac{mI - I_0}{I_0 - I}.$$

Un galvanomètre à grande résistance peut donner directement la résistance de la pile [1]. On observe d'abord le cou-

[1] Sir W. Thomson, *Journ. of Tel. Eng.*, t. I, p. 399; 1873.

rant total I, puis le courant i obtenu en intercalant entre les pôles un shunt s de même ordre de résistance que celle de la pile. On a alors, en appelant i' le courant dans le shunt pour la seconde expérience, $i's = ig$ et, par suite,

$$E = I(\rho + g) = (i + i')\rho + ig = i\left(\rho + \rho\frac{g}{s} + g\right).$$

Si ρ est très petit par rapport à g, on peut écrire

$$I = i\left(\frac{\rho}{s} + 1\right), \qquad \frac{\rho}{s} = \frac{I - i}{i}.$$

668. **Emploi de deux galvanomètres.** — On a supposé, dans les méthodes précédentes, que la force électromotrice reste constante, ce qui n'a pas toujours lieu, surtout avec des piles polarisables, lorsqu'elles sont traversées par des courants d'intensités très différentes.

On éliminera cette cause d'erreur avec deux galvanomètres. Le circuit de la pile renferme un rhéostat R (fig. 179) et

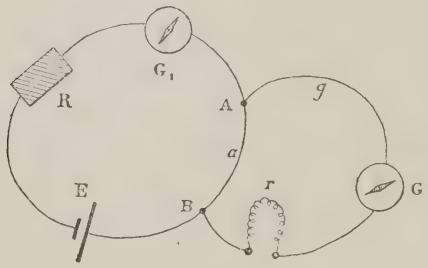


Fig. 179.

un galvanomètre G_1 ; aux points A et B du circuit, séparés par une résistance a, on fait aboutir les extrémités d'un fil qui renferme un second galvanomètre G, puis on intercale successivement dans cette branche AGB, de résistance g, les deux résistances r et r' à comparer.

A l'aide du rhéostat, on peut maintenir constante la déviation de l'un ou l'autre des deux galvanomètres dans les différentes expériences. Supposons d'abord que l'intensité I_0 reste constante sur le circuit principal et désignons par i_0, i, i' les

trois intensités observées dans le galvanomètre G ; on a

$$a I_0 = (g + a) i_0 = (g + a + r) i = (g + a + r') i',$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{i'}{i} \cdot \frac{i_0 - i}{i_0 - i'}.$$

Si l'intensité i_0 est maintenue constante dans la branche dérivée, les intensités I_0, I et I′ du courant principal donnent

$$\frac{i_0}{a} = \frac{I_0}{g + a} = \frac{I}{g + a + r} = \frac{I - I_0}{r};$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{-I_0}{{}' - I_0}.$$

Cette dernière méthode, indiquée par M. Bosscha (¹), ne peut fournir des résultats exacts que si les différences $I - I_0$ et $I' - I_0$ sont assez grandes, c'est-à-dire si les résistances r et r' sont du même ordre que celle du galvanomètre.

Lorsque la résistance du galvanomètre qui sert aux lectures est très grande, il suffit de le placer lui-même en dérivation sur une partie constante du circuit dérivé et les formules ne changent pas.

669. Décharges d'induction. — La décharge produite par une force électromotrice instantanée, comme celles d'induction, est en raison inverse de la résistance du circuit ; il suffit alors de remplacer dans les formules les déviations permanentes de l'aiguille par les arcs d'impulsion. W. Weber (²), par exemple, déplaçait un aimant entre des limites fixes, dans l'intérieur d'une bobine.

Les résistances à comparer r et r' seront introduites dans dans le circuit, comme précédemment, mais on peut aussi les placer en dérivation sur le galvanomètre, à la condition toutefois que l'emploi des shunts ne modifie pas le partage de la décharge (**636**). On ferme d'abord le circuit par un galvanomètre de résistance g, et on ajoute successivement en dérivation sur le galvanomètre les résistances r et r', puis les

(¹) Bosscha, *Pogg. Ann.*, t. CX, p. 452; 1860.
(²) W. Weber, *Electrodyn. maasb. Wiederstand mess.*, p. 209.

mêmes résistances en arcs parallèles, et enfin les deux résistances en série ; on a alors, en appelant α_0, α, α', α_1 et α_2 les impulsions relatives aux différentes expériences et ρ la résistance du circuit principal jusqu'au galvanomètre,

$$\alpha_0(\rho+g)=\alpha\left[\left(\frac{g}{r}+1\right)\rho+g\right]=\alpha'\left[\left(\frac{g}{r'}+1\right)\rho+g\right]$$
$$=\alpha_1\left\{\left[g\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)+1\right]\rho+g\right\}=\alpha_2\left[\left(\frac{g}{r+r'}+1\right)\rho+g\right].$$

On en déduit les différentes valeurs

$$\frac{r}{r'}=\frac{\dfrac{\alpha_0}{\alpha'}-1}{\dfrac{\alpha_0}{\alpha}-1}=\frac{1-\dfrac{\alpha_1}{\alpha}}{1-\dfrac{\alpha_1}{\alpha'}}=\frac{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}-\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha'}}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha_2}}.$$

670. Galvanomètre différentiel. — Avec cet appareil l'expérience comporte plusieurs dispositions différentes. La pile, de force électromotrice E et de résistance ρ est fermée par deux branches A et B en dérivation ; l'une d'elles renferme la résistance r et une des bobines g du galvanomètre, l'autre la bobine g' et une résistance étalonnée r'. Le courant principal I et les courants dérivés i et i' donnent les relations

$$\frac{i}{\dfrac{1}{g+r}}=\frac{i'}{\dfrac{1}{g'+r'}}=\frac{I}{\dfrac{1}{g+r}+\dfrac{1}{g'+r'}}=E-I\rho.$$

Désignant par k et k' des facteurs respectivement proportionnels aux constantes galvanométriques des deux cadres, la déviation δ de l'aiguille peut être exprimée par la formule

$$\delta=ki-k'i',$$

ou, en posant

$$D=(g+r)(g'+r')+\rho(g+g'+r+r'),$$

$$\delta=I\,\frac{k(g'+r')-k'(g+r)}{g+g'+r+r'}=E\,\frac{k(g'+r')-k'(g+r}{D}.$$

Si la résistance r' est ajustée de façon que l'aiguille soit maintenue au zéro, il en résulte

$$\frac{k}{k'} = \frac{g+r}{g'+r'}.$$

Pour un galvanomètre réglé, où $k = k'$ et $g = g'$, il reste $r = r'$.

On éliminera les défauts de réglage par substitution, comme dans une double pesée, en remplaçant r par une résistance étalonnée r_1 qui rétablisse l'équilibre.

Si, au lieu de ramener l'aiguille au zéro dans chaque expérience, on l'observait à un même repère correspondant à une déviation δ, la méthode de substitution ne serait rigoureuse que si le courant principal I et, par suite, la force électromotrice restaient invariables.

On détermine par expérience la sensibilité de la méthode en cherchant la déviation que produit une variation connue de l'une des résistances. La discussion des formules permettrait de fixer la meilleure résistance à donner au galvanomètre, mais ces considérations ont perdu beaucoup d'intérêt.

Quand les résistances à comparer sont très faibles, on les met respectivement en dérivation sur les bobines du galvanomètre différentiel ; il est avantageux alors de faire passer le courant de la pile successivement et en sens contraires dans les deux bobines, et on a

$$\mathrm{I} = \frac{g+r}{r}\, i = \frac{g'+r'}{r'}\, i' = \frac{\mathrm{E}}{\rho + \dfrac{gr}{g+r} + \dfrac{g'r'}{g'+r'}}.$$

Ces équations donnent, en posant

$$\mathrm{D}_1 = \rho(g+r)(g'+r') + gr(g'+r') + g'r'(g+r),$$

$$\delta = ki - k'i' = \mathrm{E}\,\frac{kr(g'+r') - k'r'(g+r)}{\mathrm{D}_1}.$$

Comme précédemment, les résistances r et r' sont égales pour $\delta = 0$, lorsque le galvanomètre est réglé, et on éliminera les défauts de réglage par substitution.

Si les résistances à comparer sont très différentes, on mettra un shunt sur la bobine qui correspond à la plus faible r'. Soit m' le pouvoir multiplicateur du shunt, i et i' les intensités; l'aiguille étant au zéro, on a

$$ki = k'i', \qquad i(r+g) = m'i'\left(r' + \frac{g'}{m'}\right);$$

$$k(m'r' + g') = k'(r+g).$$

Pour un galvanomètre réglé, il reste simplement

$$r = m'r'.$$

Quand le shunt ne suffit pas, on met les deux bobines dans des circuits séparés, l'une avec la résistance r et n couples, l'autre avec la résistance r', un seul couple et le shunt. C'est aussi un procédé souvent employé pour mesurer l'isolement d'un câble; on a alors

$$r = nm'r'.$$

Nous citerons encore, comme se rattachant à l'emploi du galvanomètre différentiel, la méthode de sir William Siemens (1) et celle de M. Jenkin (2).

Dans l'appareil de Siemens, les deux bobines du galvanomètre différentiel sont éloignées l'une de l'autre d'une quantité fixe; on les déplace parallèlement à elles-mêmes par rapport à l'aiguille, jusqu'à ce que celle-ci revienne au zéro. Une graduation empirique donne le rapport des deux courants et, par suite, celui des résistances.

Ce rapport s'obtient également par les deux cadres rectangulaires de M. Jenkin (**626**), quand le système est tourné d'un angle φ tel que l'aiguille reste au zéro; on a alors

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{ki}{k'i'} = \frac{k}{k'}\,\frac{g'+r'}{g+r}.$$

671. Résistances très faibles. — Les difficultés spéciales que présente la mesure des résistances très faibles sont dues

(1) C. W. Siemens, *B. A. Report*, 1867; *Reprint*, p. 142.
(2) Jenkin, *B. A. Report*, 1867; *Reprint*, p. 144.

principalement à l'importance relative que prennent les résistances des prises de contact aux points de jonction. D'autre part, ces conducteurs ne sont plus assimilables à des fils linéaires et il est nécessaire de définir quelle est alors la signification des mesures.

Considérons dans la masse du conducteur deux surfaces de niveau infiniment petites A et B, deux petites sphères, par exemple, l'une traversée par l'électricité qui entre, l'autre par l'électricité qui sort (**162**) ; si ces deux sphères, servant d'électrodes, sont respectivement aux potentiels V_a et V_b, et que I soit le courant total, la résistance R du milieu qui les sépare est donnée par la relation

$$V_a - V_b = RI. \tag{5}$$

Cette résistance peut être calculée en divisant en tubes de flux la portion du milieu comprise entre les deux surfaces des électrodes, et appliquant à l'ensemble des tubes les propriétés des courants dérivés.

Pour mesurer la résistance d'un conducteur, en général, quatre électrodes sont nécessaires : deux d'entre elles mettent le conducteur sur le trajet d'un courant, deux autres, qui jouent le rôle de *sondes* électriques, réunissent deux points A et B du conducteur avec le galvanomètre ou tout autre appareil de mesure.

Dans un régime permanent, les potentiels sont des fonctions linéaires des courants, avec la même constante arbitraire, puisque leurs différences s'annulent avec les courants. Si I est le courant direct, entre les points A et B, et i le courant dérivé on peut donc écrire

$$V_a - V_b = xI + yi. \tag{6}$$

Il est clair que le coefficient x représente la résistance du conducteur entre les points A et B, puisqu'on retrouve l'équation (5) en faisant $i = 0$, c'est-à-dire en laissant ouvert le circuit des sondes.

Il suffira ainsi de deux équations analogues à (6), dans lesquelles on déterminera par expérience la différence de poten-

tiel $V_a - V_b$, le courant total $I + i$ et le courant dérivé i, pour en déduire les coefficients x et y.

On a supposé toutefois que les électrodes sont des surfaces de niveau du système primitif avant dérivation. Cette condition est réalisée si on établit les contacts des sondes par des points assez fins pour que la surface correspondante puisse être considérée comme infiniment petite par rapport à celle d'une sphère de rayon très petit lui-même par rapport aux dimensions du conducteur.

S'il s'agit d'un barreau cylindrique, par exemple, où les électrodes principales sont sur les bases, on placera les sondes A et B sur une même génératrice, à une distance assez grande des extrémités pour que les surfaces de niveau puissent être considérées comme des sections normales dans l'intervalle des points A et B. La résistance mesurée x est alors celle du cylindre compris entre les sections droites passant par les points de contact.

D'après Kirchhoff [1], dans le cas d'un barreau homogène ayant la forme d'un prisme droit à base carrée de longueur l et de côté a, si on prend les quatre électrodes aux sommets d'une même face latérale, chacune d'elles peut être considérée comme limitée par un huitième de sphère. En appelant ρ la résistivité du milieu et γ un coefficient égal à 0,7272, la résistance mesurée a pour expression

$$x = \frac{\rho}{a^2}(l - \gamma a);$$

elle est égale à celle d'un barreau de même section dont la longueur serait réduite de γa. En réalité, on a supposé, dans le calcul, que le rapport du côté a à la longueur l est infiniment petit, mais l'erreur n'atteint pas encore 0,0003 quand ce rapport est égal à 0,5.

Cette discussion montre que tout l'artifice expérimental devra consister à réduire les surfaces de contact des sondes et à éliminer les résistances correspondantes. Nous reviendrons plus loin sur ce problème.

(1) Kirchhoff, *Monatsb. der Ak. d. Wiss. zu Berlin*; 1880. — Greenhill, *Proc. Cambr. Ph. Soc.*; 1879, p. 293.

Le galvanomètre différentiel [1] permet de comparer les résistances très faibles. Deux barres métalliques étant placées à la suite l'une de l'autre dans le circuit d'une pile, l'un des cadres est relié à deux points A et A′ du premier conducteur, séparés par la résistance a, et l'autre cadre aux points B et B′ du second conducteur, séparés par la résistance b.

Si le galvanomètre est réglé et les points de contact choisis de manière que l'aiguille reste au zéro, on a $a = b$. Le mode d'établissement des contacts n'a pas d'importance, pourvu que la résistance du galvanomètre soit considérable.

Si les résistances a et b sont différentes, les constantes galvanométriques des deux cadres étant égales, on ajuste par des fils auxiliaires les résistances totales g et g' des deux circuits de manière que l'aiguille reste au zéro. Les courants dérivés i étant alors égaux, le courant I a la même valeur sur les deux barreaux; d'où les relations

$$V_a - V_{a'} = aI + yi = gi,$$
$$V_b - V_{b'} = bI + y'I = g'I;$$
$$\frac{i}{I} = \frac{a}{g-y} = \frac{b}{g'-y'}.$$

Pour éliminer les coefficients y et y', il suffit de faire une seconde expérience en donnant aux résistances des galvanomètres des valeurs nouvelles g_1 et g'_1, très différentes des premières, ce qui donne

$$\frac{a}{b} = \frac{g-y}{g'-y'} = \frac{g_1-y}{g'_1-y'} = \frac{g_1-g}{g'_1-g'}.$$

PONT DE WHEATSTONE.

672. Propriétés d'un réseau de conducteurs. — La méthode la plus fréquemment employée pour la comparaison des résistances est celle qui est connue sous le nom de *Pont de Wheatstone* (**156**). Cette disposition avait été imaginée et ap-

(1) Tait, *Phil. Trans. E. R. S.*, *t.* XXVIII, p. 177; 1877.

pliquée par Christie [1] dès 1833, mais c'est à Wheatstone [2] que l'on doit d'en avoir montré toute la fécondité.

Comme les liaisons des conducteurs sont alors assez complexes, il est utile d'examiner d'abord les propriétés générales d'un ensemble de conducteurs linéaires, renfermant des forces électromotrices et réunis de manière à constituer un réseau de forme quelconque (**158**) arrivé à l'état permanent [3].

Nous dirons que le réseau constitue un système *complet*, lorsque deux points quelconques peuvent être reliés entre eux par un circuit fermé emprunté au réseau. Les intensités du courant dans les différentes branches sont déterminées par les forces électromotrices et les résistances (**155**). Les propriétés du réseau peuvent se déduire de la forme des équations, au point de vue algébrique, mais nous chercherons plutôt à les établir par des considérations empruntées à la nature des phénomènes.

Supposons que le réseau renferme n conducteurs, ayant m *sommets*, c'est-à-dire m points auxquels aboutissent au moins trois des conducteurs.

La condition

$$\Sigma i = 0, \tag{1}$$

appliquée aux sommets, donnera lieu à $m-1$ équations distinctes. En effet, considérons les deux extrémités A et A′ d'un conducteur, et appliquons cette loi successivement à tous les sommets que l'on rencontre, en allant du point A au point A′ par un chemin extérieur au conducteur AA′; nous obtiendrons ainsi une série d'équations différentes, puisque chacune d'elles renferme au moins un nouveau courant, mais elles impliquent la condition que la somme des courants qui traversent un plan quelconque P, coupant le faisceau entier des conducteurs, y compris le premier, soit toujours nulle; il en est ainsi, en particulier, pour la somme des courants qui

(1) Christie, *Phil. Trans. L. R. S.*, for 1833.

(2) Wheatstone, *The Backerian lecture* for 1843. — *Phil. Trans. L. R. S.*, t. V, p. 303; 1843. — *Scientific. papers*, p. 127.

(3) Voir Poggendorf, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. XVIII, p. 489; 1846. — Bosscha, *Pogg. Ann.*, t. CIV, p. 460; 1858. — Lucien de la Rive, *Arch. de Genève*, t. XVII, p. 105; 1863. — J. Raynaud, *Journ. de Phys.*, t. II, p. 161; 1873.

aboutissent en A′, de sorte que l'équation relative à ce point est déjà implicitement contenue dans les précédentes.

Désignons par p le nombre minimum de conducteurs qu'il faut enlever pour supprimer tout circuit fermé. Ces p conducteurs forment ce que nous appellerons un système de fils *nécessaires*, et peuvent être choisis en général de plusieurs manières différentes.

La condition relative aux circuits fermés,

$$\Sigma(ir - e) = 0, \tag{2}$$

donne lieu à p équations distinctes. En effet, nous allons montrer d'abord que l'addition d'un fil dans un réseau quelconque n'introduit qu'une équation nouvelle de la seconde espèce.

Soient A et A′ deux points réunis déjà par plusieurs chemins, V et V′ leurs potentiels. La différence de potentiel V — V′ est égale à l'une quelconque des expressions $\Sigma(i_1 r_1 - e_1)$, $\Sigma(i_2 r_2 - e_2)\ldots$, relatives aux différents chemins C_1, C_2,... qu'on peut suivre pour aller de A en A′. Si l'on ajoute entre ces deux points un conducteur r, renfermant une force électromotrice e et parcouru par le courant i dans le nouvel état, on a aussi

$$V - V' = ir - e = \Sigma(i_1 r_1 - e_1) = \Sigma(i_2 r_2 - e_2) = \ldots;$$

l'addition du conducteur r introduit donc dans le système une équation nouvelle, et une seule.

Quand on supprime un système de p fils nécessaires, le réseau est entièrement ouvert et ne peut donner lieu à aucune équation de la dernière forme. L'addition successive des p fils nécessaires, qui rétablissent le réseau primitif, introduit donc p équations distinctes, ce qui démontre la proposition.

Comme le réseau renferme n conducteurs différents et que le phénomène physique est défini, la somme totale des équations doit être égale à la somme n des intensités des courants ; il en résulte la condition

$$p + m - 1 = n, \qquad p = n - m + 1.$$

Le nombre minimum p des conducteurs nécessaires est

ainsi déterminé par le nombre des sommets et le nombre des côtés du réseau.

Les intensités étant multipliées par leurs résistances respectives dans les p équations (2) relatives aux circuits fermés, et par ± 1 dans les $m - 1$ équations (1) relatives aux sommets, le dénominateur commun Δ des fractions qui représentent les intensités comprend des combinaisons p à p des différentes résistances.

On obtiendra d'ailleurs le numérateur de la fraction qui exprime la valeur d'une intensité i_k, en remplaçant au dénominateur Δ le coefficient $\pm r_k$ de i_k dans chacune des équations par le terme connu correspondant. Le numérateur renferme donc les forces électromotrices multipliées respectivement par des sommes de combinaisons $p - 1$ à $p - 1$ des résistances.

Toute combinaison $r_1, r_2 \ldots r_p$ de p fils nécessaires entre dans le dénominateur. En effet, quand on fait toutes ces résistances infinies, ce qui équivaut à supprimer les fils correspondants, il n'y a plus de circuit fermé et les équations doivent être satisfaites par des valeurs nulles des intensités. Or, si on divise par le produit $r_1, r_2 \ldots r_p$ les deux termes de la fraction qui donne une intensité i, le numérateur est nul puisqu'il ne renferme que des combinaisons de résistances $p - 1$ à $p - 1$; le dénominateur, ne pouvant être nul, doit renfermer la combinaison $r_1, r_2 \ldots r_p$.

Inversement, si une combinaison $r_1, r_2 \ldots r_p$ ne correspond pas à un système de fils nécessaires, et qu'on répète le même raisonnement, la fraction se présenterait sous la forme indéterminée pour quelques-uns des courants, puisqu'il reste des circuits fermés ; par suite, le dénominateur ne renferme pas la combinaison considérée.

Ainsi le dénominateur commun renferme toutes les combinaisons des fils nécessaires, et ne renferme qu'elles.

Enfin, toutes ces combinaisons ont le même signe. En effet, si on supprime $p - 1$ fils nécessaires, le réseau ne renferme plus qu'un circuit fermé. La fraction qui donne l'intensité du courant dans ce circuit est alors indéterminée, mais, après la suppression d'un facteur commun, elle doit donner

$$i = \frac{\Sigma e}{\Sigma r}.$$

Toutes les résistances qui forment le circuit résidu entrent donc au dénominateur dans des termes de même signe; par suite, tous les termes sont de même signe.

On peut remarquer encore que tous les conducteurs aboutissant à un même sommet ne font pas en même temps partie d'un système de fils nécessaires, car si on les supprime tous, sauf un, il est évident que ce dernier fil reste ouvert.

Enfin, il existe une corrélation remarquable entre les éléments de deux fils du réseau. Soient r_1 et r_2 deux fils quelconques, e_1 et e_2 les forces électromotrices qu'ils renferment; les intensités i_1 et i_2 correspondantes seront déterminées par des équations de la forme

$$i_1 = \frac{A_1^1 e_1 + A_2^1 e_2 + \ldots}{\Delta} = \frac{N_1}{\Delta},$$

$$i_2 = \frac{A_2^2 e_2 + A_1^2 e_1 + \ldots}{\Delta} = \frac{N_2}{\Delta}.$$

Le numérateur N_1 s'obtient en remplaçant, dans chacune des combinaisons que renferme Δ, le facteur $\pm r_1$ par le second membre de l'équation correspondante. Ce numérateur renferme donc les combinaisons $p - 1$ à $p - 1$ des résistances qui laissent un circuit fermé simple dont r_1 fait partie.

D'autre part, les termes de N_1 qui renferment e_2 proviennent eux-mêmes d'équations dans lesquelles entrait r_2 et, par suite, de circuits simples dont r_2 fait partie.

Le coefficient A_2^1 de e_2 dans la valeur de i_1 renferme donc uniquement les combinaisons $p - 1$ à $p - 1$ de conducteurs qui laissent des circuits simples dont r_1 et r_2 font partie en même temps. Le coefficient A_1^2 dans l'expression de i_2 renferme évidemment les mêmes combinaisons.

En outre, ces combinaisons sont respectivement de même signe, car, dans un circuit restant quelconque, la portion du courant i_1 qui provient de e_2 est de même signe que la portion du courant i_2 qui provient de e_1,; donc $A_1^2 = A_2^1$.

Ainsi, lorsqu'un réseau de conducteurs linéaires est complet, l'intensité du courant envoyé dans une branche r_1, par la force électromotrice d'une autre branche r_2, est égale à celle

du courant qui serait envoyé dans le conducteur r_2 par la même force électromotrice placée en r_1.

En particulier, si $A_1^2 = A_2^1 = 0$, le courant dans chacun des conducteurs r_1 ou r_2 est indépendant des forces électromotrices que renferme l'autre. Ces conducteurs, ainsi que les côtés correspondants du réseau, sont dits alors *conjugués*.

Les états électriques de deux conducteurs conjugués sont indépendants l'un de l'autre; si l'on change, par exemple, la force électromotrice ou la résistance du conducteur r_1, ou même si on le supprime du système, la distribution générale des courants dans le réseau est modifiée, mais le courant dans le conducteur r_2 ne change pas.

Cette propriété ne s'applique qu'au régime permanent; les variations de courants produites dans les autres branches par les modifications du conducteur r_1 y provoquent des forces électromotrices d'induction dont la réaction se ferait sentir sur le conducteur conjugué r_2.

Nous indiquerons aussi une propriété importante démontrée par M. Thévenin [1]. Dans un système quelconque de conducteurs parcourus par des courants permanents, considérons deux points A et A′ dont les potentiels sont V et V′. L'état primitif n'est pas troublé quand on réunit ces deux points par un nouveau conducteur r, renfermant une force électromotrice $-E$ de sens contraire, égale à $V - V'$ en valeur absolue, et le courant reste nul dans ce conducteur r. Désignant par ρ la résistance totale du système primitif entre les points A et A′, si on introduit maintenant dans le conducteur r une force électromotrice $+E$, qui annule la précédente, il se produit une nouvelle distribution des courants; mais, en vertu du principe de la superposition des états permanents, l'intensité du courant qui parcourt le conducteur r est déterminée par l'équation

$$E = V - V' = i(\rho + r).$$

Les deux points A et A′ du système primitif se comportent donc, à l'égard d'un conducteur nouveau par lequel on les réunit, comme un conducteur unique de résistance ρ, égale

[1] Thévenin, *C. R. de l'Acad. des Sciences*, t. XCVII, p. 159; 1883.

à celle qui existait d'abord entre eux, et renfermant une force électromotrice égale à la différence de potentiel de ces deux points dans l'état primitif.

Cette relation pourra être utilisée pour déterminer, soit la résistance qui existe entre deux points, soit la différence de leurs potentiels.

673. Équations du pont. — L'appareil est une combinaison de six conducteurs qu'on peut se représenter comme les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère. La forme primitive adoptée par Wheatstone, où les résistances à comparer a, a', b, b' (fig. 180) aboutissaient aux quatre sommets d'un losange, lui a fait souvent donner le nom de *parallélogramme des résistances*. L'une des diagonales AEB, de résistance R, contient la pile; le galvanomètre est intercalé sur l'autre diagonale CD, de résistance r, qui est à proprement parler le *pont* du parallélogramme.

On peut remarquer encore que les six conducteurs présentent les mêmes relations de position que les six arêtes d'une pyramide triangulaire (fig. 181), puisque chacun d'eux est ad-

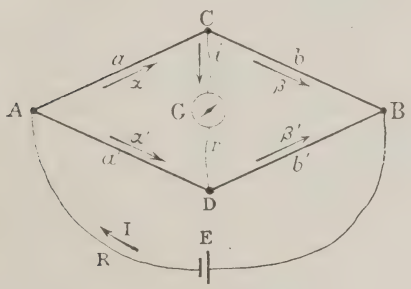


Fig. 180.

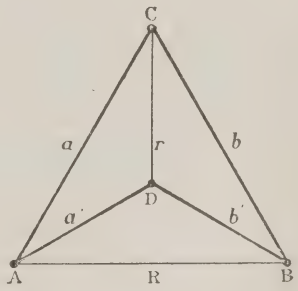


Fig. 181.

jacent à quatre autres et opposé au sixième.

Deux côtés opposés R et r sont conjugués, c'est-à-dire que le courant dans l'un est indépendant des forces électromotrices que renferme l'autre, si les quatre côtés adjacents satisfont à la relation $ab' = ba'$ (**156**). En outre, si les deux couples de côtés opposés, R et r, a et b', sont respectivement conjugués, les deux autres le sont également, car la condition précédente, jointe à $Rr = ba'$, donne aussi $Rr = ab'$.

On peut supposer, dans le cas général, que tous les côtés renferment des forces électromotrices E, e, E_a, $E_{a'}$, E_b et $E_{b'}$, les courants respectifs étant I, i, α, α', β et β'.

Les quatre sommets fourniront trois équations distinctes, et les circuits fermés trois autres équations, c'est-à-dire que le nombre des conducteurs nécessaires est égal à trois. On aura ainsi

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &I = \alpha + \alpha' = \beta + \beta',\\ &i = \alpha - \beta = \beta' - \alpha';\\ &a\alpha + ri - a'\alpha' = E_a + e - E_{a'},\\ &b\beta - b'\beta' - ri = E_b - E_{b'} - e,\\ &RI + a\alpha + b\beta = E + E_a + E_b. \end{aligned}\right.$$

Ces équations s'appliquent aussi au régime variable, si les forces électromotrices comprennent les effets d'induction.

Quand il s'agit du régime permanent, il suffit de considérer le cas d'une seule force électromotrice; en vertu du principe de la superposition des états permanents, on obtiendra ensuite le courant dans un côté quelconque par la simple addition des courants relatifs à chacune des forces électromotrices.

Les remarques générales relatives aux propriétés d'un réseau complet permettent de trouver immédiatement le dénominateur commun de ces équations (3). Les six résistances donnent 20 combinaisons 3 à 3, mais, comme on doit en retrancher les quatre combinaisons de trois conducteurs aboutissant à un même sommet, il ne reste que 16 termes au dénominateur, et on peut l'écrire

$$\begin{aligned}\Delta = Rr(a + a' + b + b') + R(a + a')(b + b') + r(a + b)(a' + b')\\ + aa'bb'\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta = Rr(a + a' + b + b') + ab'(R + r + b + a') + a'b(R + r + b' + a)\\ + R(ab + a'b') + r(aa' + bb').\end{aligned}$$

La seconde forme montre que ce dénominateur est composé de la même manière en fonction des six résistances, les quatre derniers termes étant les produits des trois côtés de chaque face de la pyramide.

Les numérateurs s'en déduisent directement par la règle connue. Si la force électromotrice E existe seule, on a alors, en posant

$$D = (a + a')(b + b') + r(a + a' + b + b'),$$

$$(4) \quad \begin{cases} I = E\dfrac{D}{\Delta}, \qquad i = e\dfrac{a'b - ab'}{\Delta}, \\ \alpha = E\dfrac{a'(b + b') + r(a' + b')}{\Delta}, \\ \alpha' = E\dfrac{a(b + b') + r(a + b)}{\Delta}, \\ \beta = E\dfrac{b'(a + a') + r(a' + b')}{\Delta}, \\ \beta' = E\dfrac{b(a + a') + r(a + b)}{\Delta}. \end{cases}$$

Appelant ρ la résistance de l'ensemble du réseau a, b, a', b' et r, compris entre les points A et B, il en résulte

$$I = \frac{E}{R + \rho} = E\frac{D}{\Delta},$$

$$R + \rho = \frac{\Delta}{D} = R + \frac{r(a + b)(a' + b') + ab(a' + b') + a'b'(a + b)}{D},$$

$$\rho = \frac{r(a + b)(a' + b') + ab(a' + b') + a'b'(a + b)}{r(a + a' + b + b') + (a + a')(b + b')}.$$

Quand la diagonale r est ouverte, ou $r = \infty$, cette expression se réduit à la valeur évidente

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a + a' + b + b'}{(a + b)(a' + b')} = \frac{1}{a + b} + \frac{1}{a' + b'}.$$

Il en est de même lorsque le pont est équilibré, les diagonales r et R étant conjuguées, car alors le courant i est nul et la résistance r n'intervient pas dans les équations.

Lorsque le pont est équilibré, on peut éliminer l'une des résistances b' par la relation $ab' = ba'$. En indiquant par l'indice zéro les valeurs qui correspondent à l'équilibre du pont,

et posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} M &= b(a+a') + r(a+b), \\ N &= R(a+a') + a'(a+b), \end{aligned}$$

il en résulte

$$D_0 = \frac{a+a'}{a} M, \qquad \Delta_0 = \frac{D_0}{a+a'} N = \frac{MN}{a};$$

$$(5) \qquad \begin{cases} I_0 = E\,\dfrac{a+a'}{N}, & i_0 = 0, \\ \alpha_0 = \beta_0 = E\,\dfrac{a'}{N}, & \alpha'_0 = \beta'_0 = E\,\dfrac{a}{N}. \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'il existe des forces électromotrices dans toutes les branches, mais que les diagonales R et r restent conjuguées; on peut poser

$$\begin{aligned} P &= (a+a')E + a'(E_a + E_b) + a(E_{a'} + E_{b'}), \\ Q &= ar(E_a - E_{a'} + E_b - E_{b'}). \end{aligned}$$

Les équations (3), ou la somme des équations analogues à (4) relatives à toutes les forces électromotrices considérées séparément, équations que l'on peut écrire directement par analogie, donnent alors

$$(6) \qquad \begin{cases} I = \dfrac{P}{N}, & i = \dfrac{b(E_a - E_{a'} + e) - a(E_b - E_{b'} - e)}{M}, \\ \alpha = \dfrac{a'}{a+a'}\,\dfrac{P}{N} + \dfrac{Q}{(a+a')M} + \dfrac{b(E_a - E_{a'} + e)}{M}, \\ \alpha' = \dfrac{a}{a+a'}\,\dfrac{P}{N} - \dfrac{Q}{(a+a')M} - \dfrac{b(E_a - E_{a'} + e)}{M}, \\ \beta = \dfrac{a'}{a+a'}\,\dfrac{P}{N} + \dfrac{Q}{(a+a')M} + \dfrac{a(E_b - E_{b'} + e)}{M}, \\ \beta' = \dfrac{a}{a+a'}\,\dfrac{P}{N} - \dfrac{Q}{(a+a')M} - \dfrac{a(E_b - E_{b'} - e)}{M}. \end{cases}$$

On voit que les intensités I et i, comme on devait le pré-

voir, sont respectivement indépendantes des forces électromotrices et des résistances du côté conjugué.

674. Effets d'induction. — Lorsque la force électromotrice E existe seule, mais que le régime permanent n'est pas établi, on doit tenir compte des forces électromotrices d'induction. Si les inductions mutuelles sont négligeables, ces forces électromotrices ne dépendent que de l'induction propre de chaque branche. Désignant par L_a, $L_{a'}$,... les coefficients de self-induction, on a (374)

$$E_a = -L_a \frac{d\alpha}{dt}, \qquad E_{a'} = -L_{a'} \frac{d\alpha'}{dt}, \ \ldots.$$

Dans le pont r, qui renferme le galvanomètre et dont l désigne le coefficient de self-induction, le courant est

$$Mi = a\left(L_b \frac{d\beta}{dt} - L_{b'} \frac{d\beta'}{dt}\right) - b\left(L_a \frac{d\alpha}{dt} - L_{a'} \frac{d\alpha'}{dt}\right) - (a+b)\, l \frac{di}{dt}.$$

Lorsque la durée de variation du courant principal est très courte relativement à la période d'oscillation de l'aiguille, l'impulsion est proportionnelle à l'intégrale de $i\,dt$.

Chacun des termes de cette intégrale qui ne dépend pas de i est proportionnel à la différence $\alpha_2 - \alpha_1$, $\beta_2 - \beta_1$, des intensités initiale et finale; ces termes disparaissent dans le cas où les courants sont les mêmes aux deux limites.

Il en serait ainsi, en particulier, pour les termes relatifs à toutes les branches du réseau si, au lieu d'une force électromotrice constante E, on introduisait dans la branche R une force électromotrice instantanée d'induction; la condition d'équilibre du pont étant réalisée, l'aiguille reste immobile dans tous les cas, puisque l'intensité i du courant dans le pont est nulle aux deux limites.

Quand on introduit dans la branche R une force électromotrice constante E, les diagonales étant toujours conjuguées, tous les courants sont d'abord nuls au moment de la fermeture du circuit et prennent finalement, d'après les équations (5), les valeurs

$$\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_0 = E\frac{a'}{N}, \qquad \alpha'_2 = \beta'_2 = \alpha'_0 = E\frac{a}{N}.$$

La décharge dans le galvanomètre est

$$q = \int i\,dt = \mathrm{E}\frac{aa'}{\mathrm{MN}}\left[a\left(\frac{L_b}{a} - \frac{L_{b'}}{a'}\right) - b\left(\frac{L_a}{a} - \frac{L_{a'}}{a}\right)\right],$$

ou, en tenant compte de la relation $ab' = ba'$,

$$q = \int i\,dt = \mathrm{E}\frac{aba'}{\mathrm{MN}}\left[\left(\frac{L_b}{b} - \frac{L_a}{a}\right) - \left(\frac{L_{b'}}{b'} - \frac{L_{a'}}{a'}\right)\right].$$

La rupture du circuit produit le même effet, mais en sens contraire. Dans les deux cas, l'aiguille restera donc immobile pour la condition

$$\frac{L_b}{b} - \frac{L_a}{a} = \frac{L_{b'}}{b'} - \frac{L_{a'}}{a'}.$$

Lorsque les diagonales r et R ne sont pas conjuguées, les courants induits obéissent à des lois plus complexes; l'impulsion de l'aiguille, au moment où l'on ferme la branche R qui renferme la pile, peut être même de signe contraire à la déviation permanente. Pour éviter cette difficulté, qui rend

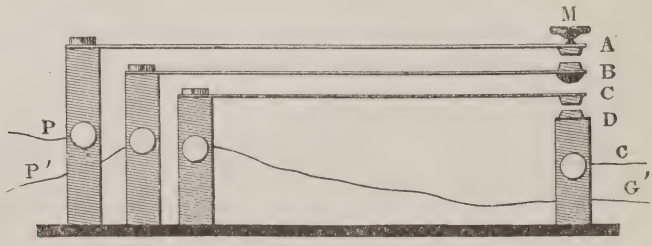


Fig. 182.

les observations beaucoup plus longues, on a soin de fermer d'abord la pile, puis le galvanomètre; l'aiguille reste alors au zéro, quels que soient les coefficients d'induction, si l'équilibre du pont pour le régime permanent est établi, et elle se déplace toujours dans le sens de la déviation définitive.

On arrive généralement à ce résultat en manœuvrant deux clefs indépendantes placées l'une sur la branche de la pile et l'autre sur celle du galvanomètre. Cette double opération peut aussi s'exécuter d'une manière automatique, au moyen d'une clef spéciale à deux contacts successifs (fig. 182) formée

de lames élastiques. Quand on appuie sur le bouton M, le contact qui s'établit d'abord en A et B ferme le circuit de la pile; un instant après, le contact en C et D ferme le circuit du galvanomètre.

Supposons encore que la force électromotrice E soit sinusoïdale. Le carré moyen du courant dans le pont est représenté par une fraction, à dénominateur essentiellement positif, dont le numérateur N est la somme des carrés

$$[ba' - ab' - \omega^2(L_b L_{a'} - L_a L_{b'})]^2 + \omega^2(a L_{b'} + b' L_a - a' L_b - b L_{a'})^2.$$

Pour que cette expression soit nulle, il faut, comme on l'a vu déjà (**396**), qu'on ait en même temps

$$ba' - ab' = \omega^2(L_b L_{a'} - L_a L_{b'}),$$
$$a L_{b'} + b' L_a = a' L_b + b L_{a'}.$$

Un téléphone intercalé dans le pont resterait alors silencieux. On ne peut satisfaire à ces deux conditions par le simple changement de l'une des résistances. Toutefois, si l'équilibre est à peu près établi, le numérateur N est très petit et le minimum de bruit qu'on obtient dans le téléphone, en changeant la résistance b', correspond sensiblement à la condition que la dérivée de N par rapport à b' soit nulle.

Lorsque l'un des coefficients de self-induction L_a est nul, les conditions de silence se réduisent à

$$ba' - ab' = \omega^2 L_b L_{a'}, \qquad a L_{b'} = a' L_b + b L_{a'}.$$

La première n'est autre que celle du minimum et la seconde ne renferme pas b'. Désignant par ε la résistance qu'il faut ajouter à la valeur de b', réglée par les courants continus, pour obtenir le moindre bruit dans le téléphone, on a

$$a\varepsilon = L_b L_{a'} \omega^2.$$

M. Abraham [1] a vérifié par expérience que la résistance supplémentaire ε est proportionnelle au carré de la fréquence du courant alternatif. La force électromotrice était produite

[1] Abraham, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 127; 1895.

par un disque, muni de barreaux de fer, tournant en face de l'aimant d'un téléphone et dont le nombre de périodes pouvait atteindre 6000 par seconde. Le contrôle est très satisfaisant, malgré le trouble produit par la persistance des harmoniques auxquels ne s'applique pas la condition de silence relative au son fondamental.

675. **Conditions de sensibilité.** — La valeur de i donnée par la seconde des équations (4) montre que la sensibilité de la méthode appliquée aux courants continus est, pour une force électromotrice déterminée, en raison inverse de Δ.

Les branches du pont étant invariables, on peut se demander d'abord s'il est indifférent, à ce point de vue, que la pile et le galvanomètre occupent l'une ou l'autre des diagonales.

Si on permute les deux diagonales, la pile et le galvanomètre emportant chacun sa résistance propre, le dénominateur Δ prend une nouvelle valeur Δ', telle que

$$\begin{aligned}\Delta' - \Delta &= (R - r)[(a + b)(a' + b') - (a + a')(b + b')] \\ &= (R - r)(a - b')(a' - b).\end{aligned}$$

Supposons que le produit $(a - b')(a' - b)$ soit positif, c'est-à-dire qu'on ait à la fois $a > b'$ et $a' > b$, ou $a < b'$ et $a' < b$.

La relation $ab' = a'b$ pouvant être considérée comme à peu près satisfaite, ces deux conditions reviennent à supposer que les quatre résistances a, a', b, b', sont rangées par ordre de grandeurs croissantes ou décroissantes, c'est-à-dire que les deux sommets A et B (fig. 180) sont les points de jonction, l'un des deux plus grandes résistances, et l'autre des deux plus petites.

Dans ce cas, si $R > r$, $\Delta' > \Delta$ et la première disposition vaut mieux que la seconde; l'inverse aurait lieu pour $R < r$. On en déduit cette règle :

Le maximum de sensibilité a lieu lorsque la plus grande des résistances, pile ou galvanomètre, est située sur la diagonale qui joint les sommets où aboutissent séparément les plus grandes et les plus petites résistances du quadrilatère.

Dans la pratique, le galvanomètre est généralement plus résistant que la pile.

Supposons que l'on cherche à équilibrer une résistance b par une résistance étalonnée b', a et a' étant des résistances

arbitraires. Si on prend $a = a'$, on a aussi $b' = b$; mais il suffit d'établir un rapport arbitraire entre les branches a et a', pour que la condition d'équilibre corresponde au même rapport entre les branches b et b'.

Quand on est près de l'équilibre [1], le courant i, qui correspond à une erreur $-\varepsilon$ commise sur la valeur de b', est représenté par l'expression

$$i = \mathrm{E}\frac{a}{\Delta}\varepsilon = \mathrm{E}\frac{\varepsilon}{\mathrm{K}},$$

dans laquelle on peut remplacer Δ par la valeur Δ_0 qui correspond à l'équilibre du pont.

En éliminant la résistance a' de l'expression de Δ_0 par la condition d'équilibre, on a

$$\mathrm{K} = \frac{\Delta_0}{a} = \left[\mathrm{R}\left(1+\frac{b'}{b}\right)+b'\left(1+\frac{a}{b}\right)\right]\left[r\left(1+\frac{b}{a}\right)+b\left(1+\frac{b'}{b}\right)\right],$$

ou, en posant

$$\mathrm{S} = \mathrm{R}b + bb' + \mathrm{R}b' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T} = r + b + b',$$

$$(7) \qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{ST}}{b} + br' + \mathrm{T}\frac{b'}{b}a + \frac{\mathrm{S}r}{a}.$$

Le minimum de l'erreur absolue ε est la variation de résistance qui correspond au plus faible courant i que le galvanomètre permet d'apprécier.

L'erreur absolue et l'erreur relative sont donc

$$\varepsilon = \frac{i}{\mathrm{E}}\mathrm{K}, \qquad \frac{\varepsilon}{b'} = \frac{i}{\mathrm{E}}\frac{\mathrm{K}}{b'}.$$

Des six quantités a, a', b, b', r et R, la résistance b à mesurer est la seule qui soit donnée; R et r sont entièrement arbitraires; les trois autres résistances a, a' et b', sont liées à b par

[1] Voir Schwendler, *Ph. Mag.* [4], t. XXXI, p. 364; 1866 et t. XXXIII, p. 29; 1867. — Heaviside, *Ph. Mag.* [4], t. XLV, p. 114; 1873. — Gray, *Ph. Mag.* [5], t. XII, p. 283; 1881.

la condition d'équilibre. On peut considérer différents cas :

1° Supposons qu'avec b, on donne b', r et R ; la résistance a est la seule indéterminée, le rapport de a' à a étant défini. La valeur de a qui correspond au minimum K_1 du coefficient K s'obtiendra en égalant à zéro la dérivée de l'expression (7) par rapport à a, ce qui donne immédiatement

$$a^2 = \frac{b}{b'}\frac{rS}{T}, \qquad a'^2 = \frac{b'}{b}\frac{rS}{T},$$

$$K_1 = \frac{ST}{b} + b'r + 2\sqrt{b'r\frac{ST}{b}} = \left(\sqrt{\frac{ST}{b}} + \sqrt{b'r}\right)^2,$$

$$\frac{K_1}{b'} = \frac{1}{b}\left(\sqrt{\frac{ST}{b'}} + \sqrt{br}\right)^2.$$

2° Quand on se donne seulement b, R et r, ce qui est le cas ordinaire de la pratique, il reste à choisir a et le rapport des deux branches latérales du pont.

Quelle que soit la valeur de b', il est clair que les meilleures valeurs de a et de a' devront d'abord satisfaire aux conditions précédentes. Il suffit donc de considérer b' comme la seule quantité indépendante, et de chercher la valeur qui rend minimum le rapport de K_1 à b'.

La dérivée de la fraction $\frac{ST}{b'}$ par rapport à b' doit alors être nulle ; il en résulte

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll} b'^2 = Rb\dfrac{r+b}{R+b} & \dfrac{b'S}{T} = \dfrac{Rbb' + (R+b)b'^2}{r+b+b'} = Rb; \\[2ex] a'^2 = rR, & a^2 = rb\dfrac{R+b}{r+b}. \end{array}\right.$$

Lorsque les résistances R et r sont très grandes par rapport à b, ces valeurs se réduisent à $b'^2 = br$, $a^2 = bR$, et le rapport des branches a et a' du pont est très petit.

Ce rapport est encore très petit si la résistance r seulement est très grande, ce qui donne sensiblement

$$b'^2 = Rb\frac{r}{R+b}, \qquad a^2 = b(R+b).$$

Si on voulait réaliser la sensibilité maximum avec des branches a et a' égales, les équations (8) donneraient

$$b^2 = \mathrm{R}r = a^2,$$
$$a = a' = b = b' = \sqrt{\mathrm{R}r}.$$

Dans ce cas, les quatre branches du pont devraient avoir la même résistance.

3° Le même genre de discussion ne s'applique plus aux résistances R et r, parce qu'il faut faire intervenir la constante galvanométrique et la force électromotrice. Si on se donne le galvanomètre et la pile, il est clair que toute résistance auxiliaire placée sur l'une ou l'autre des deux diagonales diminue la sensibilité.

Supposons que la pile soit donnée, ainsi que les résistances des quatre branches du pont et la gorge de la bobine galvanométrique; le maximum de sensibilité pour le galvanomètre a lieu (**562**) quand la résistance de la bobine est égale à la résistance ρ du réseau total entre les deux extrémités C et D (fig. 180) de la diagonale sur laquelle se trouve le galvanomètre. En effet, d'après le théorème de M. Thevenin (**672**), si on appelle V et V′ les potentiels des points C et D, quand la diagonale r est ouverte, le courant i est le même que si ces points étaient les extrémités d'un conducteur unique de résistance ρ renfermant une force électromotrice égale à V — V′.

D'autre part, étant donnés un certain nombre de couples identiques entre eux, on obtient le courant maximum quand on les dispose de manière que la résistance de la pile soit égale à la résistance du reste du circuit [1].

Dans le cas actuel, lorsque la balance est établie, les deux

[1] Soit e la force électromotrice et ρ la résistance de chacun des n couples; si on les dispose en m séries de p couples, $n = mp$, réunis par une résistance extérieure r, l'intensité du courant est

$$\mathrm{I} = \frac{pe}{\frac{p\rho}{m} + r} = \frac{e}{\frac{\rho}{m} + \frac{r}{p}} = \frac{e}{\frac{\rho}{n}p + \frac{r}{p}}.$$

Cette expression est maximum pour la condition $r = p^2\frac{\rho}{n} = p\frac{\rho}{m}$, c'est-à-dire quand la résistance de la pile est égale à la résistance extérieure.

diagonales étant conjuguées, la résistance extérieure à considérer pour la pile est celle des deux branches ACB et ADB disposées parallèlement entre elles et, pour le galvanomètre, celle des deux branches CAD et CBD.

Les conditions de sensibilité maximum relatives à la pile et au galvanomètre sont donc

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a'+b'}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{a+a'} + \frac{1}{b+b'},$$

ou, en tenant compte de la condition d'équilibre,

$$(9) \qquad R = b'\frac{a+b}{b+b'}, \qquad r = a\frac{b+b'}{a+b}.$$

Les différentes branches du réseau sont alors conjuguées deux à deux, car on en déduit

$$Rr = ab' = ba'.$$

Si l'on veut satisfaire en même temps à toutes les conditions de maximum, aussi bien pour la pile et le galvanomètre que pour le pont, les quatre branches doivent être égales et les équations (9) donnent aussi

$$R = r = a = a' = b = b'.$$

676. Divers procédés d'observation. — La substitution d'un électrodynamomètre au galvanomètre sur le pont dans les conditions ordinaires serait évidemment désavantageuse, car les indications de l'instrument sont proportionnelles au carré de l'intensité et ne pourraient être utilisées pour des courants très faibles. En outre, comme la déviation se fait toujours dans le même sens, on n'aurait pas de guide pour le réglage des résistances.

On évite ces inconvénients [1] en mettant la bobine fixe sur le circuit de la pile et la bobine mobile seule dans le pont; la déviation est alors, comme pour le galvanomètre, proportionnelle au courant i et change de signe avec lui.

[1] F. Kohlrausch, *Pogg. Ann.*, t. CXLII, p. 427; 1871.

Pour trouver les meilleures conditions de sensibilité, il faut examiner l'expression

$$\mathrm{I}i = \mathrm{I}^2 \frac{a'b - ab'}{\mathrm{D}} = \mathrm{E}^2 \frac{\mathrm{D}}{\Delta^2}(a'b - ab'),$$

ou, en remplaçant les quantités D et Δ par leurs valeurs approchées D_0 et Δ_0 relatives à l'équilibre,

$$i = \mathrm{E}^2 \frac{a(a+a')(a'b - ab')}{[b(a+a') + r(a+b)][\mathrm{R}(a+a') + a'(a+b)]^2}.$$

Il y aurait à chercher comment il faut choisir le fil dans les deux bobines de l'électrodynamomètre pour rendre maximum le produit $\mathrm{GS'I}i$; toutefois, cette discussion ne présenterait pas grand intérêt, la sensibilité étant beaucoup moindre que par l'emploi du galvanomètre.

Il peut être avantageux, au contraire, de laisser le pont ouvert et d'évaluer par un électromètre la différence de potentiel $\mathrm{V} - \mathrm{V}'$ qui existe entre les points C et D. Le problème direct se résoudrait facilement en supposant le pont ouvert, mais il suffit de remarquer que cette différence de potentiel est la limite du produit ir lorsque la résistance r devient infinie.

La relation

$$ir = \mathrm{V} - \mathrm{V}' = \mathrm{E}\frac{r}{\Delta}(a'b - ab')$$

donne, pour une erreur $-\varepsilon$ commise sur la branche b',

$$\mathrm{V} - \mathrm{V}' = \mathrm{E}\frac{ar}{\Delta}\varepsilon.$$

Quand on fait $r = \infty$ et qu'on élimine ensuite la résistance a par la condition d'équilibre, on a

$$\frac{\Delta}{ar} = \mathrm{H} = \mathrm{R}\frac{a + a' + b + b'}{a} + \frac{(a+b)(a'+b')}{a},$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{R}(b + b')\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{b'}{b}\frac{(a+b)^2}{a}.$$

Si la résistance a est seule indéterminée, on obtient alors, pour la valeur minimum H_1 du coefficient H,

$$a^2 - b^2 = R\frac{b}{b'}(b + b'),$$

$$H_1 = b'\left(\frac{a+b}{b}\right)^2 = b'\left[1 + \sqrt{1 + R\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)}\right]^2.$$

Sans pousser plus loin cette discussion, il est évident que l'emploi de l'électromètre conviendra surtout lorsque les résistances des branches du pont sont considérables, parce que le courant dans un galvanomètre serait alors très faible.

677. **Résistance d'un galvanomètre ; méthode de Lord Kelvin.** — La condition d'équilibre permet de déterminer directement la résistance d'un galvanomètre situé sur une des branches b du parallélogramme (fig. 183), sans qu'il soit nécessaire d'employer un second galvanomètre dans le pont [1].

Il suffit que la diagonale CD soit munie d'un interrupteur K. L'aiguille du galvanomètre est déviée par le passage du courant β ; on ajuste la résistance b' de manière que la déviation reste la même quand on ferme ou qu'on ouvre l'interrupteur.

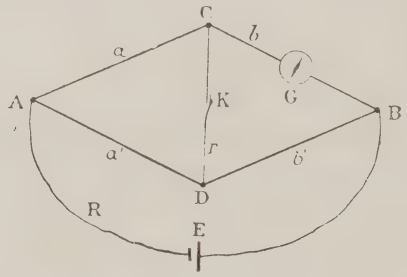


Fig. 183.

Si les résistances des quatre branches satisfont à la relation d'équilibre ordinaire, les deux sommets C et D du pont sont au même potentiel, le courant est nul dans le fil qui les réunit et la suppression ou l'introduction de ce fil ne modifie en rien les courants qui parcourent les branches latérales.

[1] Sir W. Thomson, *Proc. of the R. S. L.*, t. XIX, p. 253; 1871.

Pour apprécier la sensibilité de cette méthode, on peut supposer que le pont est formé par un fil très court, et qu'en abaissant ou relevant la clef de l'interrupteur, on fait passer la résistance r de zéro à l'infini. En supposant que l'équilibre est à peu près établi, on remplacera encore le dénominateur Δ par la valeur approchée

$$\Delta_0 = \frac{MN}{a} = N\frac{b(a+a')+r(a+b)}{a}.$$

Les courants β_1 et β_2 relatifs aux valeurs extrêmes $r=0$ et $r=\infty$ sont alors, d'après les équations (4),

$$\beta_1 = E\frac{a}{N}\cdot\frac{b'}{b}, \qquad \beta_2 = E\frac{a}{N}\cdot\frac{a'+b'}{a+b}.$$

Si l'on suppose que l'erreur de réglage sur la branche b' soit égale à ε, il en résulte

$$\beta_1 - \beta_2 = E\frac{a}{N}\frac{b'a-ba'}{b(a+b)} = E\frac{a}{N}\frac{a\varepsilon}{b(a+b)}.$$

En posant $b=b'$ et $a=a'=mb$, il vient

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{\varepsilon}{b'}\frac{E}{2(R+b)+mb+\dfrac{2R+b}{m}}.$$

Le dénominateur est minimum pour $m^2b = 2R+b$ et devient alors égal à $2(R+b)+2\sqrt{b(2R+b)}$. La différence des déviations est d'autant plus grande, pour une erreur relative donnée sur b', que la résistance R est plus faible.

678. Résistance d'une pile; méthode de Mance. — La même disposition donnera la résistance d'un conducteur qui renferme une force électromotrice, comme celle d'un couple; il suffit d'y permuter la pile et le galvanomètre [1].

La résistance qui contient la force électromotrice E_b étant située sur la branche b (fig. 184), on ajuste b' de manière que la déviation du galvanomètre reste constante quand on fait,

[1] Mance, *Proceed. of the R. S. L.* t. XIX, p. 248; 1871.

jouer l'interrupteur ; la relation $a'b = ab'$ est alors satisfaite. En effet, c'est seulement dans ce cas que, les deux branches r et R étant conjuguées, les changements de résistance de la première ne peuvent avoir aucune influence sur le courant qui traverse la seconde.

Pour discuter plus complètement l'expérience, il suffit de ne

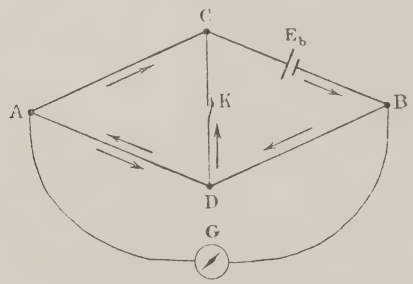


Fig. 184.

conserver dans les formules générales (6) que la force électromotrice E_b ; on a alors

$$P = a' E_b, \qquad Q = ar E_b;$$

$$I = E_b \frac{a'}{N}, \qquad i = -E_b \frac{a}{M},$$

$$\alpha = \frac{E_b}{a+a'}\left(\frac{a'^2}{N} + \frac{ar}{M}\right), \qquad \alpha' = E_b \frac{a(a'b - Rr)}{MN},$$

$$\beta = \frac{E_b}{a+a'}\left[\frac{a'^2}{N} + \frac{a(r+a+a')}{M}\right], \qquad \beta' = E_b \frac{a[(a+a'+r)R + aa']}{MN}.$$

Les courants ont dans les différentes branches les directions indiquées par les flèches de la figure. Il n'y a d'ambiguité que pour le courant α' de la branche AD, dont le sens correspond à la flèche supérieure ou à la flèche inférieure, suivant qu'on a $a'b \gtrless Rr$; ce courant est nul pour $a'b = Rr$ et il change de sens suivant qu'on fait $r = 0$ ou $r = \infty$, c'est-à-dire quand on ferme ou qu'on ouvre la clef d'interruption.

Le courant étant modifié dans toutes les branches, sauf celle du galvanomètre, par les interruptions du pont, l'aiguille

ne peut rester immobile que si les effets d'induction sont négligeables ou équilibrés ; on devra donc, en général, attendre qu'elle revienne au repos après chaque opération.

On déterminera par expérience quelle est la variation de résistance nécessaire pour obtenir un changement appréciable dans l'intensité du courant observé.

Les variations du courant qui traverse la pile peuvent avoir pour effet de modifier la force électromotrice E_b, que nous avons supposée constante.

Un autre défaut de la méthode, quand il s'agit de la résistance d'une pile, est de ne pas permettre l'emploi de galvanomètres délicats, à moins qu'on ne les introduise en dérivation sur la diagonale R.

M. Lodge [1] supprime une partie des inconvénients de la méthode de Mance en coupant le circuit du galvanomètre

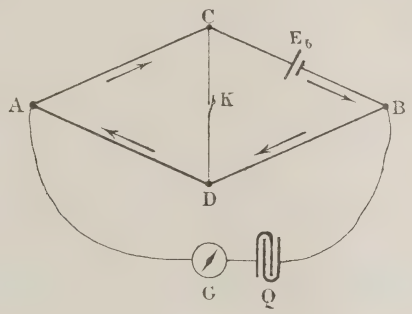


Fig. 185.

pour y intercaler un condensateur Q (fig. 185). Cette disposition revient à faire $R = \infty$ et, par suite, $I = 0$.

Dès que la condition d'équilibre du pont est satisfaite, les deux diagonales sont conjuguées ; les variations de résistance dans l'une d'elles CD sont sans effet sur la différence de potentiel aux extrémités A et B de la seconde et, par suite, sur la charge du condensateur. L'aiguille du galvanomètre doit donc rester au zéro quand on fait fonctionner l'interrupteur ; mais il est nécessaire, cette fois, que les effets d'induction soient absolument éliminés, puisqu'on n'observe pas une déviation permanente.

[1] O. Lodge, *Phil. Mag.* [5], t. III, p. 515 ; 1877.

Les équations générales (3) donnent alors

$$i = -E_b \frac{a+a'}{D},$$

$$\alpha = -\alpha' = E_b \frac{r}{D},$$

$$\beta = -\beta' = E_b \frac{a+a'+r}{D}.$$

La différence de potentiel V entre les sommets A et B, c'est-à-dire entre les armatures du condensateur, est

$$V = a'\alpha' + b'\beta' = -E_b \frac{r(a'+b') + b'(a+a')}{(a+a')(b+b') + r(a+a'+b+b')};$$

les valeurs V_1 et V_2, qui correspondent à $r=0$ et $r=\infty$, deviennent alors

$$V_1 = -E_b \frac{b'}{b+b'}, \qquad V_2 = -E_b \frac{a'+b'}{a+a'+b+b'}.$$

Pour une erreur de réglage ε sur b', on aura donc

$$\frac{V_2 - V_1}{E_b} = \frac{ab' - ba'}{(b+b')(a+a'+b+b')} = \frac{a\varepsilon}{(b+b')(a+a'+b+b')}.$$

Si on suppose encore $b = b'$ et $a = a' = mb$, il vient

$$\frac{V_2 - V_1}{E_b} = \frac{m}{4(1+m)} \frac{\varepsilon}{b}.$$

Dans le cas actuel, la sensibilité est d'autant plus grande que le rapport m est plus grand, et la variation relative de potentiel à observer tend à devenir le quart de l'erreur relative de résistance.

679. **Cas des liquides.** — Lorsque l'une des branches du pont renferme un liquide, il est nécessaire de faire intervenir la force électromotrice de polarisation. Si les résistances sont équilibrées et que, par un commutateur, on permute les branches b et b', les courants i et i' dans le galvanomètre sont

alors, d'après les équations (6), suivant que le liquide occupe la branche b ou la branche b',

$$i = \frac{e(a+b) - a\mathrm{E}_b}{\mathrm{M}}, \qquad i' = \frac{e(a+b) + a\mathrm{E}_{b'}}{\mathrm{M}};$$

$$i + i' = \frac{2e(a+b) + a(\mathrm{E}_{b'} - \mathrm{E}_b)}{\mathrm{M}}.$$

En supposant que le pont r renferme une force électromotrice quelconque e, la moyenne des déviations relative aux courants i et i' est la même que celle que l'on obtiendrait par une combinaison de résistances métalliques, si les polarisations E_b et $\mathrm{E}_{b'}$ sont égales. On réalisera cette condition en prenant des bras respectivement égaux, $a = a'$ et $b = b'$, puisqu'alors le courant dans le liquide conserve la même valeur. Dans ce cas, les courants i et i' dans le pont sont égaux et de signes contraires si la branche du galvanomètre ne renferme pas de force électromotrice.

M. Kohlrausch s'est servi encore d'un inducteur à courants sinusoïdaux (665). L'inducteur et la bobine fixe d'un électrodynamomètre sont placés dans la branche R, la bobine mobile dans le pont r, à la place du galvanomètre. Avec des bras égaux $a = a'$, si l'équilibre des résistances est établi, la déviation de la bobine mobile ne change pas quand on permute les résistances b et b' dont l'une renferme le liquide.

680. Pont à bobines. — Les deux formes les plus employées sont le *pont à bobines* et le *pont à corde*.

Les boîtes de résistance sont habituellement disposées de manière à fournir en même temps les éléments d'un pont de Wheatstone. Dans la figure 177, MN est la boîte de résistances à cadrans décrite plus haut; une série de bobines CAD forment les deux bras a et a' du fléau. La résistance à mesurer b est reliée aux bornes D et B par les fils R et R', et la série des cadrans constitue la résistance b' de comparaison; les bornes A, B, C et D représentent donc les quatre sommets du parallélogramme. La pile est intercalée entre les deux sommets A et B par les fils P et P', et le galvanomètre entre les sommets C et D par les fils G et G'. Les circuits du galvanomètre et de la pile sont ouverts ou fermés à volonté, soit par deux clefs distinctes, soit par une clef à double contact. Enfin une che-

ville spéciale K permet au besoin d'interrompre le circuit des cadrans et d'introduire une résistance pratiquement infinie.

Le galvanomètre est habituellement à grande résistance avec aiguille astatique; il est muni d'un shunt et la sensibilité peut être modifiée par un aimant auxiliaire.

La barre CAD est en cuivre épais, de deux centimètres de côté environ, divisée en plusieurs fragments qu'on peut réunir par des chevilles et entre lesquels sont placées des bobines symétriquement égales deux à deux. Pour assurer l'égalité de température de deux bobines de même ordre, les fils correspondants sont enroulés simultanément sur un même noyau. Les résistances de ces bobines sont respectivement égales à 10, 100, 1000 et 10 000 ohms. En enlevant une cheville de part et d'autre, on introduit dans les deux bras des résistances égales, si les chevilles sont symétriques, ou, dans le cas contraire, des résistances dont le rapport a l'une des valeurs 10, 100, 1000. Si on laissait toutes les chevilles en place, la résistance propre de ces deux branches du pont serait tellement faible que le galvanomètre ne donnerait plus d'indication : si on n'enlevait qu'une cheville, la résistance d'une des branches serait sensiblement nulle vis-à-vis de l'autre.

La boîte fournit directement les résistances en nombres entiers depuis un jusqu'à 10 000 ohms ; mais, par le jeu des chevilles qui permettent d'établir entre les résistances a et a' l'un des rapports 1, 10, 100 et 1000, ou les rapports inverses, on voit qu'il est possible de mesurer toutes les résistances depuis 0,001 jusqu'à 10 000 000.

L'équilibre n'est établi directement qu'à une unité près d'un nombre de quatre chiffres au plus, fourni par les quatre cadrans, mais on peut pousser l'approximation plus loin ; il suffit d'observer les déplacements δ et δ' de sens contraires (déviations permanentes ou impulsions) qu'éprouve l'aiguille du galvanomètre quand l'équilibre approché est obtenu par deux nombres successifs n et $n+1$ de la boîte entre lesquels est comprise la résistance x cherchée. Les déplacements de l'aiguille étant proportionnels à l'erreur de réglage, on prendra pour x la valeur plus exacte

$$x = n + \frac{\delta}{\delta + \delta'}.$$

Dans le cas des résistances moyennes, on commence par établir l'équilibre à une unité près, avec des bras égaux et en mettant le shunt du galvanomètre au millième ; puis on multiplie le rapport des bras du pont par 10, 100...., successivement, de manière à faire passer dans le galvanomètre une fraction croissante du courant, jusqu'à ce qu'on utilise tous les cadrans ; enfin, l'équilibre étant presque atteint, on supprime le shunt, et on observe les déplacements δ et δ', de part et d'autre du zéro, pour la correction finale.

Il est important de ne laisser passer le courant que pendant le temps strictement nécessaire à l'observation du galvanomètre, afin d'éviter l'échauffement des fils.

Pour éliminer le défaut d'exactitude du rapport des bras, on peut opérer par substitution. Les résistances b et b_1, introduites successivement entre les bornes C et B, sont proportionnelles aux valeurs x et x_1 de la boîte qui correspondent aux deux équilibres.

On doit s'assurer aussi, surtout avec les instruments très sensibles, que la branche du galvanomètre ne renferme pas de force électromotrice parasite, résultant par exemple d'un effet thermoélectrique, ce qui apporterait un grand trouble dans les mesures [1].

Lorsque les forces électromotrices E et e existent seules, les équations générales (10) donnent

$$i = \frac{e(a+a'+b+b') + \mathrm{I}(a'b - ab')}{\mathrm{D}}.$$

Si l'équilibre du pont est à peu près établi, l'intensité I est sensiblement indépendante de la force électromotrice e du conducteur conjugué ; on peut la remplacer par sa valeur approchée (5) et D par D_0, ce qui donne

$$i\frac{\mathrm{M}}{a} = e\left(1 + \frac{b+b'}{a+a'}\right) + \mathrm{E}\,\frac{a'b - ab'}{\mathrm{N}},$$

ou, d'une manière très approchée,

$$i\frac{\mathrm{M}}{a} = e\left(1 + \frac{b}{a}\right) + \mathrm{E}\,\frac{ab}{\mathrm{N}}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)$$

[1] R. T. Glazebrook, *Ph. Mag.* [5], t. XI, p. 291; 1881.

Le courant i est nul pour la condition

$$\frac{b'}{b}-\frac{a'}{a}=\frac{e}{E}\cdot\frac{N}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{e}{E}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left[R\left(1+\frac{a'}{a}\right)+a'\left(1+\frac{b}{a}\right)\right].$$

L'influence de la force électromotrice e peut être considérable quand la résistance R de la branche qui renferme la pile est très grande. En outre, le second membre de cette équation change de signe avec E en conservant une valeur constante δ; si donc on renverse le courant de la pile et qu'on mesure les résistances b' et b'_1 qui annulent le courant dans le galvanomètre, on aura

$$\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}+\delta,\qquad \frac{b'_1}{b}=\frac{a'}{a}-\delta,\qquad \frac{a'}{a}=\frac{b'+b'_1}{2b}.$$

La résistance cherchée est donc la moyenne des valeurs b' et b'_1 relatives aux deux sens du courant de la pile.

Si, en renversant le courant de la pile, la balance reste établie, on en conclut que la force électromotrice e est nulle; on s'en assurerait également en fermant sur lui-même le circuit du galvanomètre.

Lorsque, la force électromotrice e du galvanomètre n'étant pas nulle, la condition $a'b=ab'$ est satisfaite exactement, la déviation de l'aiguille est indépendante de la pile; elle ne change pas quand on renverse le courant, ou qu'on ouvre et qu'on ferme alternativement le circuit de la pile.

On peut dès lors, si l'on veut éviter toute correction, fermer d'abord le circuit du galvanomètre, observer la déviation de l'aiguille et ajuster ensuite la résistance de manière que la déviation ne change pas quand on ferme la pile. Toutefois cette méthode n'est encore rigoureuse que si les effets d'induction sont insensibles.

681. Pont à corde. — Cette modification, due à Kirchhoff [1], convient particulièrement pour la mesure des faibles résistances et pour la comparaison des étalons.

Remplaçons dans le parallélogramme ordinaire (fig. 186),

[1] R. Kirchhoff, *Pogg. Ann.*, t. C, p. 177; 1857.

un des sommets C par un fil rectiligne A′B′, le long duquel puisse se déplacer un contact mobile C. Au lieu de faire varier l'une des résistances, on établira la balance par une position convenable du point C sur le fil.

Si on appelle l la longueur A′B′ du fil supposé homogène et régulier, x la distance A′C, on aura pour condition d'équi-

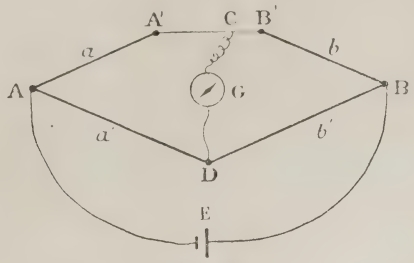


Fig. 186.

libre, en exprimant les résistances a et b des côtés AA′ et BB en unités de longueur du fil,

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+x}{b+l-x}.$$

Le fil a ordinairement 1 mètre de longueur environ et un diamètre de $1^{mm},5$ à 2 millimètres ; il est en laiton, en maillechort ou mieux en platine iridié, alliage qui présente l'avantage d'être inoxydable et de ne pas s'amalgamer.

Ce fil forme l'un des côtés d'un rectangle allongé (fig. 187) et les trois autres côtés sont constitués par de larges bandes de cuivre dont les résistances peuvent être considérées comme négligeables. Ces bandes présentent en P, Q, P′ et Q′ des interruptions qui peuvent être fermées, soit par des bandes épaisses de cuivre, soit par des résistances a, b, a', b'. Les deux points A et B sont reliés par la pile, le fil du galvanomètre est attaché en D et au contact mobile C, dont la position se détermine par une règle divisée.

Le contact en C s'opère au moyen d'une espèce de couteau à arête mousse, ordinairement en platine, qui vient s'appliquer perpendiculairement sur le fil. Ce mode de contact serait

très défectueux s'il s'agissait d'un rhéostat, mais il convient très bien dans le cas actuel, parce que sa résistance n'intervient pas et qu'il importe seulement de connaître exactement la position du point touché.

Il faut avoir grand soin d'éviter toute déformation ou altération du fil; on doit dans ce but apporter une grande attention aux dispositions mécaniques employées. Pour la même

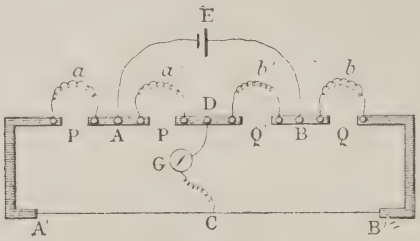


Fig. 187.

raison, on se gardera de mettre la pile entre les points D et C, dût-on manquer à la règle du maximum de sensibilité, pour éviter toute altération du fil par les étincelles de rupture.

La figure 188 représente un pont de construction très soignée, exécuté par M. Carpentier pour la reproduction de l'ohm.

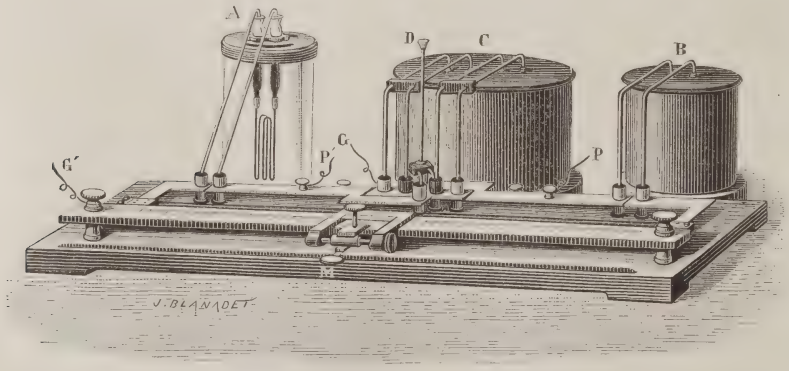


Fig. 188.

La règle est en laiton et divisée en millimètres; elle sert à mettre le contact mobile en communication avec le galvanomètre, ce qui évite l'emploi d'un fil flottant. Le contact s'éta-

blit par un couteau en acier qui est relevé dans sa position habituelle ; en appuyant sur une touche M en ébonite, on n'agit pas sur le couteau lui-même, mais on l'abandonne à l'action d'un petit ressort qui produit sur le fil une pression légère, toujours égale et indépendante de l'opérateur. Ce couteau est porté par un chariot qui glisse le long de la règle, que l'on peut fixer par une vis de pression et déplacer légèrement par une vis de rappel ; enfin un vernier tracé sur le chariot donne les fractions de division de l'échelle. Les fils P et P′ sont reliés à la pile avec un interrupteur, les fils G et G′ vont au galvanomètre.

Les résistances a et b, qui sont représentées sur la figure par une copie A de l'ohm et une bobine B renfermée dans un cylindre de cuivre, sont introduites dans le circuit au moyen de godets en cuivre montés sur les bandes latérales et contenant du mercure ; on peut ainsi les substituer l'une à l'autre très facilement. Les résistances a' et b' sont aussi enfermées dans un même cylindre C ; les prises de contact se font dans des godets à mercure et un commutateur O permet de permuter leur fonction sans les déplacer.

Avec la disposition habituelle des ponts à corde, les barres de cuivre qui servent de jonction ont une résistance négligeable, et les rapports des résistances à comparer doivent être assez voisins pour que la différence puisse être compensée par deux portions du fil. Comme ces résistances sont très faibles, de l'ordre d'un ohm, un galvanomètre à grande résistance se trouverait, pour ainsi dire, fermé en court circuit ; c'est le cas d'employer un galvanomètre de faible résistance satisfaisant aux conditions du n° 675.

682. Disposition des expériences. — Si les interruptions P et Q (fig. 187) sont fermées elles-mêmes par des pièces de résistance négligeable, l'équation d'équilibre se réduit à

$$\frac{b'}{a'} = \frac{l-x}{x}.$$

Le second membre de cette équation étant susceptible de prendre toutes les valeurs positives, on peut comparer par ce procédé des résistances quelconques ; mais il est facile de voir que la sensibilité diminue à mesure que le point d'équilibre

s'approche de l'une ou l'autre des extrémités du fil. En appelant δx le déplacement du contact qui correspond à une variation $\delta b'$ de b', on a

$$-\frac{\delta b'}{b'} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta x}{l-x} = \frac{l}{x(l-x)}\,\delta x.$$

Dans ces conditions, la sensibilité absolue ou relative est maximum au milieu du fil et nulle aux extrémités.

Les courants thermo-électriques sont particulièrement à craindre dans le pont à corde, et on doit éviter de toucher avec les doigts aucune des pièces métalliques de l'appareil.

L'expérience comporte encore deux manières d'opérer, soit par substitution, soit par comparaison des rapports.

La méthode de substitution est la plus exacte et elle n'exige aucune connaissance des résistances auxiliaires. On place successivement en Q (fig. 187) les deux résistances à comparer b et b_1 et on détermine les positions x et x_1 du curseur qui correspondent à l'équilibre; on a alors

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+x}{b+l-x} = \frac{a+x_1}{b_1+l-x_1} = \frac{x-x_1}{b-b_1-(x-x_1)},$$

$$b-b_1 = \left(1+\frac{b'}{a'}\right)(x-x_1).$$

Si l'on veut éliminer le rapport des résistances b' et a', il suffit de les permuter; les nouvelles lectures correspondantes y et y_1 du curseur donnent alors

$$\frac{x-x_1}{b-b_1-(x-x_1)} = \frac{b-b_1-(y-y_1)}{y-y_1},$$

$$b-b_1 = (x-x_1)+(y-y_1).$$

Quand la différence $b-b_1$ est plus grande que la longueur du fil, on peut la déterminer par une série d'expériences avec des résistances intermédiaires r_1, r_2,... r_n, telles que les différences successives de deux d'entre elles soient mesurables directement, ainsi que celles de la première avec b et de la

dernière avec b_1, et on aura

$$b - b_1 = (b - r_1) + (r_1 - r_2) + \ldots + (r_n - b_1).$$

Pour la comparaison des rapports, il est nécessaire de connaître les valeurs de a et de b en fonction de l'unité de longueur du fil, dont elles forment pour ainsi dire le prolongement. Comptons d'abord ces résistances respectivement depuis les points A et B jusqu'aux positions extrêmes des contacts aux bouts correspondants du fil. On introduit en P′ et Q′ des résistances a' et b' dont le rapport p est connu et on observe la position d'équilibre x du contact, puis la position x' après inversion des résistances a' et b'. On a alors

$$\frac{a'}{b'} = p = \frac{a+x}{b+l-x} = \frac{b+l-x'}{a+x'};$$

$$a = \frac{px' - x}{1-p}, \qquad b = \frac{p(l-x) - (l-x')}{1-p}.$$

Si le rapport p est égal à l'unité, il en résulte $x = x'$ et l'expérience donne seulement la différence

$$a - b = l - 2x.$$

En fermant les intervalles P et Q par des pièces de cuivre sans résistance, on déterminera ainsi les résistances α et β des bouts AA′ et BB′ comptés jusqu'à la position du contact aux divisions extrêmes.

Les résistances a et b, y compris les compléments α et β, étant connues, les résistances à comparer a' et b' seront intercalées en P′ et Q′; il est encore avantageux de permuter ces résistances, ce qui donne deux lectures x et x', et on a

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+x}{b+l-x} = \frac{b+l-x'}{a+x'} = \frac{a+b+l+(x-x')}{a+b+l-(x-x')}.$$

Si ce rapport est voisin de l'unité, auquel cas on n'utilise qu'une portion $(x - x')$ très petite du fil, on peut écrire

$$\frac{a'}{b'} = 1 + 2\,\frac{x-x'}{a+b+l}, \qquad \frac{a'-b'}{b'} = 2\,\frac{x-x'}{a+b+l}.$$

La différence $a' - b'$ est proportionnelle à l'écart des deux positions x et x' ; en outre, pour une même valeur de cette différence, l'écart $x - x'$ est d'autant plus grand que les résistances auxiliaires a et b sont elles-mêmes plus grandes.

On met cette remarque à profit pour la reproduction des étalons de résistance. On prépare une série de résistances a et b, a_1 et b_1, a_2 et b_2, égales deux à deux, afin de maintenir les lectures dans le milieu du fil, et dont les valeurs sont de dix en dix fois plus grandes environ. La résistance b' étant l'étalon, on ajuste la copie a', avec les résistances b', à une division près de l'échelle. On remplace a et b par a_1 et b_1 et on ajuste de nouveau a', à une division près, et ainsi de suite autant que le permet la sensibilité du galvanomètre. Si l'ajustement est fait à une division près, avec les bobines de l'ordre a_n, l'erreur de la copie est $\pm \frac{2}{2a_n + l}$.

Cette méthode de comparaison, appliquée à des résistances qui ne sont pas très petites, permet aisément d'atteindre une approximation inférieure à 0,00001, ce qui correspond pour un fil de cuivre, par exemple, à une variation de température de $\frac{1}{400}$ de degré centigrade.

Quand les résistances à comparer sont trop différentes, on emploie encore une série de résistances intermédiaires $r_1, r_2, \ldots r_n$, dont les rapports successifs et ceux des extrêmes avec a' et b' sont directement mesurables; on a alors

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a'}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdots \frac{r_n}{b'}.$$

Pour des résistances très inégales, il sera quelquefois avantageux de choisir les résistances auxiliaires de telle sorte que, disposées en série, elles soient à peu près égales à a', et qu'en fils parallèles leur conductance soit voisine de celle de b'. En désignant par p et q des rapports ainsi déterminés, le rapport des résistances a' et b' se déduira des équations

$$a' = (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)p,$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = \frac{1}{b'q}.$$

Lorsque les résistances auxiliaires $r_1, r_2, \ldots r_n$ ont la même valeur r, les équations se réduisent à

$$a' = nrp, \qquad nb'q = r; \qquad \frac{a'}{b'} = n^2 pq.$$

Si ces résistances, sans être égales, sont très voisines de leur valeur moyenne r, chacune d'elles peut s'écrire $r(1+\beta)$; le résultat final n'est pas changé quand les quantités de l'ordre de β^2 sont négligeables, auquel cas il n'est pas nécessaire de déterminer ces corrections.

683. Calibrage du fil. — L'exactitude des méthodes précédentes suppose la parfaite homogénéité du fil, sinon dans toute sa longueur, au moins dans la partie utilisée pour les lectures. Cette condition est ordinairement réalisée quand le fil a été préparé avec de bons alliages et étiré avec soin, mais il est nécessaire de la contrôler par un calibrage.

Une première méthode consiste à reproduire identiquement les opérations employées pour le calibrage d'un tube thermométrique, comme nous l'avons indiqué (656) à propos de la construction de l'étalon. On prend une résistance auxiliaire qui soit, par exemple, équivalente à la n^e partie du fil, et on la mesure par substitution, en choisissant les résistances latérales de manière à utiliser successivement les n parties du fil. On fait ensuite la même opération avec une résistance auxiliaire qui soit double, triple, etc., de la première, de façon que les portions de fil utilisées soient toujours limitées au voisinage des points principaux du calibrage.

La disposition suivante rendra ces opérations plus faciles. On remplacera les résistances a' et b' par un fil auxiliaire A_1B_1 (fig. 189) semblable au premier. Les intervalles P′ et Q′ restant ouverts, les intervalles P et Q sont fermés, l'un par une plaque de cuivre sans résistance appréciable, l'autre par une résistance auxiliaire f équivalente à la n^e partie du fil A′B′. Enfin les attaches du galvanomètre se font en des points variables, l'une en D_1 et l'autre en C.

Le contact D_1 étant en un point quelconque du fil A_1B_1, appelons a_1 et b_1 les deux résistances AA_1D_1 et BB_1D_1, x et x' les lectures faites sur le fil A′B′ quand on intercale successivement la résistance f en P et en Q, l la longueur totale de

ce fil, y compris les branches terminales. On a

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{f+x}{l-x} = \frac{x'}{f+l-x'}, \qquad \text{d'où} \qquad f = x' - x.$$

En changeant la position du point D_1 sur le second fil, on pourra mesurer la résistance f successivement par les portions différentes du fil comprises entre les points principaux du

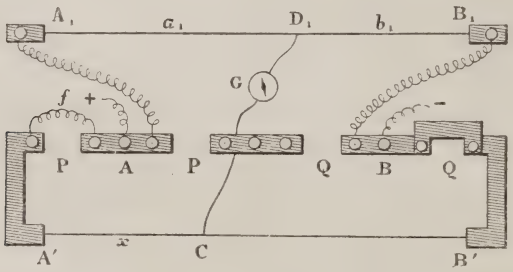


Fig. 189.

calibrage. Une série d'opérations semblables avec des résistances auxiliaires différentes permettra de déterminer la correction relative à chaque division x.

La méthode suivante repose sur une idée due à Von Helmholtz [1]. Considérons deux circuits S et S′ (fig. 190) conte-

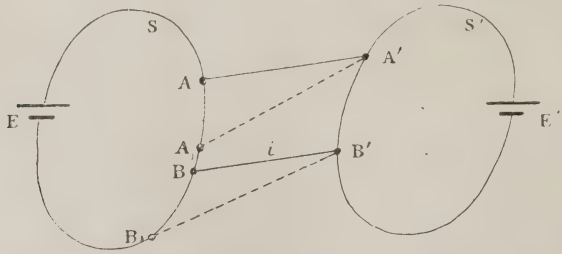


Fig. 190.

nant des forces électromotrices E et E′; deux points A et B du premier circuit étant joints respectivement aux deux points A′

[1] Giese, *Wied. Ann.*, t. XI, p. 440; 1880.

et B′ du second, soit i l'intensité du courant dans un des fils auxiliaires BB′.

Si on déplace les points A et B en A_1 et B_1 de façon que la résistance B_1A_1 reste égale à AB, l'intensité i ne change pas et la résistance de la portion AA_1 est la même que celle de BB_1. En particulier, si le point A_1 est venu au point B, les résistances AB et BB_1 sont égales ; de là un procédé qui permet de diviser une résistance donnée en deux parties égales.

Soit PQ le fil à calibrer (fig. 191), AB la portion que l'on veut

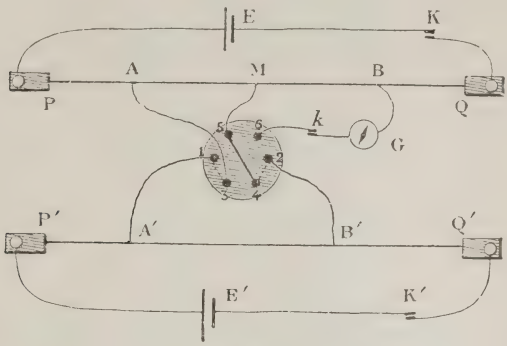


Fig. 191.

diviser en deux parties égales au point M, A′ et B′ deux points d'un fil quelconque P′ Q′. Désignons par les nos 1, 2, 3, 4, 5 et 6 les godets d'un commutateur à bascule [1], dont les communications avec les différentes parties des deux fils sont indiquées par la figure, les godets 1 et 2 servant d'axe pour la rotation de l'équipage mobile.

Quand on le fait basculer d'un côté ou de l'autre, on réunit les godets 1 et 3, 2 et 4, ou 1 et 5, 2 et 6 ; dans le premier cas, les communications des deux circuits sont AA′ et MB′ ; dans le second, MA′ et BB′, la dernière des deux combinaisons renfermant toujours le fil du galvanomètre.

La bascule étant dans la première position, on déplace le contact B′ de manière que le courant soit très faible dans le galvanomètre et on déplace le contact M jusqu'à ce que le jeu

[1] Cette bascule est une modification légère du *gyrotrope de Pohl* (Katsner's Archiv., t. XIII, p. 49; 1828), dont l'emploi comme *inverseur de courant* est des plus commodes et des plus sûrs (fig. 192).

Les six godets A, B, A′, B′, P et N sont remplis de mercure et communiquent

alternatif de la bascule laisse l'aiguille du galvanomètre immobile ; les résistances AM et MB sont alors égales.

Les communications sont établies par des fils fins fixés aux godets et munis, à leurs extrémités libres, de petits poids destinés à tendre les fils que l'on pose simplement en A et B.

Des clefs d'interruption K, K′ et *k* permettent de n'établir les courants dans les deux circuits principaux, puis dans le galvanomètre, qu'au moment des observations.

On peut d'ailleurs laisser le courant passer dans les deux circuits d'une manière continue, l'échauffement des fils n'ayant pas d'influence sur l'exactitude de la méthode. La seule condition est que les courants soient constants.

684. Vérification d'une boîte de résistances. — Nous avons vu que, dans la boîte représentée par la figure 177, les cavités des plaques qui constituent la couronne de chaque cadran permettent, avec des chevilles munies de serre-fils, d'isoler toutes les bobines intermédiaires. On peut alors prendre ces bobines isolément ou par séries et les comparer à d'autres résistances à l'aide d'un pont auxiliaire.

On compare d'abord entre elles les différentes bobines d'un même cadran, une à une, deux à deux, etc., ce qui fournit un

avec les serre-fils correspondants. Les godets AA′, BB′ sont réunis en croix par deux gros fils de cuivre isolés ; les deux godets P et N servent d'axe à la bascule

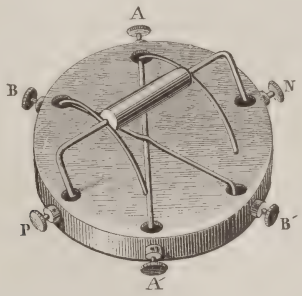


Fig. 192.

proprement dite, laquelle se compose de deux arcs conducteurs isolés l'un de l'autre et communiquant respectivement avec les godets P et N.

Les extrémités de la pile étant attachées en P et en N, le bouton B est positif pour la position de la bascule indiquée sur la figure, et négatif si on renverse l'équipage de manière que les extrémités des arcs plongent dans les godets A′ et B′. Pour l'expérience qui précède, on a supprimé un des fils en croix.

grand nombre d'équations de condition. Une unité supplémentaire, par exemple celle qui se trouve à l'intérieur de la boîte en vv', permet ensuite de constituer avec le premier cadran dix unités que l'on compare avec les dizaines. Ces deux cadrans et l'unité supplémentaire forment aussi 100 unités qui serviront à comparer les centaines, et on opérera de même pour les bobines de 1000 unités.

Il faut avoir soin, quand on compare deux systèmes de bobines b et b', de déterminer la résistance des fils de communication β et β'. Comme les résistances b et b' sont presque égales et les valeurs de β et β' très faibles, on peut écrire, en désignant par p le rapport obtenu directement, lequel est très voisin de l'unité,

$$p = \frac{b+\beta}{b'+\beta'} = \frac{b}{b'}\left(1 + \frac{\beta-\beta'}{b}\right),$$

$$\frac{b}{b'} = p\left(1 + \frac{\beta'-\beta}{b}\right) = p + \frac{\beta'-\beta}{b}.$$

Cette précaution est surtout importante quand il s'agit de la comparaison des unités. On construit alors une table des valeurs des bobines en fonction de l'une d'entre elles ou de leur valeur moyenne.

685. Pont double de Lord Kelvin. — Cette combinaison in-

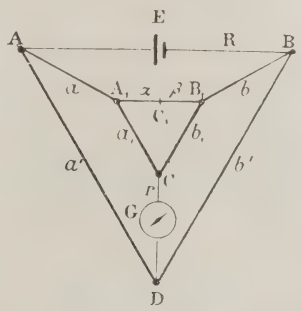


Fig. 193.

génieuse des résistances se rapproche du pont à corde en ce que l'équilibre s'établit au moyen de contacts glissants. L'appareil (fig. 193) comprend neuf conducteurs qui peuvent être

considérés comme formant les neuf arêtes d'une pyramide triangulaire tronquée. Le galvanomètre étant intercalé dans la branche CD, le courant est nul quand les deux points C et D sont situés sur une même surface de niveau électrique; cette surface coupe la branche A_1B_1, de résistance γ, en un certain point C_1, qui se trouve ainsi au potentiel commun des points C et D, et partage ce conducteur en deux parties dont les résistances respectives sont α et β.

Lorsque l'équilibre est établi, les résistances a_1 et α, b_1 et β, comptées des points A_1 et B_1 jusqu'à la surface de niveau CC_1, sont respectivement proportionnelles; on a donc

$$\frac{a_1}{\alpha} = \frac{b_1}{\beta} = \frac{a_1 + b_1}{\gamma}.$$

La constitution du réseau fournit ainsi une méthode indirecte pour déterminer le rapport des résistances α et β, par le rapport des résistances a_1 et b_1 relatives à un conducteur auxiliaire A_1CB_1 de dimensions très différentes.

La même règle appliquée aux résistances comptées à partir des sommets A et B, jusqu'à la même surface de niveau C_1CD, donne aussi

$$(10) \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{a + \dfrac{1}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{\alpha}}}{b + \dfrac{1}{\dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{\beta}}} = \frac{a + \dfrac{a_1}{1 + \dfrac{a_1}{\alpha}}}{b + \dfrac{b_1}{1 + \dfrac{b_1}{\beta}}} = \frac{a + \dfrac{a_1}{1 + \dfrac{a_1 + b_1}{\gamma}}}{b + \dfrac{b_1}{1 + \dfrac{a_1 + b_1}{\gamma}}}.$$

En particulier, si la somme des deux résistances a_1 et b_1 est constante, et qu'on la prenne égale à γ, l'équation se réduit simplement à

$$(11) \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{2a + a_1}{2b + b_1}.$$

Considérons les neuf branches disposées comme dans la figure 194 : a' et b' sont les deux résistances à comparer, AB et PQ deux fils cylindriques et homogènes; l'extrémité C du fil du galvanomètre peut glisser le long de PQ; deux contacts

A_1 et B_1 isolés l'un de l'autre, mais maintenus à une distance constante, et communiquant respectivement avec les deux extrémités de PQ, peuvent se déplacer le long du fil AB. Le curseur A_1B_1, à contact double, est placé d'abord dans une

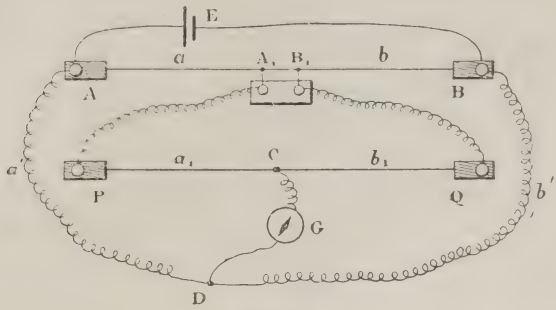


Fig. 194.

position telle que l'aiguille du galvanomètre soit à peu près au zéro, et on achève le réglage en déplaçant le point C. La formule (10) donne le rapport des deux résistances a' et b' et elle se réduit à la formule (11) si la résistance γ de la portion du fil AB comprise entre les contacts A_1 et B_1 est égale à la résistance totale du fil PQ.

Cette disposition a été réalisée par Lord Kelvin et Varley

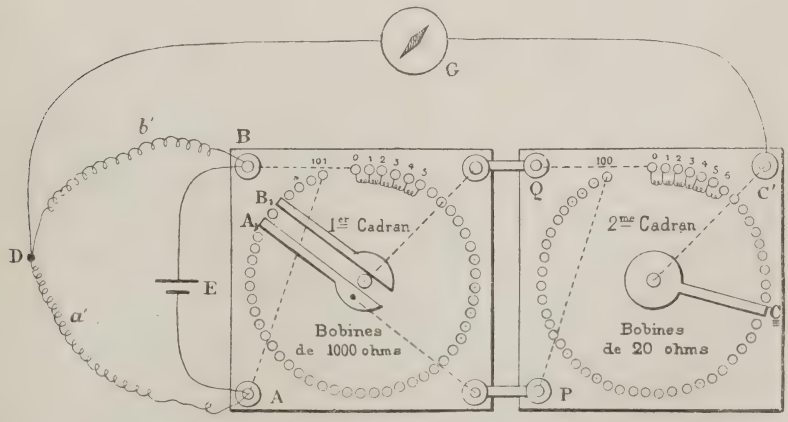


Fig. 195.

sous la forme représentée par la figure 195. Chacun des fils AB et PQ est remplacé par une série de bobines égales entre

elles, réunies bout à bout sur deux cadrans désignés par les mêmes lettres. La première série est formée de 101 bobines de 1000 ohms ; la seconde de 100 bobines de 20 ohms. Les curseurs appuient sur les boutons qui relient les bobines successives et se déplacent au moyen de manivelles. Les deux contacts du curseur A_1B_1 laissent entre eux deux bobines de 1000 ohms et par conséquent une résistance égale à celle des 100 bobines de l'autre cadran.

La manivelle du second cadran étant sur le premier contact, on déplace la manivelle du premier cadran jusqu'à ce que la résistance introduite soit suffisante, à moins d'une bobine près, pour établir l'équilibre. Agissant ensuite sur la manivelle du second cadran, on cherche encore, à moins d'une bobine près de cette série, le contact qui donne l'équilibre le plus approché.

Si le contact A_1 s'arrête sur la N^e bobine du premier cadran et le contact C sur la n^e du second, on a

$$a = 1000N, \qquad b = (101 - N - 2)\,1000,$$
$$a_1 = 20n, \qquad b_1 = (100 - n)\,20;$$

$$\frac{b'}{a'} = \frac{(101 - N - 2)\,1000 + (100 - n)\,10}{1000N + 10n} = \frac{10\,000}{100N + n} - 1.$$

Lorsque le rapport cherché est voisin de l'unité, le nombre N est voisin de 50 ; une erreur d'une unité sur n n'entraîne qu'une erreur de 0,00002 sur le rapport des résistances. L'exactitude est moindre quand on se rapproche des extrémités du premier cadran, mais en observant les déviations du galvanomètre pour deux contacts n et $n+1$ qui comprennent la position d'équilibre, on obtiendra encore, par une proportion, une valeur fractionnaire de n plus exacte.

686. Cas des résistances très faibles [1]. — La méthode du pont double convient particulièrement à la mesure des résistances très faibles (**671**).

Supposons qu'il s'agisse de comparer les résistances a et b (fig. 196) comprises, la première entre les points A et A_1, la

[1] Sir W. Thomson, *Ph. Mag.* [4], t. XXIV, p. 149; 1862.

seconde entre les points B et B_1 de deux conducteurs réunis par un troisième c; les résistances a', b', a_1 et b_1 sont très grandes. On déplace les contacts C et D du galvanomètre entre les deux circuits jusqu'à ce que le courant soit nul. En

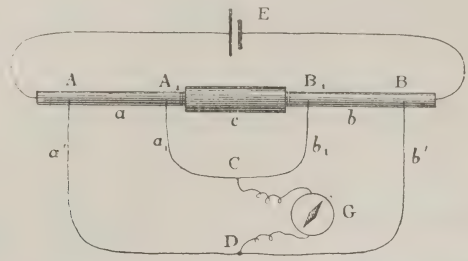


Fig. 196.

appelant γ la résistance intermédiaire A_1B_1, le rapport des résistances a' et b' est donné par l'équation (10).

Si cette résistance γ est très petite par rapport à la somme $a_1 + b_1$, on peut écrire

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a_1 \dfrac{\gamma}{a_1 + b_1}}{b + b_1 \dfrac{\gamma}{a_1 + b_1}} = \frac{a}{b}\left[1 + \left(\frac{a_1}{a} - \frac{b_1}{b}\right)\frac{\gamma}{a_1 + b_1}\right].$$

Comme la différence $\dfrac{a_1}{a} - \dfrac{b_1}{b}$ est très voisine de zéro, on voit que les résistances a et b, a' et b', sont très sensiblement dans les rapports d'un pont équilibré.

On n'a pas tenu compte des résistances dues aux contacts en A, B, A_1 et B_1, mais l'erreur est négligeable si on a choisi les résistances auxiliaires a', b', a_1 et b_1 assez grandes.

Hockin et Matthiessen [1] ont employé la disposition suivante, qui élimine plus complètement cette cause d'erreur. X et Y (fig. 197) sont des résistances connues formées par des bobines qu'on peut à volonté porter d'un côté sur l'autre, sans que leur somme soit changée; PQ est le fil d'un pont à corde. Les contacts sont pris sur chacun des conducteurs au moyen

[1] Maxwell, *Electr. and Magnet.*, t. I, p. 444.

de deux pointes ou de deux couteaux montés sur une lame isolante à une distance constante et mesurée exactement. Chacune des pointes communique avec un petit godet à mercure,

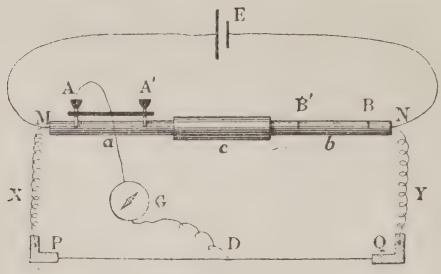


Fig. 197.

dans lequel on plonge l'un des fils du galvanomètre dont l'autre extrémité est en D.

On règle les résistances X et Y et la position du point D de manière que l'aiguille du galvanomètre reste au zéro. Appelons α la résistance MA, S la résistance totale de M en N, l la résistance du fil PQ, x celle de PD et T la somme $X+l+Y$. Si on prend le contact successivement en A et A', les valeurs X et X', x et x' relatives aux deux équilibres donnent

$$\frac{S}{T}=\frac{\alpha}{X+x}=\frac{\alpha+a}{X'+x'}=\frac{a}{X'-X+x'-x}.$$

On aura, de même, en appelant X'_1 et X_1, x'_1 et x_1 les valeurs relatives aux contacts en B' et B,

$$\frac{S}{T}=\frac{b}{X_1-X'_1+x_1-x'_1};$$

il en résulte

$$\frac{a}{b}=\frac{X'-X+x'-x}{X_1-X'_1+x_1-x'_1}.$$

Les résistances des points de contact, n'agissant que sur la branche du galvanomètre, n'interviennent pas dans les équations d'équilibre; la seule condition à remplir est que les résistances S et T restent invariables.

687. Balance d'induction. — Les courants induits dans un conducteur sont, toutes choses égales, en raison inverse de sa résistance et on a déjà utilisé cette propriété (**669**) pour comparer les résistances par la mesure des décharges induites. On peut rapprocher du pont de Wheatstone la disposition suivante, qui consiste à équilibrer les effets d'induction de deux circuits différents.

Supposons qu'on intercale dans un circuit qui renferme une force électromotrice variable E (fig. 198) deux bobines

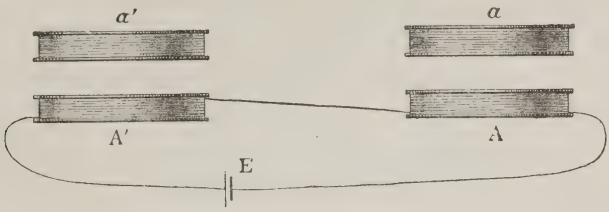


Fig. 198.

égales A et A' séparées par une distance assez grande pour que leur induction mutuelle soit négligeable.

Au-dessus d'elles on place, à la même distance et respectivement suivant le même axe, deux autres bobines égales a et a', de manière que les coefficients d'induction mutuelle soient les mêmes pour les deux systèmes.

Lorsque les bobines induites a et a' ont la même induction propre et qu'on ferme respectivement leurs circuits par des fils de résistances égales R et R', dont les coefficients de self-induction sont égaux ou négligeables, les courants induits de part et d'autre par une variation quelconque de la force électromotrice sont égaux à chaque instant. L'addition de deux résistances égales r et r', sans coefficient de self-induction ou ayant des coefficients égaux, ne trouble pas l'égalité, de sorte que si l'on joint séparément les bobines induites aux deux cadres d'un galvanomètre *différentiel* parfaitement équilibré, l'aiguille doit rester immobile.

Le galvanomètre ne mesurant que les quantités totales d'électricité, il suffit pour l'équilibre que la décharge ou la valeur intégrale des deux courants induits soit la même, et approximativement aussi leur durée, pourvu que cette durée

reste très courte par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille. Cette condition n'exige pas la symétrie complète des deux systèmes, mais seulement l'égalité des résistances et des coefficients d'induction mutuelle, quels que soient d'ailleurs les coefficients de self-induction.

Le galvanomètre ne peut plus servir si le courant inducteur, au lieu des variations brusques de sens déterminé que donne la rupture ou la fermeture du circuit, éprouve des variations se succédant rapidement en sens contraires, comme celles que produirait un interrupteur vibrant ou un microphone placé dans le circuit de la pile, ou encore un électromoteur à courants alternatifs. Dans ce cas, il faut avoir recours à un instrument, tel que le téléphone, sensible seulement aux variations instantanées du courant. Un téléphone *différentiel*, par exemple, restera silencieux si les courants sont égaux à chaque instant, ce qui exige en outre que les coefficients de self-induction des deux systèmes soient égaux (**505**).

Il est du reste indifférent que le téléphone différentiel soit actionné par les courants induits dans les bobines a et a' ou par deux dérivations du circuit inducteur traversant respectivement les deux bobines A et A' [1].

C'est sur ce principe de l'équilibre de deux circuits que repose la disposition employée par M. Hughes [2], sous le nom de *balance d'induction*, pour comparer les propriétés électriques et, en particulier, la résistance de corps qui se présentent sous une forme quelconque.

On place un téléphone T (fig. 199) dans le circuit des deux bobines induites a et a', réunies de manière que leurs courants soient de sens contraires. Quand les coefficients d'induction mutuelle ont la même valeur, la balance est établie et le téléphone reste silencieux. L'introduction d'un conducteur quelconque C entre les bobines A et a forme un écran partiel qui détruit l'équilibre et fait reparaître le bruit.

Soient L, R, I pour le circuit inducteur; l, r, i pour le circuit induit; λ, ρ, γ pour le conducteur, ou plus exactement pour un anneau qui lui serait équivalent, le coefficient de self-induction, la résistance et l'intensité du courant à l'époque

(1) Chrystal, *Ph. Tr. R. S. E.*, t. XXIX, p. 609; 1880.
(2) Hughes, *Phil. Mag.* [5], t. II, p. 50; 1879.

quelconque t; M et m les coefficients d'induction mutuelle du conducteur vis-à-vis des bobines A et a. En tenant compte de l'équilibre primitif, les équations des courants sont

$$(12)\quad \begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + M\dfrac{d\gamma}{dt} + RI = E, \\ l\dfrac{di}{dt} + m\dfrac{d\gamma}{dt} + ri = 0, \\ \lambda\dfrac{d\gamma}{dt} + M\dfrac{dI}{dt} + m\dfrac{di}{dt} + \rho\gamma = 0. \end{cases}$$

Si on diminue alors d'une quantité M_0, le coefficient d'in-

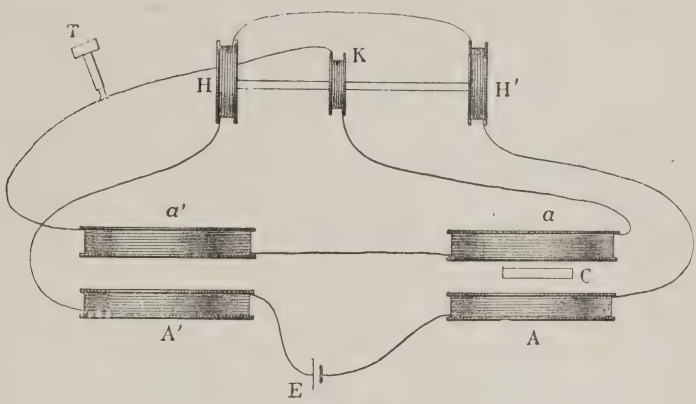


Fig. 199.

duction mutuelle des bobines A' et a', par exemple en les éloignant, les deux premières équations deviennent

$$L\frac{dI}{dt} - M_0\frac{di}{dt} + M\frac{d\gamma}{dt} + RI = E,$$

$$l\frac{di}{dt} - M_0\frac{dI}{dt} + m\frac{d\gamma}{dt} + ri = 0.$$

Pour que le courant soit toujours nul dans le fil induit, il faut qu'on ait $M_0 dI = m d\gamma$; les variations simultanées étant proportionnelles, les deux courants doivent avoir la même période et la même phase. Cette condition n'est pas réalisable en général et, sans éteindre le son dans le téléphone, on ne peut obtenir ainsi qu'un minimum de bruit.

Au lieu de modifier la position relative des bobines principales, ce qui donnerait lieu à des changements trop brusques, M. Hughes a trouvé plus commode d'avoir recours à un appareil auxiliaire qu'il appelle *sonomètre*.

Cet appareil se compose de deux bobines identiques H et H′, fixées aux extrémités d'une règle horizontale, entre lesquelles peut se déplacer parallèlement à elle-même une bobine K; les premières sont intercalées dans le circuit inducteur et la bobine mobile dans le circuit induit. Les inductions des bobines H et H′ sur K étant de signes contraires, l'effet est nul quand celle-ci occupe exactement le milieu de la règle; l'induction augmente sur l'un ou l'autre des deux systèmes suivant qu'on déplace la bobine K à droite ou à gauche. La position qui dans chaque cas ramène le silence fournit une mesure arbitraire de l'effet produit par le conducteur.

Une autre méthode de mesure consiste à modifier seulement la balance par l'introduction d'un conducteur entre les bobines A′ et a'. M. Hughes y fait glisser une lame de zinc taillée en forme de coin très aigu; une division permet d'évaluer l'épaisseur de la lame qui rétablit le silence et équilibre l'effet produit par le conducteur C.

On peut encore introduire dans le système A′a' un petit disque ou un anneau de cuivre, mobile autour d'un axe horizontal. L'action est nulle quand le plan du disque est normal à celui des bobines et maximum pour la position parallèle.

On conçoit que cette disposition puisse compenser mieux que le sonomètre l'action d'une plaque métallique, parce qu'elle donne lieu à un phénomène de même nature. En désignant par des lettres accentuées les quantités relatives au nouveau conducteur C′, les équations (12) doivent être remplacées par les suivantes :

$$L\frac{dI}{dt} + M\frac{d\gamma}{dt} + M'\frac{d\gamma'}{dt} + RI = E,$$

$$l\frac{di}{dt} + m\frac{d\gamma}{dt} - m'\frac{d\gamma'}{dt} + ri = 0,$$

$$\lambda\frac{d\gamma}{dt} + M\frac{dI}{dt} + m\frac{di}{dt} + \rho\gamma = 0,$$

$$\lambda'\frac{d\gamma'}{dt} + M'\frac{dI}{dt} - m'\frac{di}{dt} + \rho'\gamma' = 0.$$

Pour que le téléphone reste absolument silencieux, il faut qu'on ait $m\,d\gamma = m'\,d\gamma'$ et, par suite, pour des courants alternatifs, $m\gamma = m'\gamma'$. Les dernières équations donnent alors

$$\left(M'\lambda - M\lambda'\,\frac{m}{m'}\right)\frac{d\gamma}{dt} + \left(M'\rho - M\rho'\,\frac{m}{m'}\right)\gamma = 0.$$

Comme cette relation doit être satisfaite à toute époque, il en résulte

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{Mm}{M'm'}.$$

La balance d'induction associée au téléphone est un appareil d'une sensibilité extrême. Elle met en évidence les plus petites différences entre le poids, la nature, le degré de pureté ou la température de deux conducteurs de mêmes dimensions, telles que deux pièces de monnaie, placées dans des conditions identiques par rapport aux deux systèmes de bobines.

Elle permet de déceler dans un corps mauvais conducteur la présence de masses métalliques très petites [1] et peut être employée avec beaucoup d'avantages pour vérifier l'isolation des différentes spires d'une bobine, dont on laisse les extrémités ouvertes [2], etc. C'est donc un instrument très précieux pour les recherches qualitatives, mais qui se prête moins bien aux mesures : on n'obtient pas, en général, l'extinction complète du bruit et, quelles que soient les corrections, il est difficile d'interpréter l'expérience d'une manière rigoureuse.

RÉSULTATS GÉNÉRAUX.

688. Métaux et alliages. — D'après la valeur adoptée pour l'ohm international (**421**), la conductivité du *mercure* est égale à $1{,}063 \,.\, 10^{-5}$. Pour l'*argent* et le *cuivre* recuits, qui sont les meilleurs conducteurs de l'électricité, on aurait respectivement $67{,}23 \,.\, 10^{-5}$ et $63{,}32 \,.\, 10^{-5}$, mais les moindres traces d'impuretés ou d'oxydes en dissolution dans le métal suffisent pour augmenter beaucoup leur résistance.

[1] Graham Bell, *American Journ. of sciences.* Août 1882.
[2] Lord Rayleigh and Mrs Sidgwich, *Ph. Tr. R. S. L.*, p. 411; 1884.

La résistance des métaux augmente avec la température et peut être représentée par

$$(1) \qquad R = R_0(1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \ldots).$$

Le coefficient principal α est compris entre 0,0035 et 0,0040 pour les métaux purs à l'état solide; il est donc très voisin du coefficient de dilatation des gaz, de sorte que la résistance d'un métal serait proportionnelle à la température absolue.

Cette coïncidence remarquable a, sans doute, une raison théorique qu'il serait important de mettre en évidence; nous avons signalé déjà (**389**, 2°) comment la considération des machines électrodynamiques pourrait y conduire.

Le coefficient β est de l'ordre de 10^{-6} et peut être négligé au-dessous de 100°; le suivant γ serait de l'ordre de 10^{-9}.

D'après sir William Siemens [1], les formules paraboliques ne suffisent plus quand on dépasse beaucoup 100°; en fonction de la température absolue T et de la résistance R_0 à 0° centigrade, les résistances du *platine*, du *fer* et du *cuivre* se représenteraient par une expression de la forme

$$(2) \qquad R = R_0(\alpha\sqrt{T} + \beta T - 1).$$

La formule (1) réduite à deux termes parait encore suffisante entre les températures de 100° et de — 123°. MM. Cailletet et Bouty [2] ont ainsi trouvé que pour le *mercure*, dont le coefficient de variation entre — 35° et 20° est voisin de 0,000884, la conductivité devient 4,08 fois plus grande par solidification vers — 40° et que le coefficient reprend la valeur 0,00407 voisine de celle des autres métaux.

MM. Dewar et Fleming [3] ont étendu leurs mesures entre 100° et — 197° (ébullition de l'oxygène dans le vide). La traduction graphique des résultats, en prenant les résistances pour ordonnées et les températures comme abscisses, semble indiquer que la résistance tend à devenir nulle pour la température du zéro absolu. Ces courbes sont sensiblement rectilignes pour l'*aluminium* et presque tous les alliages; elles sont

(1) C.-W. Siemens, *J. of telg. eng.*, t. I, p. 123; 1872 et t. III, p. 296; 1874.
(2) Cailletet et Bouty, *C. R. de l'Acad. des Sc.* t. C, p. 1188; 1885.
(3) Dewar et Flemming, *Ph. Mag.* [5], t. XXXIV, p. 326; 1892 et t. XXXVI, p. 271; 1893. — *Proc. of the R. S. L.*, t. LX, p. 76; 1896.

légèrement concaves vers les ordonnées pour le *fer*, le *nickel* et le *cuivre*, convexes pour le *platine*, l'*or*, le *palladium* et l'*argent*. Le changement des propriétés du *mercure* ne se fait pas d'une manière brusque au moment de la solidification. De — 36 à — 42°, la résistivité apparente dans le verre passe de 89600 à 30770, devenant 2,912 fois moindre.

Tous les métaux présentent des modifications analogues par le changement d'état. M. Vassura (1) a trouvé ainsi qu'à la température de solidification le rapport des résistances à l'état liquide et à l'état solide est, pour les métaux suivants,

Étain.	Bismuth.	Thallium.	Cadmium.	Plomb.
2,20	0,45	2	1,97	2,93

D'après M. Kohlrausch (2), la résistance du *fer* croît d'abord lentement avec la température, puis d'une manière plus rapide que pour les autres métaux, jusqu'au point où ses propriétés magnétiques disparaissent; la courbe des résistances s'infléchit alors et la variation redevient lente, comme au début. Il en serait de même pour la *fonte* et le *fer électrolytique*.

Ces résultats ont été précisés par M. Le Chatelier (3). La modification du *fer*, qui se produit à 850°, est indépendante des proportions de carbone, silicium, etc., qu'il peut contenir. Le point critique du *nickel* est à 340°. Pour l'*acier*, les coudes de la courbe figurative de la résistance traduisent le point de récalescence (730°), c'est-à-dire de transformation du carbure de fer, et le point critique (850°) du fer.

La résistivité des *alliages* est quelquefois voisine de celle qu'on pourrait déduire de leur composition; tels sont les alliages dans lesquels entrent seulement certains métaux, le *plomb*, l'*étain*, le *zinc*, le *cadmium*. Généralement elle est beaucoup plus grande et même supérieure à celle de chacun des métaux qui les constituent; ce dernier cas se présente pour les alliages de l'*argent* et du *cuivre* entre eux ou avec l'*or*, le *platine*, le *nickel*, etc.

La propriété particulière des alliages est qu'ils sont beaucoup moins sensibles aux variations de température. Ainsi,

(1) G. Vassura, *Nuovo Cim.* t. XXXI, p. 25; 1892.
(2) F. Kohlrausch, *Wied. Ann.*, t. XXXIII, p. 42; 1888.
(3) H. Le Chatelier, *Journ. de Phys.* [2], t. X, p. 369; 1891.

les valeurs du coefficient α sont comprises entre 0,000 27 et 0,000 44 pour les *maillechorts*, entre 0,000 22 et 0,000 31 pour les alliages de *platine-argent*.

Il arrive même que la résistance diminue quand la température augmente [1]. Des alliages de nickel, zinc et cuivre, connus sous le nom de *platinoïde*, ont présenté des coefficients de — 0,000 051 à — 0,000 022 : un échantillon de maillechort a donné — 0,000 035. Il en est de même pour les alliages de *ferro-manganèse* ou de *manganèse nickelé* avec le *cuivre*. Toutefois, ces alliages ne paraissent pas avoir de stabilité. Si on les chauffe à 100° et qu'on les ramène à la température ordinaire en répétant plusieurs fois l'opération, le coefficient de variation finit par s'annuler et redevenir positif.

Les courbes de résistance présentent encore des coudes plus marqués que pour les métaux. L'*acier au manganèse* aurait un point critique vers — 40° et un autre vers 700°.

Les alliages de *fer* et de *nickel* n'ont qu'un point critique, intermédiaire à ceux des deux métaux, ce qui semble indiquer une véritable combinaison au-delà de cette température.

Le *ferro-nickel* n'est pas magnétique, dans son état normal, et ne paraît subir aucune transformation moléculaire. Après avoir été traité par l'hydrogène humide, qui peut oxyder le carbone et le silicium, il devient magnétique avec un point de transformation à 550°. Au refroidissement, la transformation inverse se produit entre 0° et 100°.

Les alliages du *cuivre* avec le *nickel* ou avec le *zinc* subissent, dans un intervalle de 100° environ, un changement progressif accusé par un point d'inflexion compris entre un maximum et un minimum.

689. Conductibilités électrique et thermique. — Forbes [2] a remarqué le premier que l'ordre des métaux est le même pour les conductibilités calorifique ou électrique. MM. Wiedemann et Franz [3], allant plus loin, ont constaté que les deux espèces de propriétés sont sensiblement proportionnelles, ce qui exige que les variations avec la température suivent les mêmes lois dans les deux cas.

(1) Bottomley, *Elektrotechn. Zeitschrift*, t. VI, p. 442; 1888. — E. Nichols, *Amer. Journ. of Sc.*, t. XXXIX, p. 431; 1890.

(2) Forbes, *Ph. Mag.*, t. IV, p. 15; 1834. — *Ph. tr.*, *R. S. E.*, t. XXIII, p. 132; 1860.

(3) Wiedemann et Franz, *Pogg. Ann.*, t. LXXXIX, p. 530; 1853.

Cette relation semble résulter de diverses expériences [1], faites par la méthode des températures variables, en vue de déterminer, non seulement les rapports des conductivités thermiques des différents corps, mais leurs valeurs absolues. Toutefois les nombres obtenus présentent quelque incertitude; ils sont d'ailleurs insuffisants, car on a supposé dans les calculs que les deux conductivités thermiques, intérieure et extérieure, sont indépendantes de la température.

M. Tait [2] considère les deux coefficients comme des fonctions linéaires de la température. La méthode qu'il emploie exige deux expériences, l'une statique, consistant à déterminer la distribution des températures stationnaires dans une barre chauffée à l'une de ses extrémités; l'autre dynamique, dans laquelle on étudie le refroidissement d'un morceau très court de la même barre. Cette seconde expérience donne la quantité de chaleur perdue par la surface à chaque température; on peut alors déduire de la première la conductivité intérieure et sa variation avec la température. Les expériences de M. Tait ont porté sur le fer, le cuivre pur et le cuivre ordinaire, le plomb et le maillechort. Il en résulte que le sens des variations est le même dans les deux cas, mais que ces variations sont loin d'être proportionnelles.

Les propriétés physiques des métaux sont tellement variables que la question ne peut être résolue qu'en étudiant les deux phénomènes sur le même échantillon.

M. F. Weber [3] prend le métal à étudier sous la forme d'un tore de révolution. Pour déterminer la conductivité thermique, il chauffe l'une des sections jusqu'à ce que la distribution des températures soit devenue stationnaire; puis il étudie le refroidissement, en observant les températures successives en deux points situés l'un à 45°, l'autre à 225° de la section primitivement chauffée. Si les dimensions de l'anneau sont convenablement choisies, la température peut être considérée sans erreur sensible comme constante dans toute une section, et la propagation comme s'effectuant parallèlement

(1) Angström *Pogg. Ann.*, t. CXIV, p. 513; 1861 et t. CXVIII, p. 423; 1863. — Neumann, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. LXVI, p. 185; 1863. — Lenz, *Bull. de l'Acad. de Saint-Pétersb.*, t. XV, p. 54; 1870.

(2) Tait, *Phil. Trans. L. R. S.*, t. XXVIII, p. 717; 1877.

(3) F. Weber, *Bibl. univ. de Genève*, [3] t. IV, p. 107; 1880.

à la circonférence moyenne de l'anneau. On admet d'ailleurs que les deux conductivités, ainsi que la chaleur spécifique, sont des fonctions linéaires de la température. Les excès de température t_1 et t_2 à un instant donné, aux deux points considérés, suffisent pour déterminer ces deux coefficients.

Quant à la conductivité électrique, elle était déterminée par la méthode de l'amortissement en plaçant l'anneau verticalement dans le méridien magnétique et faisant osciller au centre une petite aiguille aimantée. La résistance R de l'anneau se déduit de la formule (20) du n° **621**, dans laquelle on peut supprimer le terme en L, qui est absolument négligeable.

On supposera que les courants induits sont distribués d'une manière uniforme dans la section de l'anneau et parallèles à la circonférence moyenne, ce qui peut et doit même s'éloigner sensiblement de la réalité; en désignant alors par a le rayon de la section et par b celui de la circonférence moyenne, la conductivité c a pour expression

$$c = \frac{2b}{a^2 \mathrm{R}}.$$

Les expériences de M. Weber ne sont pas favorables à l'existence d'une relation simple entre les deux ordres de phénomènes; mais il en résulterait que le rapport de la conductivité calorifique k à la conductivité électrique c est une fonction linéaire de la chaleur spécifique γ de l'unité de volume du métal, de sorte qu'on pourrait poser, en désignant par α et β deux constantes,

$$\frac{k}{c} = \alpha + \beta\gamma.$$

Cette relation, d'après la remarque de M. Weber, permettrait d'expliquer pourquoi les expériences antérieures semblent vérifier la proportionnalité des deux conductivités, les métaux employés, tels que le cuivre, le fer, le laiton et le maillechort, ayant sensiblement la même chaleur spécifique γ.

MM. Kirchhoff et Hansemann [1] ont adopté, pour la mesure des conductivités thermiques, une méthode dans laquelle la

[1] G. Kirchhoff et Hansemann, *Wied., Ann.*, t. IX, p. 1; 1880 et t. XIII, p. 406; 1881. — Kirchhoff, *Berl. Berichte;* 1880, p. 620.

conductibilité extérieure n'intervient que par un terme de correction d'une faible importance. Ils considèrent un milieu indéfini terminé par un plan. La température étant supposée uniforme dans toute l'étendue du milieu, on porte à un instant donné la surface entière du plan à une température différente qu'on maintient ensuite constante, et on observe la marche des températures intérieures. Si U est l'excès de la température du plan sur la température initiale et u l'excès à l'époque t en un point situé à une distance r, on a

$$u = \mathrm{U}\frac{r}{2}\sqrt{\frac{k}{\gamma t}}.$$

L'expérience était faite sur un cube de 15 centimètres de côté dont la face antérieure était encastrée dans une lame de zinc; la température étant uniforme et égale à celle du milieu extérieur, on lançait normalement sur la face un jet d'eau à température fixe, supérieure ou inférieure de quelques degrés seulement à la température ambiante, et qui l'inondait pendant la durée, d'ailleurs très courte, de l'expérience. Des sondes thermoélectriques donnaient la variation de la température à diverses distances du plan.

Pour obtenir la conductivité électrique, on débitait ensuite le cube en prismes à base carrée de 5 millimètres de côté et d'une longueur égale à l'arête du cube, et on opérait par la méthode du galvanomètre différentiel (671). Malheureusement les prismes provenant d'un même cube ont présenté des différences allant jusqu'à 10 et même parfois 25 pour cent, ce qui enlève beaucoup de leur netteté aux conclusions qu'on peut tirer des expériences.

Celles-ci tendent à montrer que le rapport des conductivités est sensiblement constant pour les métaux essayés, c'est-à-dire le plomb, l'étain, le zinc et le cuivre, sauf pour le fer. Par contre, elles ne confirment point la loi trouvée par M. Weber.

Lorenz [1] a étudié les deux phénomènes sur des barres étroites ayant 30 centimètres de long et $1^{c},5$ de diamètre.

Supposons la barre divisée en n segments égaux de longueur l, et soient u_0, u_1 .... u_n les excès de température aux

[1] Lorenz, *Wied. Ann.*, t. XIII, p. 422 et 582; 1881.

points de division 0, 1, 2, ... n. Si s est la section, la quantité de chaleur qui traverse, pendant l'unité de temps, la section A prise à égale distance entre les points 0 et 1 est $ks\frac{u_0 - u_1}{l}$; celle qui traverse une autre section B, à égale distance des points $n-1$ et n, est aussi proportionnelle, par les mêmes facteurs, à $u_{n-1} - u_n$. La différence

$$\frac{ks}{l}(u_0 - u_1 - u_{n-1} + u_n) = \frac{ks}{l}\delta$$

représente la quantité de chaleur reçue par la région AB de la barre; une partie est employée à l'échauffer et l'autre est perdue par la surface extérieure.

En appelant γ la chaleur spécifique de l'unité de volume, la chaleur absorbée par un segment, dont le milieu se trouve à la division p, est $\gamma sl\frac{du_p}{dt}$; la quantité totale de chaleur absorbée sur la longueur AB est donc, en appelant θ la température moyenne de la barre,

$$\gamma sl\left(\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{du_{n-1}}{dt}\right) = (n-1)\gamma sl\frac{d\theta}{dt}.$$

Lorenz admet que la chaleur perdue par le rayonnement de la surface est une fonction $f(\theta)$ de la température moyenne, de sorte qu'on peut écrire

$$\frac{ks}{l}\delta = (n-1)\gamma sl\frac{d\theta}{dt} + f(\theta).$$

Dès qu'on arrête l'échauffement, la différence δ tombe rapidement à une valeur δ', pour la température moyenne θ'.

Si l'on fait en sorte que les valeurs de θ et θ' soient les mêmes dans les deux cas, il en résulte

$$k(\delta - \delta') = (n-1)\gamma l^2\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta'}{dt}\right).$$

On aura ainsi la valeur de k par les données de l'expérience. La formule est d'autant plus approchée que les segments sont

plus courts, mais l'erreur reste négligeable quand, pour des barres de bons conducteurs de $1^{c},5$ de diamètre, la longueur l ne dépasse pas 2 centimètres.

Cette méthode était mise en œuvre d'une manière très simple. La barre était percée de 9 trous très fins de $0^{mm},4$ de diamètre destinés à recevoir les sondes thermoélectriques, et numérotés 0, 1, 2... 8. Deux couples ayant leurs soudures, l'un en 0 et 1, l'autre en 7 et 8, sont réunis en sens contraires dans un même circuit; le courant différentiel donne directement la valeur de δ. Sept autres couples associés en série ont leurs soudures impaires dans les trous 1, 2, 3... 7, les soudures paires étant à une même température; le courant observé est proportionnel à θ.

Les conductibilités électriques étaient déterminées sur les mêmes barres aux températures de 0 et de 100°.

Les résultats ainsi obtenus confirment la loi de Wiedemann et Franz et mettent en évidence cette autre relation que le rapport $\frac{k_{100}}{c_{100}} : \frac{k_0}{c_0}$ est sensiblement constant et égal à 1,367. On aurait donc, d'une manière générale, en désignant par T la température absolue et par C une constante,

$$\frac{k}{c} = CT.$$

Dans le cas des métaux très conducteurs, le coefficient k varie très peu avec la température; la formule exprime alors simplement le résultat connu que la résistance des métaux purs est proportionnelle à la température absolue. Il est remarquable que la loi se maintienne pour des alliages tels que le laiton et le maillechort; le coefficient de variation de la conductibilité électrique est alors moindre, mais celui de la conductibilité calorifique beaucoup plus grand que pour les métaux purs : il y a exactement compensation.

La loi de proportionnalité ne s'applique pas aux alliages de grande résistance. MM. Van Aubel et Paillot [1] ont étudié ainsi divers alliages en mesurant leurs résistances par le pont double et les conductibilités thermiques par la méthode de

[1] Van Aubel et Paillot, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 522; 1895.

W. Wiedemann et Franz. En rapportant toutes les valeurs à celle du cadmium, ils ont ainsi obtenu :

	Conductibilité électrique à 0°.	Conductibilité électrique à 15°.	Conductibilité thermique.
Cadmium	1	1	1
Étain	0,65	0,644	0,711
Bronze d'aluminium	0,603	0,630	0,807
Constantan	0,139	0,148	0,300
Ferro-nickel	0,082	0,086	0,193

690. Applications thermométriques. — La comparaison des résistances est si précise qu'on l'a utilisée depuis longtemps comme méthode thermométrique [1].

Le coefficient de variation des métaux est voisin de $\alpha = 0,004$; pour un changement très petit ∂t de température, la variation relative de résistance est

$$\frac{\partial R}{R} = \alpha \partial t, \qquad \partial t = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial R}{R} = 250\,\frac{\partial R}{R}.$$

Si la résistance R est de 2,5 ohms, par exemple, et qu'on la mesure avec une approximation de $1^{\omega}.10^{-6}$, ce qui est assez facile, il en résulte

$$\partial t = 250^{\circ}\,\frac{10^{-6}}{2,5} = \frac{1^{\circ}}{10000}.$$

Ce sont à peu près les conditions du *bolomètre* employé par M. Langley [2], dans une série de travaux remarquables sur les radiations calorifiques. L'appareil se compose d'une bande de *fer* ou de *platine*, ayant de 1^{mm} à $0^{mm},5$ de largeur, $0^{mm},01$ à $0^{mm},04$ d'épaisseur, et 15^{c} environ de longueur, repliée plusieurs fois sur elle-même en ligne sinueuse, de manière à occuper un petit rectangle ; la résistance est de l'ordre de 5 ohms. Deux appareils semblables sont installés sur deux branches du pont de Wheatstone.

M. Weber [3] fait agir la chaleur rayonnante sur une masse

(1) Schwanberg, *Pogg. Ann.* t. LXXIV, p. 411 ; 1851.
(2) S. P. Langley, *Amer. Journ.*, t. XXI, p. 187 ; 1881.
(3) H. F. Weber, *Arch. de Genève*, [3], t. XVIII, p. 213 ; 1887.

d'air, dont la dilatation déforme un liquide, et détermine les variations correspondantes de résistance du liquide.

Dans leurs études sur les oscillations électriques, MM. Rubens et Ritter [1] se sont servis également d'un bolomètre en communication avec le résonateur et qui s'échauffait par le passage des courants; la sensibilité aurait été 3 ou 4 fois plus grande que pour l'appareil de M. Langley.

On peut ainsi [2] réaliser un véritable thermomètre, qui reste identique à lui-même et qui soit applicable entre des limites de température très écartées. Le *platine* pur est le métal qui convient le mieux pour cet usage.

En fonction du thermomètre à air, la résistance est donnée par une expression de la forme

$$R = R_0(1 + \alpha t - \beta t^2).$$

Entre les températures de 0° et de 100°, le coefficient moyen est $\alpha_1 = \alpha - 100\beta$. Si l'on pose, en général,

$$R = R_0(1 + \alpha_1 \theta), \qquad \theta = \frac{R - R_0}{R_0 \alpha_1} = \frac{R - R_0}{R_{100} - R_0}\,100,$$

la quantité θ désignant une valeur particulière de la température, déduite de la résistance même du platine, on a

$$\alpha_1 \theta = \alpha t - \beta t^2 = \alpha t - \frac{\alpha - \alpha_1}{100} t^2, \qquad \alpha_1 (t - \theta) = (\alpha - \alpha_1)\left(\frac{t^2}{100} - t\right).$$

En posant $\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{\delta}{100}$, on peut écrire

$$(3) \qquad t - \theta = \delta\left(\frac{t^2}{100^2} - \frac{t}{100}\right).$$

Jusqu'à 600°, l'erreur de cette formule n'atteint pas 1° et les valeurs de θ sont données par les résistances à moins de 0°,1. On déterminera d'ailleurs, pour chaque fil, le coefficient δ par les températures d'ébullition de quelques liquides, tels que l'*aniline* (184°,13), le *mercure* (356°,75) et le *soufre* (444°,53).

(1) Rubens et Ritter, *Wied. Ann.*, t. XL, p. 55; 1890.

(2) H. L. Callendar, *Phil. Trans.*, *L. R. S.*; 1887, p. 161. — E. H. Griffiths, *Ibid.*; 1891, p. 43. — Griffiths et Callendar, *ibid*, p. 119. — Griffiths et Clark, *Ph. Mag.* [5], t. XXXIV, p. 505; 1892.

La formule convient également aux basses températures. Si l'on admet que la résistance R s'annule au zéro absolu, on en déduit pour θ des valeurs qui varient, suivant les fils, de $-287^\circ,03$ à $-295^\circ,81$ et donnent, comme moyenne, $t = -273^\circ,86$.

Le coefficient δ est compris entre 1,46 et 1,65; au voisinage de 50°, la différence $\theta - t$ serait donc d'environ 0°,35. La différence $t - \theta$ s'élèverait à 45° pour la température de 600° et à 15° au voisinage de zéro absolu.

Pour construire le thermomètre, on enroule sur un tube de verre un fil de platine convenablement isolé, dont la résistance est de l'ordre de 5 ohms, et on le plonge dans le milieu dont on veut connaître la température; un appareil semblable est placé dans la glace fondante et le rapport des résistances est déterminé par le pont de Wheatstone. MM. Dewar et Fleming, en particulier (**688**), ont fait usage de cette méthode.

691. Dissolutions. — On obtient les nombres les plus variables pour la résistance de l'*eau*, quelque soin qu'on ait mis à la purifier. Les moindres traces de matières étrangères en dissolution, même gazeuses, en augmentent très rapidement la conductibilité; on doit admettre que les résistances les plus grandes correspondent à l'eau la plus pure et on n'est jamais assuré d'en trouver la valeur maximum.

La conductivité [1] parait inférieure à $0,7.10^{-15}$ pour de l'eau distillée à l'air avec les plus grandes précautions et à $0,0424.10^{-15}$ après distillation dans le vide. Si on chauffe cette eau vers 50°, la conductivité augmente beaucoup, jusqu'à $0,13.10^{-15}$. Par refroidissement, elle ne reprend pas tout à fait ses propriétés primitives, mais l'écart est très faible.

Le passage d'un courant produit le même effet que le contact de l'air, sans doute à cause des gaz dissous provenant des électrodes.

La résistance de la glace est beaucoup plus grande. Un même échantillon [2], dont la résistance à l'état liquide était de $3,231.10^5$ ohms, avait à l'état solide une résistance de $3,987.10^{10}$ à 0° et de $4,380.10^{10}$ à -15°.

Pour déterminer l'influence des matières en dissolution, surtout quand la solution est très étendue, il faut se servir

[1] Kohlrausch et Heydweiller, *Wied. Ann.*, t. LIII, p. 209; 1894.
[2] Foussereau, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. V, p. 317; 1885.

d'eau très pure, car on ne peut admettre dans tous les cas que la conductance du liquide soit la somme des conductances de l'eau employée et du corps dissous.

La conductance d'une solution varie avec sa richesse et l'on doit considérer comme à peu près évident qu'elle est d'abord proportionnelle à la quantité du corps dissous par unité de volume. On peut appeler *conductivité moléculaire* du corps dissous le quotient de la conductivité d'une solution par le nombre m d'équivalents en grammes qu'elle renferme par litre; la *résistivité moléculaire* est l'inverse de cette grandeur, c'est-à-dire le produit de la résistivité du liquide par le nombre d'équivalents.

L'étude des dissolutions a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, parmi lesquels nous citerons en particulier ceux de M. Kohlrausch (1) et de M. Bouty (2).

La proportionnalité de la conductance des solutions très diluées à leur richesse avait été déjà constatée par M. Lenz (3) pour les sels alcalins étendus jusqu'à 0,01 d'équivalent. Toutefois, M. Lenz fut ainsi amené à conclure que l'influence de l'anion ou de l'élément acide s'efface de plus en plus, à mesure que la dilution augmente, et qu'alors celle du cation subsiste seule. Ainsi, la valeur limite de la conductivité moléculaire serait la même pour tous les sels de potasse et aussi pour tous les sels de soude, mais avec des valeurs particulières à ces deux catégories de sels.

A mesure que la richesse augmente, la conductance du liquide est presque toujours croissante, sauf des cas exceptionnels qui présentent des maxima. Pour les dissolutions salines, la résistivité moléculaire à température constante peut se représenter, d'après M. Kohlrausch, par l'expression

$$r = a\left(1 + A m^{\frac{1}{3}}\right).$$

Il en résulte que l'*excès de la résistivité moléculaire r sur sa valeur limite a est proportionnelle à la racine cubique de*

(1) Voir pour l'historique, R. Kohlrausch, *Wied. Ann.*, t. XXVI, p. 161; 1885.

(2) Bouty, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. III, p. 433; 1884. — *Journal de Physique*, [2], t. III, p. 325; 1884 et t. VI, p. 5; 1887.

(3) Lenz, *Mém. de l'Acad. de St.-Pétersbourg* [7], t. XXVI, n° 3, p. 1; 1878.

la quantité m, ou en raison inverse de la distance moyenne des molécules dans la solution.

Cette formule paraît se vérifier avec toute l'exactitude que comporte la précision relative des expériences.

Toutefois, la constante a n'avait pas la même valeur pour les différents sels, sans doute parce que les dissolutions n'étaient pas assez diluées. Les expériences de M. Bouty, étendues jusqu'à des valeurs de m égales à $\frac{1}{4000}$, montreraient, au contraire, que cette constante est sensiblement la même pour un grand nombre de sels neutres, dits *normaux*. En d'autres termes, *les valeurs limites de la conductivité et de la résistivité moléculaires sont les mêmes pour tous les sels normaux.*

La plupart des sels anhydres et quelques sels hydratés satisfont, en effet, à cette loi d'une manière satisfaisante. Certains écarts peuvent être attribués à l'insuffisance de la dilution, ou à la formation d'hydrates de constitution inconnue, ou encore aux conditions de l'électrolyse.

Avant d'examiner ce dernier point, on remarquera d'abord qu'une loi d'équivalents ne peut être considérée comme ayant un caractère scientifique que si elle subsiste à toute température. M. Kohlrausch avait trouvé déjà que la conductance d'une solution saline est proportionnelle au binome $1+\alpha t$, et que le coefficient α a la même valeur pour tous les sels. D'après M. Bouty, cette règle n'est pas générale : le coefficient α est bien constant pour chaque solution, mais il augmente avec la dilution et tend vers une limite voisine de 0,0333, qui serait commune à tous les sels.

Dans le cas du *chlorure de potassium*, par exemple, la valeur de α croît depuis 0,023 jusqu'à 0,0333, quand le nombre m d'équivalents par litre varie de 3 à 0,01 ; elle reste ensuite constante. Pour la solution normale d'un équivalent de sel par litre à la température de zéro, la résistivité serait égale à 15,37 ohms, avec $\alpha = 0{,}0291$.

Tant que la valeur de m reste inférieure à $\frac{1}{10}$, le rapport de la résistivité moléculaire à celle de la solution normale à zéro peut être très sensiblement représenté par

$$r = 0{,}8\,\frac{1+0{,}2976\,m^{\frac{1}{3}}}{1+0{,}0333\,t}.$$

692. Transport des ions dans l'électrolyse. — Le passage du courant dans une solution saline est toujours accompagné d'électrolyse. Si l'on fait usage d'électrodes inaltérables, en platine par exemple, séparées par une distance convenable, on peut isoler les corps formés autour de chacune d'elles. Les dégagements de gaz sont toujours accompagnés de quantités correspondantes de base ou de métal à la cathode et d'acide à l'anode, mais le phénomène se présente avec deux caractères très différents.

Pour certains sels, comme le *sulfate de potasse*, les ions cheminent également dans les deux sens : quand un équivalent de sel est décomposé, la solution s'appauvrit de la moitié d'un équivalent à chaque électrode ; l'électrolyse est *normale*.

Avec le *nitrate de soude*, au contraire, la perte à l'anode n'est que 0,386 d'équivalent du sel, la partie complémentaire 0,614 faisant défaut à la cathode. Hittorf [1], qui a étudié ces particularités avec soin, appelle *nombres de transport* les fractions n et $1 - n$ du nombre total d'équivalents décomposés qui manquent respectivement à la cathode et à l'anode.

Le quotient p de la moindre résistivité moléculaire d'un sel par la valeur limite relative au chlorure de potassium doit être égal à l'unité si la loi des conductivités moléculaires est applicable ; c'est ce qui a lieu pour un certain nombre de sels anhydres dont l'électrolyse paraît normale. Les écarts sont plus grands pour d'autres sels, surtout quand ils forment des combinaisons avec l'eau, et pour la plupart des sels hydratés. En même temps, les nombres de transport sont inégaux de part et d'autre ; ils varient avec la richesse et ne tendent pas vers la limite 0,5 à mesure que la dilution augmente.

Dans les expériences de M. Bouty, la loi se vérifie à quelques centièmes près pour les sels de *potassium* (le fluorure excepté) et d'*ammoniaque*, le *sulfate* et l'*azotate d'argent*, l'*iodure de zinc*, l'*azotate de plomb* et le *sulfate de thallium*.

Le tableau suivant renferme les cas irréguliers. La valeur de p est déterminée par l'équivalent du sel, ou son poids moléculaire pour un atome du métal. Le chiffre placé à côté des sels hydratés indique le nombre de molécules d'eau ($H^2O = 16$).

[1] Hittorf, *Pogg. Ann.*, *passim*; 1853 à 1859.

SELS ANHYDRES.

Sel.	Équivalent.	p.	n.
Fluorure de potassium	58	1,21	»
Chlorure de sodium	58,5	1,37	0,617
Azotate de soude	85	1,26	0,614
Chlorate »	106,5	1,33	»
Chlorure de lithium	42,5	1,45	0,674
» calcium	55	1,18	0,683
Sulfate de chaux	68	1,47	»
Iodure de calcium	147	1,30	0,732
Azotate de baryte	131	1,41	0,602
Chlorate »	152,5	1,18	»

SELS HYDRATÉS.

Iodure de sodium	1	168	1,28	0,626
Chlorure de strontium	3	133,25	1,16	0,651
» baryum	1	122	0,95	0,614
» magnésium	3	101,5	1,10	0,678
» manganèse	2	99	1,18	0,682
Carbonate de soude	5	143	1,21	»
Azotate de chaux	2	118	1,31	0,613
» magnésie	3	128	1,16	»
» zinc	3	149	1,17	»
» cadmium	2	155	1,22	»
» cuivre	3	147,75	1,14	»
Hyposulfite de baryte	2	185	1,00	»
Sulfate de soude	5	161	1,19	0,634
» lithine	0,5	64	1,35	0,595
» magnésie	3,5	123	1,25	0,656
» fer	3,5	139	1,34	»
» zinc	3,5	144	1,22	0,636
» nickel	3,5	140,5	1,33	»
» cobalt	3,5	140,5	1,30	»
» cuivre	2,5	124,75	1,31	0,645

Cette loi des équivalents s'applique également avec une approximation de même ordre aux dissolutions de sels organiques, quand l'électrolyse est normale, et présente des exceptions analogues aux précédentes.

Les acides et les bases se comportent aux deux points de vue comme les sels anormaux. Ainsi la résistivité moléculaire de l'*acide sulfurique* en solution étendue peut se représenter par la formule

$$r = 3^{\omega},157 \frac{1+1,661\,m^{\frac{1}{3}}}{1+0,02108\,t}.$$

La mesure des résistances fournit ainsi une méthode précieuse pour déterminer la constitution des sels dans les solutions. En effet, la conductance d'un mélange de deux dissolutions salines de même concentration moléculaire peut être calculée au moyen des proportions si les sels sont normaux et sans action chimique réciproque ; il n'en est plus de même pour les sels anormaux et les mélanges d'acides.

Cette méthode a été appliquée, entre autres, par M. Bouty à l'étude des phosphates ou des réactions entre sels neutres, d'acides et de bases différentes, et par M. Foussereau [1] à la décomposition lente des chlorures dans l'eau.

Toutes les parties du liquide qui sont traversées par le courant interviennent dans l'électrolyse ; la manière la plus simple de concevoir le phénomène est d'admettre, suivant la théorie de Grotthus, que les ions cheminent dans les deux sens, non d'une manière continue, mais par un échange de proche en proche entre les molécules successives.

Supposons que l'électrolyte soit enfermé dans un tube cylindrique de section s. La composition du liquide restant homogène, sauf les petites variations qui ont lieu au voisinage des électrodes, le résultat final est le même que si chacun des ions parcourait le tube, sans combinaison nouvelle, avec une vitesse moyenne u.

Si le liquide renferme m molécules par litre, le nombre de molécules rapporté à l'unité de volume est $\mu = m.10^{-3}$; le nombre d'équivalents des deux espèces d'ions qui traversent la section s, pendant l'unité de temps, est alors $\mu s u$.

(1) Foussereau, *Ann. de chim. et de Phys.* [6], t. XI, p. 283 et t. XII, p. 393; 1887.

On peut admettre aussi que les ions emportent avec eux, de part et d'autre, la même quantité d'électricité $\pm q$ par équivalent, c'est-à-dire $I\mu s u q$, et l'intensité du courant est

$$I = 2\mu s u q.$$

D'autre part, si la solution est assez étendue, la résistivité ρ du liquide est égale au quotient de la résistivité moléculaire r par le nombre m. En appelant V_1 la différence de potentiel par unité de longueur, c'est-à-dire le champ électrique, il en résulte

$$I = \frac{V_1}{\rho} s = \frac{V_1}{r} m s = \frac{V_1}{r} \mu s . 10^3;$$

$$u = \frac{1}{2q} \cdot \frac{V_1}{r} \cdot 10^3.$$

Or, la résistivité moléculaire des solutions très étendues de chlorure de potassium est

$$r = 15^{\omega},37 \frac{0,8}{1+\alpha t} = \frac{12^{\omega},3}{1+\alpha t} = \frac{12,3}{1+\alpha t} 10^9 (\text{C. G. S.}).$$

On a vu enfin (**653**) que $q = 96,5 . 10^2$. Si la valeur de V_1 est d'un volt, ou 10^8, on a, au moins pour les sels normaux,

$$u = \frac{1+\alpha t}{2 . 96,5 . 10^2} \cdot \frac{10^8}{12,3 . 10^9} 10^3 = 4^c,21 . 10^{-4} (1+\alpha t).$$

La vitesse moyenne varie ainsi avec la température comme la conductivité; elle correspondrait à $1^c,51$ par heure pour la température de zéro.

693. Relation avec le frottement. — Il est naturel de comparer ce transport matériel des ions, au travers de la masse du dissolvant, au frottement intérieur des liquides.

Supposons qu'un liquide se meuve parallèlement à un plan fixe, la vitesse d'un point étant une fonction $f(r)$ de sa distance r au plan. Deux tranches infiniment voisines, situées aux distances r et $r + dr$, exercent l'une sur l'autre une action parallèle au mouvement, proportionnelle à leur vitesse relative et égale à $\eta f'(r)$ par unité de surface, η étant une constante qui dépend de la nature du liquide.

La constante η, qu'on appelle le coefficient de frottement intérieur, peut être déduite des expériences relatives à l'écoulement des liquides par les tubes capillaires. Il résulte, en effet, des expériences de Poiseuille [1] que, si on appelle D le diamètre du tube, L sa longueur et p la différence des pressions aux deux extrémités, la quantité Q de liquide qui s'écoule dans l'unité de temps a pour expression

$$Q = K \frac{pD^4}{L}.$$

Or, le facteur K, qui dépend de la nature du liquide, est en raison inverse de la constante η et varie avec la température comme le trinome $1 + at + bt^2$; cette quantité η peut donc être représentée par une expression de la forme

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2}.$$

Une autre méthode [2] consiste à déduire ce coefficient des expériences de Coulomb [3] pour déterminer la *cohérence* d'un fluide, en étudiant l'amortissement des oscillations d'un corps plongé dans le fluide. En appelant λ le décrément logarithmique des oscillations, R le rayon du disque oscillant, M le moment d'inertie du système et T_0 la période des oscillations dans le vide, M. Mayer arrive à la formule

$$\lambda \frac{M}{R^4} = \sqrt{\frac{5}{8}\pi^3 T_0 \eta}.$$

M. Grossmann [4], appliquant cette dernière formule convenablement corrigée aux expériences de Kohlrausch et Grotrian, en déduit que le produit de la conductivité électrique par le coefficient de frottement intérieur est, pour un même sel au même état de dissolution, indépendant de la température; *la résistivité électrique est donc proportionnelle au coefficient de frottement.*

(1) Poiseuille, *Mém. des Sav. Étrang.*, t. XI, p. 433. — *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. VII, p. 50; 1843.
(2) O. Mayer, *Pogg. Ann.*, t. CXIII, p. 55, 193, 383; 1861.
(3) Coulomb, *Mém. de l'Institut*, t. III; 1801. — *Mém. de la S. de Phys.*, t. I, p. 331.
(4) Grossmann, *Wied. Ann.*, t. XVIII, p. 119; 1883.

La moyenne des valeurs obtenues par M. Bouty pour la variation de résistivité d'un grand nombre de sels normaux est $\alpha = 0{,}033695$.

D'après Poiseuille, le frottement intérieur de l'eau est en raison inverse du trinome $1 + 0{,}0336793\,t + 0{,}000209938\,t^2$.

L'identité des coefficients principaux est une vérification de la loi énoncée par M. Grossmann.

694. Sels fondus. — Comme pour les dissolutions, la conductivité des sels fondus croît d'abord avec la température.

En comptant la température t à partir du point de fusion t_0, la résistivité ρ peut être représentée par

$$\rho = a(1 - \alpha t + \beta t^2).$$

On déduit ainsi des expériences de M. Foussereau [1] :

	a.	α.	t_0.
A. Chlorate de potasse.	4,19	»	359°
B. Azotate de potasse.	1,68	0,0080	327
C. Azotate de soude.	2,47	0,0086	298
B + C.	2,40	0,0077	219
D. Azotate d'ammoniaque. . .	3,09	0,0088	153
2D + B + C.	5,29	0,0068	126
E. Chlorure de zinc.	4,80	0,0120	256

La loi de Grossmann paraît également s'appliquer aux sels fondus. Toutefois le produit de la conductivité par le frottement intérieur varie d'un sel à l'autre, sans relation apparente avec l'équivalent chimique du sel.

Les expériences de MM. Bouty et Poincaré [2] ont été étendues jusqu'à la température de décomposition des sels, en prenant des tampons d'amiante comme électrodes parasites, auquel cas leur polarisation est négligeable.

D'autre part, M. Poincaré a constaté, conformément à une remarque antérieure de M. Lippmann pour les dissolutions, que des électrodes en argent ne se polarisent pas dans un

[1] G. Foussereau, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. V, p. 351; 1885.

[2] E. Bouty et L. Poincaré, *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 368; 1889. — L. Poincaré, *Ibid.*, p. 373.

sel fondu quand le sel renferme des traces d'azotate d'argent, ce qui permet d'employer des méthodes plus simples.

La conductivité est proportionnelle au binome $1 + \alpha t$, en comptant les températures à partir d'un certain point t_0. On obtient ainsi pour différents *azotates*, les valeurs de γ étant les inverses des résistivités à t_0 exprimées en ohms,

	t_0.	γ.	α.	d.	$\alpha d.10^5$.
Potasse.	350	0,724	0,005	1,84	920
Soude	350	1,302	0,00497	1,84	920
Argent.	350	1,233	0,0025	3,9	975
Ammoniaque. . .	200	0,400	0,0073	1,36	971

Ces résultats ne sont pas entièrement conformes à ceux qu'avait obtenus M. Foussereau, surtout en ce qui concerne le coefficient de variation. On remarquera aussi que le produit du coefficient α par la densité d du sel à la température t_0 est à peu près constant.

En outre, la conductivité d'un mélange de deux sels fondus peut se déduire de leurs conductivités respectives, rapportées aux volumes qu'ils occupent dans le mélange, même quand les valeurs de α sont inégales.

695. Mauvais conducteurs. Diélectriques. — Certains corps, comme le *charbon* de cornue et différents *sulfures* métalliques, ont une conductivité comparable à celle des métaux, quoique beaucoup plus faible, mais elle croît avec la température. La résistivité des charbons employés pour la lumière électrique est d'environ $0^{\omega},004$, ou 42 fois celle du mercure; elle varie de 0,0003 par degré entre zéro et 100°.

L'influence de la température sur la résistivité des diélectriques, d'après M. Foussereau, se traduirait par la formule

$$\log.\rho = a - bt + ct^2.$$

Pour le *phosphore* bien pur, la résistivité à 50° est de $1,33.10^6$ ohms; de 25° à 100°, elle diminue dans le rapport de 6,6 à 1. On a d'ailleurs

	a.	b.	$-c$.
Phosphore liquide. .	6,5035	0,00523	0,0000434
— solide. .	11,2103	0,01475	0,0002255

Le *soufre* présente de grandes irrégularités, soit à l'état solide suivant son mode de cristallisation, soit à l'état liquide suivant les différentes transformations qu'il a subies antérieurement; sa résistivité à 120° est d'environ 10^{10} ohms.

Les *sels* à l'état solide se comportent de la même manière; leur résistance est beaucoup plus grande qu'à l'état liquide, mais les résultats obtenus ne présentent aucune particularité à signaler.

Le *verre* sec peut être considéré comme isolant aux températures ordinaires, mais il n'en est plus de même aux températures élevées. Cavendish (1) avait déjà reconnu qu'à 300° le verre devient conducteur. Le décroissement de la résistance est très rapide et il suffit d'une différence de 6 à 9° pour doubler la conductibilité. La résistance du cristal, d'après M. Foussereau, est beaucoup plus grande que celles du verre ordinaire et du verre de Bohême, car les résistivités de ces trois corps à 50° sont respectivement 3410.10^{12}, $2,4.10^{12}$ et $0,3.10^{12}$ ohms.

Il est présumable que le verre chauffé se comporte comme les électrolytes et que le passage d'un courant y est accompagné de phénomènes chimiques. M. Warburg (2) a trouvé ainsi que la conductibilité du verre chauffé vers 300° diminue peu à peu, à cause de la production d'une couche isolante de silice à l'électrode positive.

Les expériences relatives à la *gutta-percha* sont très difficiles parce que le passage du courant est accompagné d'une absorption électrique. D'après MM. Bright et Clark (3), la conductance entre les températures de 0° et de 24° peut être représentée par la formule

$$c = c_0 \times 0,88_7 8^t.$$

Les phénomènes de conduction dans les diélectriques tiennent souvent aux traces d'humidité qui existent à leur surface, et on doit tenir compte de leur pouvoir inducteur spécifique. Pour cette étude, M. J. Curie (4) se sert de lames

(1) Maxwell, *Electrical researches of Cavendish*, p. 430.
(2) Warburg, *Ber. d. Nat. Gesell. zu Friebourg*, t. VIII, p. 2; 1884.
(3) Bright et Clark, *Electrician*, t. I, p. 3; 1862.
(4) J. Curie, *Ann. de Ch. et de Ph.* [6], t. XVII, p. 385 et t. XVIII, p. 203; 1889.

minces dont les deux faces sont rendues conductrices, par exemple en les argentant, et mesure les charges au moyen du quartz piézo-électrique.

Si l'on met l'une des armatures en communication avec une pile, l'autre armature prend d'abord une charge instantanée et il s'établit ensuite un courant d'intensité décroissante qui tend vers une limite définie.

Le courant de charge est à chaque instant proportionnel à la force électromotrice, ainsi qu'à l'étendue des armatures et en raison inverse de l'épaisseur du diélectrique, c'est-à-dire à la capacité du condensateur formé par la lame.

Quand l'isolement est assez parfait pour que le courant de charge s'éteigne complètement, le courant de décharge suit les mêmes lois que le premier. Afin de préciser les expériences, M. Curie appelle conductibilité c au temps t le rapport du courant de charge à la force électromotrice.

Les conductibilités (ou les courants, qui leur sont proportionnels) paraissent obéir à la relation hyperbolique

$$c = at^{-n},$$

dans laquelle a et n sont des constantes, car si on traduit les phénomènes graphiquement, en prenant pour coordonnées $\log c$ et $\log t$, on obtient souvent des courbes rectilignes qui satisfont à l'équation

$$\log c = \log a - n \log t.$$

Tel est en particulier, le cas du *quartz*. La conductivité suivant l'axe, qui est d'abord notable, diminue rapidement, puis d'une manière plus lente, sans qu'on atteigne une valeur constante, même après plusieurs jours, et diffère d'un échantillon à l'autre. Une des expériences a donné, par exemple, en unités électrostatiques,

10 secondes.	1 minute.	10 minutes.	1 heure.	1 jour.	3 jours.
0,0252	0,0076	0,0068	0,0066	0,0063	0,0060

La température a une très grande influence, car la conductivité varie de 1 à 2.10^6 quand on passe de 20° à 300°.

Suivant une direction perpendiculaire à l'axe, la conductivité est presque nulle, au moins 2500 fois plus faible que dans le premier cas, et les effets observés peuvent tenir à une imperfection de la taille.

L'humidité paraît jouer un rôle dans ce phénomène, car un quartz, après avoir été chauffé jusqu'au blanc, n'avait plus aucune trace de conductibilité.

Pour le *spath*, les propriétés sont de même ordre dans les deux directions principales. La conductivité suit une loi différente : elle est d'abord visiblement constante et ne commence à baisser qu'au bout d'un temps assez long ; on peut la représenter par $c = ae^{-bt^n}$.

Enfin, le *verre* présente encore un autre caractère : c'est la conductivité finale qui devient sensiblement constante.

Les corps étudiés par M. Curie se partagent ainsi en trois groupes distincts. On en aura une idée par le tableau suivant des conductivités aux températures ordinaires :

	10^s.	10^m.	1^h.	1 j.
Quartz (1). . .	110.10^{-6}	$3,4.10^{-6}$	»	»
— (2). . .	25200 »	6800 »	6600.10^{-6}	6300.10^{-6}
Ébonite	111 »	7,8 »	» »	»
Mica.	457 »	15 »	3 »	»
Spath (1). . . .	1700 »	1620 »	1590 »	1480 »
» (2) . . .	380 »	246 »	229 »	204 »
Alun.	»	832 »	676 »	»
Gypse.	5130 »	1510 »	1070 »	»
Barytine	5010 »	2240 »	1380 »	»
Cristal	11200 »	2190 »	2000 »	1760 »
Verre	38900 »	12600 »	12600 »	12600 »

Les diélectriques paraissent se classer, au point de vue des conductibilités croissantes, à peu près dans l'ordre de leurs pouvoirs absorbants relatifs à la chaleur.

Nous signalerons encore les propriétés singulières du *bismuth*, qui dépendent, non seulement de la pureté du métal,

(1) Normale à l'axe. (2) Suivant l'axe.

mais aussi du mode de préparation. M. Righi a trouvé, par exemple, que pour le bismuth du commerce, la résistivité à 0° variait de 2,4 à 6,3 fois celle du mercure, qui est $94,08.10^3$, c'est-à-dire de 126.10^3 à 611.10^3, suivant que le métal avait été fondu, ou comprimé à une température voisine de la fusion, ou fabriqué par pression à froid (1).

L'influence de la température est aussi très inégale. Avec le bismuth du commerce, la résistance diminue d'abord quand la température augmente, mais certaines variétés présentent deux maxima, par exemple à — 40° et 240°, séparés par un minimum qui était alors à 115°. D'autres fois il n'existe qu'un maximum. M. Righi croit que ces variations tiennent aux impuretés, surtout à l'étain, et que la résistance du métal pur augmente régulièrement avec la température. Cependant, avec un bismuth ne renfermant que des traces de plomb, M. Leduc trouve encore un minimum de résistance à 23°. Chacun des échantillons doit donc être étudié à part et il ne semble pas que la résistance puisse être représentée par une formule générale en fonction de la température.

696. Influence du champ magnétique. — On doit encore à M. Righi (2) la découverte de l'accroissement qu'éprouve la résistance du *bismuth* dans un champ magnétique. Le fait a été aussi constaté presque à la même époque et d'une manière indépendante par M. Hurion et par M. Leduc.

Pour réaliser l'expérience, on emploie des lames minces de bismuth étalées sur verre par fusion, que l'on peut ensuite découper en lanières afin d'opérer sur de grandes résistances, ou des couches électrolytiques, ou encore des fils obtenus par fusion dans des tubes de verre courbés sous forme de spirales plates. On intercale ces lamelles de bismuth entre les armatures planes d'un électro-aimant, ce qui permet de les soumettre à des champs très intenses.

L'action du champ se manifeste aussi bien quand il est parallèle ou perpendiculaire au conducteur, et paraît même plus grande dans le premier cas, mais la seconde disposition est plus commode pour les expériences.

(1) Voir E. Van Aubel, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. XVIII, p. 433; 1889.
(2) A. Righi, *Atti della R. Acad. dei Lincei;* 11 novembre 1883. — A. Hurion, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCVIII, p. 1257; 1884.

L'augmentation relative z de résistance est d'abord plus rapide que celle du champ magnétique H et tend à lui devenir proportionnelle. On peut la représenter [1] par un développement à trois termes $aH + bH^2 - cH^3$, ou mieux encore par la formule hyperbolique

$$z(z + \beta) = \alpha H^2.$$

La valeur de z est sensiblement proportionnelle au carré du champ ou au champ lui-même, suivant que z est petit ou grand par rapport à la constante β.

Les constantes α et β varient d'ailleurs suivant les échantillons. Avec du bismuth aussi pur que possible, obtenu par la décomposition du sous-nitrate, M. Leduc a ainsi trouvé, pour la température de 18°,

$$\alpha = 221.10^{-11}, \qquad \beta = 0,263.$$

H.	z.	z calc.	H.	z.	z calc.
680	4,0	3,8	5080	139,2	141,4
1500	18,7	17,8	6070	182,0	183,0
2350	40,0	40,4	7290	237,3	235,8
3080	64,4	64,3	8470	289,4	288,0
4230	106,0	107,2	9000	311,3	311,7

Les valeurs de α et β à différentes températures seraient:

t.....	18°	44°,7	100°	130°,8	157°,5
$\alpha.10^5$...	221	143	55	33	22
β.....	263	275	301	318	342

A mesure que la température s'élève, la variation diminue et tend à devenir proportionnelle au champ.

Les résultats de M. Henderson [2], avec des champs dont l'intensité a été poussée jusqu'à 38900, indiqueraient une variation plus rapide de la résistance.

Voici, par exemple, les valeurs obtenues, à la température

[1] A. Leduc, *Journ. de Phys.* [2], t. IV, p. 118; 1886 et t. X, p. 112; 1891.
[2] J. B. Henderson, *Ph. Mag.* [5], t. XXXVIII, p. 448; 1894.

de 18°, pour le rapport $p = 1 + z$ de la résistance observée à sa valeur en dehors du champ magnétique :

F.	p.	F.	p.	F.	p.
0	1	15710	1,830	30090	2,704
5830	1,227	20450	2,160	31270	2,772
6310	1,253	23480	2,333	32780	2,846
6830	1,290	26820	2,508	32820	2,837
7790	1,341	27450	2,540	33300	2,893
8880	1,407	27820	2,568	35800	3,070
10410	1,496	28370	2,609	36600	3,160
12500	1,630	29270	2,643	38900	3,334

L'influence de la température se manifeste d'une manière très inégale. Dans un champ nul, l'accroissement de résistance est régulier avec un coefficient égal à 0,0150. A mesure que le champ augmente, le phénomène se transforme et les variations sont plus lentes. Pour les champs de 9000 à 12000, la résistance diminue d'abord et passe par un minimum pour une température croissante avec le champ. Lorsque le champ est supérieur à 12000, ce minimum n'apparaît plus au-dessous de 100°, mais il est probable qu'il existe encore à des températures plus élevées.

M. Leduc [1] et M. Righi [2] ont constaté aussi que le champ magnétique exerce une action de même ordre sur la conductibilité thermique.

Pour un échantillon de bismuth placé dans un champ de 7800, la diminution de conductibilité thermique était 0,14 et l'accroissement de résistance électrique 0,16. La relation générale paraît donc s'appliquer à ce métal.

697. Phénomène de Hall. — La déviation permanente des courants dans un conducteur, sous l'influence d'un champ magnétique (476), paraît due également à des variations relatives de résistance. Le phénomène, au moins comme première approximation, suit des lois assez simples.

Considérons une plaque rectangulaire traversée par un courant I, qui entre et sort par les milieux A et B de deux faces opposées (fig. 200). Le système étant symétrique, les milieux

[1] A. Leduc, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CV, p. 250; 1887.
[2] A. Righi, *Atti della R. Acad. dei Lincei*, 19 juin 1887.

C et D des autres faces sont au même potentiel; mais si l'on provoque un champ magnétique uniforme H parallèle à l'épaisseur a de la plaque, la symétrie est détruite et il se produit, entre les points C et D, une force électromotrice e, que

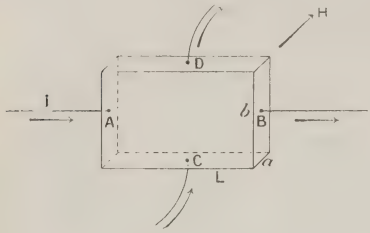


Fig. 200.

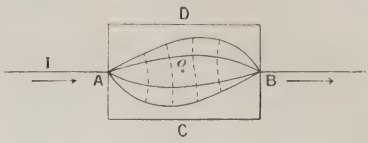


Fig. 201.

l'on déterminera par un électromètre ou par le produit ir du courant latéral i dans un circuit de résistance r.

La force électromotrice e est proportionnelle au champ H, au courant principal I et en raison inverse de l'épaisseur a; on peut donc écrire

$$(1) \qquad e = c\,\frac{\mathrm{HI}}{a}, \qquad c = \frac{ea}{\mathrm{HI}} = \frac{i}{\mathrm{I}}\,\frac{ar}{\mathrm{H}}.$$

On voit qu'il y a tout avantage à employer des plaques très minces, comme pour les observations relatives à la résistance du bismuth dans un champ magnétique.

M. Hall donne au facteur c le nom de *pouvoir rotatoire magnétique*, mais cette expression a déjà été employée dans un autre sens; pour éviter toute confusion, nous l'appellerons *coefficient de Hall*. L'expérience montre d'ailleurs que cette quantité varie avec le champ et avec la température.

Si b est la largeur CD de la plaque, la densité du courant est $u = \frac{\mathrm{I}}{ab}$ et le quotient $\frac{e}{b} = e_1$ représente la force électromotrice transversale par unité de longueur; il en résulte

$$(2) \qquad \frac{e}{b} = c\,\frac{\mathrm{HI}}{ab}, \quad \text{ou} \quad e_1 = c\,\mathrm{H}u.$$

La force électromotrice par unité de longueur ne dépend que du champ et de la densité du courant.

Pour le *fer*, la force électromotrice e relative au phénomène de Hall est de même sens que l'action électromagnétique du champ sur le courant principal. Dans le cas de la figure, le courant latéral émanerait du point D; le coefficient c est considéré alors comme positif. Pour d'autres corps, dont le *bismuth* est le plus actif, le courant est de sens contraire et le coefficient c négatif.

M. Lebret [1] élimine la détermination du courant principal en faisant usage d'un galvanomètre différentiel. L'une des bobines du galvanomètre est située sur le circuit latéral, de résistance totale r, et reçoit le courant i produit par le champ; l'autre bobine renferme une résistance R placée en dérivation sur une partie r' du circuit principal. On a alors, pour ce courant dérivé i',

$$i'\mathrm{R} = (\mathrm{I} - i')r', \qquad i' = \mathrm{I}\,\frac{r'}{\mathrm{R} + r'}.$$

Le dénominateur de la dernière équation se réduit à R si la résistance r' est très petite. Lorsque le galvanomètre est réglé et que les résistances ont été choisies de manière que l'aiguille reste au zéro, il en résulte $i = i'$ et, par suite,

$$c = \frac{i'}{\mathrm{I}} \cdot \frac{ar}{\mathrm{H}} = \frac{a}{\mathrm{H}} \cdot \frac{rr'}{\mathrm{R}}.$$

Avec cette disposition, le circuit du courant n'a besoin d'être fermé que pendant quelques instants, ce qui supprime les erreurs dues à l'échauffement.

On évalue quelquefois le champ en unités absolues et les résistances en ohms; il est préférable d'éviter la confusion que peut causer ce mélange de systèmes différents et de rapporter toutes les mesures aux unités C. G. S.

L'existence d'une force électromotrice transversale e montre que les routes du courant primitif ont été modifiées. Si le potentiel est plus élevé en D qu'en C, les lignes du courant ont une forme analogue à celle des traits pleins de la figure 201, qui vont de A en B, et les courbes de niveau à celle des traits indiqués en pointillés.

[1] A. Lebret, *Comm. form the Lab. of Physics at the University of Leiden*, nos 15 et 19; 1895.

En appelant ρ la résistivité de la plaque, la différence de potentiel du courant primitif par unité de longueur, ou le champ électrique correspondant, est

$$E_1 = I\frac{\rho}{ab}.$$

La *déviation* moyenne δ du courant résultant qui traverse la section CD est donc

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{e_1}{E_1} = \frac{e}{bE_1} = \frac{ea}{I\rho} = c\,\frac{H}{\rho}.$$

Cette déviation peut être déterminée par les valeurs de e et de E_1. Pour le *bismuth*, la résistivité ordinaire est d'environ 130.10^3; comme elle augmente de moitié dans un champ de 10000 unités, on peut prendre alors la valeur 195.10^3. Si l'on fait ensuite $c = 10$, il en résulte

$$\operatorname{tang}\delta = 10\,\frac{10^4}{195.10^3} = \frac{100}{195}, \qquad \delta = 27^\circ 9'.$$

Les résultats relatifs au *bismuth* paraissent varier beaucoup avec les échantillons. Ainsi M. Leduc n'a pas observé de déviation supérieure à 3°, tandis que M. Lebret a obtenu, pour le coefficient de Hall, jusqu'à 13,5 à -12°.

D'autre part, si l'on admet que l'influence de la température et celle du champ sont indépendantes, le cofficient c serait représenté, d'après M. Leduc, par

$$c = c_0(1 - \alpha H + \beta H^2)(1 + mt - nt^2),$$

avec

$$\alpha = 91.10^{-6}, \qquad \beta = 316.10^{-11},$$
$$m = 541.10^{-5}, \qquad n = 93.10^{-6}.$$

Cette expression donnerait un minimum par rapport au champ au voisinage de $H = 10000$ et un maximum relatif à la température vers 29°.

MM. Ettingshausen et Nernst [1] ont trouvé, au contraire, que pour le *bismuth* et le *nickel* le coefficient de Hall diminue

[1] Ettingshausen et Nernst, *Wien. Berichte* [2], t. XCIV, p. 560; 1886.

assez rapidement, à mesure que le champ augmente, et que le produit cH tend à devenir constant lorsque le champ varie de 6000 à 16000.

En ce qui concerne la température, le coefficient c irait en croissant pour les métaux magnétiques, d'après M. Hall [1], et en diminuant pour les métaux non magnétiques.

Cette relation est encore trop générale. Sur un échantillon de *bismuth* très pur, M. Lebret trouve pour le coefficient de Hall un maximum de 13,5 à $-12°$, avec des valeurs de 11,24 à $-69°$ et 2,27 à 242°,5. Dans une lame de bismuth impur, contenant un peu de fer, le phénomène a présenté une marche analogue, avec des valeurs moitié moindres, mais la température du maximum était inférieure à $-74°$.

Enfin, on peut remplacer le courant I par une décharge Q et observer la décharge latérale q dans un circuit de résistance r. En substituant à e le produit qr, l'expression

$$c = a\frac{qr}{HQ} = \frac{ar}{H}\cdot\frac{q}{Q}$$

donne le même coefficient que les courants continus.

Le phénomène de Hall ne paraît pas pouvoir être expliqué par une action du champ sur le courant lui-même, indépendamment du conducteur, car les surfaces de niveau devraient rester symétriques par rapport au plan transversal moyen et le potentiel conserverait la même valeur aux points C et D (fig. 201). M. Righi a opéré sur des lames fendues de O en B, les deux fragments de droite, qui reçoivent des parties I_1 et I_2 du courant principal, communiquant avec un galvanomètre différentiel. L'aiguille étant d'abord au zéro, le champ magnétique détruit l'équilibre et l'on a, par exemple, $I_1 > I_2$; or la différence $I_1 - I_2$ ne change pas quand on renverse le courant principal.

Il semble donc que le milieu est devenu hémiédrique, sous l'influence du champ, et qu'il a pris, au point de vue de la conductibilité, la symétrie (d) qui correspond au champ magnétique lui-même (**504**).

Toutefois, cette manière de voir n'est pas en contradiction

[1] E. Hall, *Ph. Mag.* [5], t. XIX, p. 419; 1885.

formelle avec l'interprétation donnée par M. Rowland (**485**) pour le pouvoir rotatoire magnétique.

M. Bidwell [1] attribue le phénomène de Hall à des tensions inégales qui produisent des forces électromotrices et indique quelques expériences qui paraissent favorables à cette interprétation, mais il est difficile de concevoir que des différences de tension puissent se produire dans une lame de bismuth soumise à un champ magnétique uniforme.

Le tableau suivant renferme les principaux résultats obtenus par MM. Ettingshausen et Nernst et par M. Hall.

COEFFICIENT DE HALL.

	Ett. et N.	Hall.		Ett. et N.	Hall.
Tellure.....	+530	»	Platine.....	—0,00024	— 0,00024
Antimoine..	0,192	0,114	Aluminium...	38	370
Acier..	0,0175	Variable.	Cuivre.....	52	52
Fer.....	113	0,00785	Or.....	71	66
Cobalt.....	459	246	Argent..	83	86
Cadmium...	55	»	Magnésium...	94	350
Zinc.....	41	82	Nickel.....	242	1474
Plomb.....	+ 9	+0	Charbon.....	176	»
Étain.....	— 0,00004	+0,00002	Bismuth.....	—10,100	— 8,850

Le coefficient relatif aux alliages, en particulier pour ceux qui sont formés de cuivre et de zinc, est intermédiaire entre les valeurs qui correspondent aux métaux.

On voit encore que la relation indiquée (**476**) entre le signe du coefficient de Hall et les propriétés magnétiques ou diamagnétiques n'a pas de caractère général. Les métaux se trouveraient plutôt rangés à peu près dans l'ordre de leurs pouvoirs thermoélectriques.

Dans le cas du *bismuth*, la force électromotrice latérale e ne conserve pas exactement la même valeur quand on renverse la direction du champ. Cette dissymétrie particulière a été observée d'abord par MM. Ettingshausen et Nernst [2]; elle paraît due à l'orientation des cristaux.

M. Lebret a été conduit à une interprétation du phénomène par l'expérience suivante. Si on permute le rôle des électrodes,

[1] Sh. Bidwell, *Ph. Mag.* [5], t. XVII, p. 249; 1884. — *Journ. de Phys.* [2], t. III, p. 363; 1884.

[2] Ettingshausen et Nernst, *Wied. Beiblatter*, t. II, p. 357; 1887.

en faisant passer le courant principal par les points C et D normalement à sa direction primitive, la dissymétrie change de signe avec la même valeur absolue, c'est-à-dire que la valeur de e est plus grande pour le sens du champ qui correspondait d'abord à la plus petite.

Il existe, en effet, dans une plaque de bismuth deux directions rectangulaires suivant lesquelles le défaut de symétrie est nul; il change alternativement de signe dans les quatre quadrants de ces directions principales et prend une valeur maximum suivant leurs bissectrices.

Pour rendre compte de la dissymétrie, il suffit d'admettre que la résistance du milieu a des valeurs différentes suivant les directions principales. En appelant X et Y les composantes du champ électrique parallèles à ces directions, u et v les composantes analogues du courant, le phénomène de Hall peut se traduire par les équations

$$X = k_1 u - hv, \qquad Y = k_2 v + hu.$$

Les facteurs k_1 et k_2 sont proportionnels aux résistivités principales; la constante h dépend de la nature du métal et de l'intensité du champ, et change de signe avec le champ.

Si le courant I fait l'angle α avec l'axe des x, on a $u = I\cos\alpha$ et $v = I\sin\alpha$; le champ électrique transversal, ou la force électromotrice e_1' par unité de longueur, devient

$$e_1' = Y\cos\alpha - X\sin\alpha = \left(h - \frac{k_1 - k_2}{2}\sin 2\alpha\right) I.$$

Les valeurs de e_1' sont donc très différentes quand on change le signe de h par l'inversion du champ. L'exactitude de cette formule a été confirmée par des expériences faites suivant les azimuts de 45° et de 60°.

Les écarts sont surtout manifestes pour les champs très intenses. Suivant les bissectrices des axes principaux, l'observation a donné, pour le rapport des forces électromotrices latérales relatives aux deux directions du champ :

Champ	1500	2160	2740	3480
Rapport	2,22	3,55	6,14	32,3

On peut ainsi utiliser une plaque graduée par les champs continus, pour déterminer l'intensité efficace d'un champ alternatif, puisque le phénomène de Hall résiduel, correspondant au défaut de symétrie du métal, est lui-même une fonction du champ.

Le phénomène de Hall paraît également sensible dans les liquides. M. Bagard (1) opère sur des couches liquides d'épaisseur uniforme comprises entre deux lames de verre et détermine les valeurs de E_1 et e_1 par des électrodes parasites, en éliminant les erreurs qui seraient dues à une position inexacte de ces électrodes par rapport à la direction primitive du courant. On en déduit la déviation, laquelle n'a pas dépassé 12′ pour des champs de 380 à 960 unités. Avec des dissolutions de *sulfate de zinc* et de *sulfate de cuivre*, l'expérience montre que la déviation augmente avec le champ, la densité du courant et varie en sens inverse de la richesse du liquide.

698. Actions physiques et mécaniques. — Toute modification de l'état et des propriétés d'un corps se traduit par un changement de sa résistance électrique (2).

1°. *Pression.* — M. Lenz (3) a constaté ainsi que la conductivité du *mercure* croît avec la pression, d'environ 0,02 pour 100 par atmosphère.

D'après M. Fink (4), une pression de 500 atmosphères diminue de 11,7 pour 100 la résistance d'une solution de *sulfate de zinc* au centième. Avec le *sel marin*, la résistance n'est pas modifiée quand le liquide renferme 22 pour 100 de sel; elle augmente avec la pression pour les solutions plus riches et varie en sens contraire pour les solutions plus pauvres.

L'influence est même sensible quand il s'agit des métaux: M. Chwolson (5) comprime les fils métalliques dans un piezomètre jusqu'à 60 atmosphères. En maintenant l'eau au voisinage de 4°, la pression ne produit pas de variation sensible de température. Dans ce cas, la résistance du *cuivre* diminue proportionnellement à la pression et elle est en moyenne 3,6

(1) H. Bagard, *Journ. de Phys.* [3], t. V, p. 499; 1896.
(2) *Voir*, pour l'historique, G. Faè, *Atti del R. Ist. Veneto* [6], t. VII, p. 279; 1889.
(3) Lenz, *Wied. Beiblätter*, t. VI, p. 805; 1882.
(4) J. Fink, *Wied. A.*, t. XXVI, p. 484; 1885. — *J. de Phys.* [2], t. V, p. 227; 1886.
(5) O. Chwolson, *Carl's reperorium*, t. XVIII, p. 252; 1882. — *Journ. de Phys.* [2], t. I, p. 573; 1882.

fois plus grande que celle qui résulterait du changement de volume. Aux températures plus élevées l'accroissement de résistance peut être attribué au dégagement de chaleur.

Le phénomène est inverse pour le *plomb :* la diminution de résistance est à peu près la même à 6°, 8° et 17°.

2°. *Traction.* — La longueur du fil augmente par la traction, en même temps que sa section diminue. Il est donc à prévoir que la résistance devienne alors plus grande, mais la résistivité elle-même est modifiée. Dans les limites d'élasticité parfaite, Mousson (1) avait reconnu déjà que le rapport des variations de résistance et d'allongement est égal à 4,32 pour l'*acier*, à 3,61 pour le *fer* et 2,36 pour le *cuivre*. Quand on dépasse les limites d'élasticité, la résistance croît moins vite que l'allongement, mais elle persiste aussi après la décharge : Lord Kelvin (2) était arrivé à la même époque à des conclusions analogues.

Les expériences de M. Tomlinson (3) ont porté sur un grand nombre de métaux, *fer*, *acier*, *platine*, *argent*, *platine-argent*, *laiton*, *zinc*, *aluminium*, *étain*, *plomb*. Dans les limites d'élasticité, l'accroissement de résistance est proportionnel au poids tenseur; en même temps la résistivité augmente, sauf pour l'aluminium où elle diminue. Le *nickel* présente un cas spécial : pour une faible tension, la résistance et la résistivité diminuent; elles reprennent ensuite leurs valeurs primitives et finissent par augmenter.

La variation de résistivité en centièmes, calculée pour un allongement des fils égal à leur longueur primitive, a été

Fer.....	+2,62	Plomb.....	+1,62	Cuivre... ..	+0,01
Zinc.....	+2,11	Platine.....	+2,24	Aluminium..	—0,44
Étain.....	+1,63	Argent.....	+1,62	Nickel.....	—8,86

Les métaux se classent à peu près dans le même ordre que pour le phénomène de Hall.

3°. *Torsion*, *enroulement*, *vibrations*, etc. — Mousson avait remarqué aussi que la résistance des fils de *fer* et de *cuivre*

(1) Mousson, *Arch. de Genève*, t. XXXI, p. 111 ; 1856.
(2) Sir W. Thomson, *Math. and Phys. papers*, t. II, p. 189 et suiv.
(3) Tomlinson, *Ph. Mag.* [5], t, XVII, p. 400 ; 1884. — *Journ. de Phys.* [2], t. III, d. 366; 1884.

augmente quand on les enroule sur un cylindre, sans doute par un effet de la tension.

M. Hopps [1] arrive à des résultats inverses avec les fils de *cuivre*, *plomb*, *aluminium*, *magnésium*, *argent*. Pour le *fer*, un premier enroulement produit le même effet, mais la variation change de sens après quelques opérations semblables.

Diverses autres expériences n'ont pas fourni les mêmes résultats ; le phénomène dépend beaucoup de l'état initial du fil et du mode d'enroulement.

La torsion produirait aussi un accroissement de résistance [2], plus grand pour l'*acier* et le *fer* que pour le cuivre.

Enfin, il n'est pas établi que les vibrations aient une influence appréciable.

Ces diverses actions mécaniques ne paraissent pas susceptibles de lois générales.

Le recuit pendant un temps très court produit généralement une diminution de résistance, mais l'inverse a lieu si le recuit est prolongé et à une température élevée ; il paraît difficile de faire la part qui est due à l'oxydation du métal.

La trempe augmente beaucoup la résistance de l'*acier*, mais d'une manière très inégale suivant les propriétés chimiques ou mécaniques du métal. On a vu combien ces diverses opérations modifient les qualités du *bismuth*.

De même, le passage à la filière augmente la résistivité du fer et de l'acier et diminue celle du cuivre.

Enfin différents observateurs ont cru constater que la résistance des métaux est modifiée par le seul fait du passage d'un courant, mais il ne paraît pas établi que cet effet soit indépendant des variations de température.

4° *Aimantation*. — On doit encore à Lord Kelvin l'observation curieuse que l'aimantation temporaire du *fer* ou permanente de l'*acier*, dans le sens longitudinal, augmente sensiblement leur résistance.

Quand l'acier doux et le fer [3] sont aimantés par un courant dans le sens longitudinal ou transversal, l'accroissement de résistance serait d'abord proportionnel au carré du cou-

(1) J. Hopps, *Ph. Mag.* [5], t. XVIII, p. 433 ; 1884.
(2) Gerosa, *Nuovo Cimento* [3], t. XV, p. 38 ; 1884.
(3) W. G. Adams, *Ph. Mag.* [5], t. I, p. 153 ; 1876.

rant d'aimantation ; l'acier dur éprouverait au contraire une diminution de résistance. De même, le passage d'un courant dans le métal aurait pour effet de diminuer la résistance de l'acier dur et d'augmenter celle du fer ou de l'acier doux.

D'après M. De Lucchi (1), la résistance des métaux magnétiques (*fer, nickel, cobalt*) augmente dans le sens de l'aimantation et diminue suivant la direction perpendiculaire ; pour le *tellure* et l'*aluminium*, qui sont diamagnétiques, l'accroissement de résistance se produit dans les deux directions.

Il existe d'ailleurs d'assez grandes discordances entre les résultats obtenus par différents observateurs ; on doit sans doute les attribuer au défaut d'identité des échantillons sur lesquels ont porté les expériences.

699. Influence de la lumière. — Le *sélénium* présente un grand nombre de particularités. La forme métallique conduit beaucoup mieux que la variété cristallisée et la conductivité croît d'abord avec la température, comme pour les diélectriques. M. Mercadier (2) trouve que la résistance diminue d'une manière continue jusqu'à 125° et passe, vers 163°, par un maximum relatif qui paraît correspondre à un changement d'état. Entre 0° et 36°, la variation serait très rapide et à peu près linéaire. D'après M. Sh. Bidwell (3), au contraire, il y aurait un maximum de résistance entre 20° et 30°.

On doit à M. W. Smith (4) cette découverte importante que le sélénium devient plus conducteur sous l'action de la lumière ; la modification ainsi produite disparait très rapidement dès que le corps est ramené à l'obscurité.

M. Siemens (5) obtient une variété très sensible en maintenant pendant assez longtemps le sélénium amorphe à 210°. Après refroidissement, la matière présente un aspect cristallin ; sa conductivité est doublée par la lumière diffuse et décuplée à la lumière solaire directe.

L'action de la lumière paraît instantanée, mais l'effet dure pendant un temps appréciable. En plaçant entre la source et le sélénium un disque tournant percé d'un certain nombre de

(1) De Lucchi, *Atti del R. Ist. Veneto* [5], t. V, p. 17 ; 1882.
(2) Mercadier, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCII, p. 1407 ; 1881.
(3) Schelford Bidwell, *Ph. Mag.* [V], t. XI, p. 302 ; 1881 et t. XX, p. 178 ; 1885.
(4) Willougby Smith, *Amer. journ. of sc.*, t. V, p. 301 ; 1873.
(5) W. Siemens, *Pogg. Ann.*, t. CLVI, p. 334 ; 1875.

trous, MM. Bellati et Romanese [1] ont constaté que la résistance moyenne ne change pas quand la vitesse de rotation varie de 1 à 4. D'autre part, en mesurant la résistance à différents intervalles, après suppression d'un éclairage de durée constante, M. Majorana [2] trouve que l'accroissement de résistance est encore sensible au bout de 8 secondes.

Le phénomène est d'ailleurs très irrégulier, car la lumière n'a pas d'action sur certaines variétés de sélénium et, pour d'autres, elle augmente la résistance [3].

M. Bidwell pense que la conductibilité du sélénium provient uniquement du milieu dans lequel se trouvent les cristaux, dont la résistance propre est beaucoup plus grande. Ainsi, quand on mélange du soufre cristallisé en poudre avec un corps conducteur tel que le sulfite d'argent ou le graphite pulvérisé, on obtient une masse conductrice sensible à la lumière. Aucun phénomène analogue ne se produit si on mélange le soufre avec une matière non conductrice, telle que la gomme laque.

Différents physiciens ont cherché si d'autres corps ne jouiraient pas des mêmes propriétés. M. Bœrnstein [4], par exemple, avait annoncé que l'*or*, l'*argent*, le *platine* en lames minces sont également modifiés par la lumière, la conductivité de l'argent, par exemple, augmentant de 0,00015 par une longue illumination. La conductivité d'une lame de soufre [5] fondu entre deux plaques de graphite augmenterait aussi sous l'influence de la lumière. Toutefois ces différentes observations ne semblent pas s'être confirmées.

Le seul résultat bien établi a été observé par M. Arrhenius [6] sur les sels altérables à la lumière. Pour des couches minces de *chlorure* et de *bromure d'argent* obtenus par évaporation de leurs solutions ammoniacales, la conductibilité augmente d'une manière notable par l'éclairement. L'action du spectre est faible dans le rouge et devient maximum pour les rayons

(1) Bellati et Romanese, *Nuov. Cim.* [3], t. XI, p. 5; 1882.
(2) A. Majorana, *Nuov, Cim.* [3], t. XXXV, p. 267; 1894.
(3) Fritts, *Proceed. Amer. Ass.*; 1884. — S. Kalisher. *Wied. Ann.*, t. XXXII, p. 108; 1887.
(4) Bœrnstein, *Ph. Mag.* [5], t. III, p. 481; 1877. — *Carl's. repert.*, t. XVII, p. 164; 1881.
(5) Monckmann, *Proc. R. S. L.*, t. XLVI, p. 136; 1889.
(6) S. Arrhenius, *Wien. Berichte* [2], t. XCVI, p. 837; 1887.

voisins de la raie G; elle paraît en relation directe avec les propriétés photographiques.

M. Graham Bell [1] a eu l'idée d'appliquer les variations de résistance du sélénium sous l'influence de la lumière à la transmission de la parole, par un appareil dit *photophone*.

D'une manière générale, l'action des radiations de nature quelconque, calorifiques ou lumineuses, a fait l'objet de nombreux travaux, parmi lesquels nous citerons en particulier ceux de M. Mercadier [2], et que nous ne pouvons étudier ici dans leurs détails.

MM. Adams et Day [3] ont même constaté que la lumière produit sur le sélénium une véritable force électromotrice.

En plaçant dans l'eau distillée une plaque de sélénium cristallin (fondu vers 200°) et une lame de platine réunie à la première par un fil de platine, R. Sabine [4] trouve qu'à l'obscurité, le sélénium est positif par rapport au platine et que la force électromotrice est d'environ $0^{v},1$. Si on éclaire l'appareil par la lumière du jour, la force électromotrice change de signe et devient $-0^{v},05$. Par suite des effets de la polarisation, le sélénium redevient ensuite positif.

M. Fritts [5] prépare des plaques minces de sélénium en les fondant sur une lame métallique que l'on chauffe ensuite pour transformer le sélénium à l'état cristallin; on le recouvre alors d'une feuille d'or transparente. La lumière solaire transmise au travers de l'or, qui laisse passer les rayons verts, peut rendre la résistance de ces éléments 30 ou 40 fois moindre. En outre, quand on réunit les deux feuilles métalliques à un galvanomètre, l'action de la lumière produit un courant permanent dont la force électromotrice est à peu près proportionnelle à l'éclairement. Le phénomène ne paraît pas thermoélectrique, car les rayons obscurs sont sans effet.

700. Poudres métalliques. — Une masse formée de poudres métalliques présente une résistance considérable à cause de la petite étendue relative des surfaces de contact ; elle devient conductrice quand on y a produit une série d'étincelles élec-

(1) Voir A. Bréguet, *Journ. de Phys.*, t. IX, p. 369; 1880.
(2) E. Mercadier, *C. R. de l'Acad. des Sciences;* 1881 et suiv., *passim.*
(3) Adams et Day, *Proceed. L. R. S.*, t. XXV, p. 113; 1876.
(4) R. Sabine, *Nature*, t. XVII, p. 512; 1878.
(5) C. E. Fritts, *Amer. Journ.* t. XXV, p. 465; 1883.

triques [1]. M. C. Onesti place ces limailles dans un tube de verre; la conductibilité de l'appareil est à peu près nulle, mais elle prend une valeur notable après qu'on l'a fait traverser par la décharge d'une bobine d'induction. L'effet était très variable suivant la compression de la limaille.

M. Branly prépare, à la température de fusion de la résine, un mélange intime de limaille fine d'aluminium et de résine que l'on coule dans un tube de verre renfermant deux tiges de cuivre comme électrodes. Ce tube intercepte complètement le courant d'une pile, mais il suffit de produire des étincelles dans le voisinage pour que sa résistance tombe à quelques centaines d'ohms et même beaucoup moins.

Le même phénomène se produit si on a réuni d'abord les électrodes pendant un instant par une pile d'un grand nombre de couples. Cette conductibilité est passagère, car elle disparaît par un simple choc sur le tube de verre.

Des résultats analogues s'obtiennent avec toutes les poudres métalliques, fines ou non, soit simplement tassées, soit solidifiées par l'intermédiaire d'une substance isolante, ou encore, à un moindre degré, avec un paquet de feuilles métalliques superposées.

Lorsqu'un tube à limaille a servi à une expérience pour des décharges assez fortes, il devient plus sensible et peut déceler des décharges beaucoup moindres.

On peut, avec M. Lodge, attribuer ces variations de résistance à une sorte d'adhérence provoquée par les étincelles multiples entre les grains de limailles, comme dans l'expérience du carreau étincelant. Toutefois l'explication s'applique difficilement au cas des poudres noyées dans un corps solide; il y a sans doute une modification particulière du milieu autour des particules conductrices.

MESURES ABSOLUES.

701. Caractère des méthodes. — La résistance d'un conducteur en unités électromagnétiques ayant les mêmes dimensions qu'une vitesse (**329**), la détermination d'une résistance

[1] Calzecchi Onesti, *Nuovo cim.* [3], t. XVI, p. 58; 1885. — E. Branly, *Journ. de Phys.* [3], t. I, p. 459; 1892 et t. IV, p. 273; 1895.

absolue implique la mesure d'une longueur et d'un temps; les autres quantités qui interviennent dans les expériences se ramènent finalement à des rapports numériques.

Les principales méthodes employées pour mesurer une résistance électrique reposent sur la loi de Joule ou sur la loi d'Ohm. Dans le premier cas (**652**), on déduit la résistance R d'un conducteur de la quantité Q de chaleur dégagée pendant un certain temps par un courant d'intensité connue. Dans le second cas, la résistance est évaluée par le courant que produit une force électromotrice connue, constante ou variable. Comme les seules forces électromotrices dont on puisse déterminer directement la valeur en unités électromagnétiques sont celles qui proviennent des effets d'induction, on mesurera, soit le courant I que produit une force électromotrice constante, soit la décharge q qui correspond à une variation du flux d'induction dans le circuit, soit un effet quelconque en relation avec les courants induits, comme l'amortissement des systèmes ou l'impédance des courants alternatifs. Le caractère des expériences est ainsi très varié.

702. Dégagement de chaleur. — Dans les expériences de Joule [1], le courant était mesuré par un électrodynamomètre balance (**635**) dont la constante avait été déterminée au moyen d'une boussole des tangentes.

En supposant la résistance R connue dans l'équation

$$JQ = I^2 R t,$$

et exprimée par l'unité de l'Association Britannique (B.A.U.), Joule a déduit d'abord en 1876 des mesures calorimétriques la valeur $J = 4{,}218.10^7$. Ses expériences antérieures relatives au frottement de l'eau, qu'il considérait comme exactes, ayant donné $J = 4{,}1624.10^7$, il en résulte que la résistance R était représentée par un nombre trop grand et, par suite, que l'unité adoptée est trop faible. On aurait donc

$$\text{B.A.U.} = \frac{4162{,}4}{4218}\,\text{ohm} = \frac{1}{1{,}013}\,\text{ohm}.$$

[1] Joule, *Ph. Mag.* [3], t. XXXI, p. 173; 1847. — *Br. Ass. Rep.* Dundee, 1867; Reprint, p. 175. — *Ph. Trans. L. R. S*, t. CLXIX, p. 363; 1878.

Une première difficulté tient à ce que la composante horizontale H du champ terrestre, qu'il est nécessaire de connaître pour évaluer les courants par la boussole des tangentes, était déterminée par la méthode de Gauss, sur laquelle on reviendra plus loin, et que cette expérience ne comporte pas une grande précision.

Pour éviter l'erreur relative à la température du fil immergé dans le calorimètre (**652**), M. Flechter [1] réunit les extrémités de cette résistance R par une résistance extérieure r très grande, qui reçoit un courant dérivé i. On a alors

$$JQ = I^2 R t = I i r t.$$

La mesure du courant total $I + i$ et du courant dérivé i donne alors la résistance r ou la valeur de J par la quantité de chaleur dégagée.

M. Lippmann [2] propose encore d'éliminer la détermination préalable de J en plaçant dans un même calorimètre le moteur destiné à échauffer le liquide par frottement et le fil qui doit être traversé par le courant. Si l'expérience est réglée de façon que le moteur, animé d'un mouvement uniforme par la chute d'un poids, ou le courant I, produisent alternativement la même élévation finale de température, équilibrée par les rayonnements, l'énergie mécanique W dépensée par unité de temps sera égale à l'énergie électrique I^2R correspondante du courant, d'où l'on déduira la valeur de R.

703. Décharges induites. — Dans un circuit qui ne renferme pas de force électromotrice permanente et qui est traversé par un flux de force φ, le courant induit satisfait à l'équation différentielle (**374**)

$$RI\,dt + d(\varphi + LI) = 0.$$

La quantité d'électricité q que débite le courant, pendant le temps $t_2 - t_1$, est alors

$$R\int I\,dt = Rq = [\varphi + LI]_{t_2}^{t_1}.$$

(1) L. Flechter, *Ph. Mag.* [5], t. XX, p. 1; 1885.
(2) G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCV, p. 634; 1882.

Lorsque le courant est nul aux deux limites, ou qu'il a repris la même valeur, ainsi que le coefficient de self-induction, il reste simplement $Rq = \varphi_1 - \varphi_2$; il suffit alors de connaître la décharge q et la différence $\varphi_1 - \varphi_2$ des flux de force magnétique qui traversent la surface du circuit dans les deux positions extrêmes.

Le circuit comprend habituellement deux parties, l'une fixe, qui renferme le galvanomètre balistique, et l'autre formée par un cadre mobile de surface S.

Lorsque le cadre se déplace dans un champ uniforme, si l'on désigne par F_1 et F_2 les composantes du champ normales à la surface S pour les positions extrêmes, ces composantes étant comptées dans un même sens par rapport au cadre, la variation du flux de force est $S(F_1 - F_2)$. Si l'appareil part du repos pour arriver au repos en un temps très court, l'induction propre n'intervient pas et on a

$$(1) \qquad Rq = S(F_1 - F_2).$$

1° Une première méthode, indiquée par Weber, consiste à placer le cadre verticalement dans le champ terrestre et à le retourner face pour face, à partir d'une position perpendiculaire au méridien magnétique; la variation du flux de force est alors $2HS$ (378). Si le cadre était d'abord horizontal, le flux serait produit par la composante verticale Z et la variation due au retournement égale à $2ZS$.

Le cadre étant mobile autour d'un axe, il faut, dans le premier cas, que cet axe de rotation soit bien vertical ou du moins perpendiculaire à la composante H. S'il fait un angle $90° - \varepsilon$ avec H et un angle γ avec la verticale, la composante verticale Z intervient; en appelant I l'inclinaison, la variation du flux par retournement de 180° est alors

$$2HS\cos\varepsilon + 2ZS\sin\gamma = 2HS\cos\varepsilon\left(1 + \operatorname{tang} I\,\frac{\sin\gamma}{\cos\varepsilon}\right).$$

Tant que le défaut de réglage reste très faible, $\cos\varepsilon$ ne diffère de l'unité que par une quantité du second ordre, mais le second terme est proportionnel à l'angle γ et à la tangente de l'inclinaison; il peut ne pas être négligeable.

On doit s'assurer encore que la position primitive du cadre est perpendiculaire au méridien, en vérifiant qu'un courant qui le traverse ne produit pas d'action sensible sur une aiguille aimantée placée au centre; l'erreur commise de ce chef serait du premier ordre.

Enfin la surface S doit être parallèle à l'axe de rotation; comme elle agit par sa projection sur un plan parallèle à l'axe, l'erreur correspondante serait du second ordre.

Si l'on désigne par g la constante du galvanomètre balistique, par h la composante horizontale du champ terrestre au point où est placé cet instrument et par α l'angle d'impulsion de l'aiguille, toutes corrections faites, qui correspond à la décharge q, on a (**643**)

$$(2) \qquad R = \frac{2HS}{q} = 2Sg\frac{H}{h}\cdot\frac{\pi}{\tau\alpha}.$$

Dans ses expériences primitives ([1]), ainsi que dans celles qu'il a répétées plus tard avec Zöllner ([2]), et qui ont été calculées par M. Wiedemann ([3]), Weber employait, pour le cadre inducteur et pour le galvanomètre balistique, deux grandes bobines à peu près identiques. Dans ce cas, les valeurs de S et de g se calculent par les dimensions des bobines (**558** et **560**) et on doit encore apporter au facteur g une correction relative à la longueur de l'aiguille (**574**).

Avec des barreaux de 10^c et de 20^c de longueur, Weber et Zöllner ont obtenu des résultats différant de 0,02; ils attribuent ces écarts à l'inégalité des barreaux et, considérant l'erreur comme proportionnelle au carré de leur longueur, en déduisent la correction relative au premier. Cette estimation un peu arbitraire n'est pas en rapport avec le degré de précision des autres mesures.

On déterminait le rapport des champs H et h par les oscillations d'une aiguille; l'angle d'impulsion α était obtenu par la méthode de recul ou la méthode mixte (**542**).

Kohlrausch ([4]) a introduit dans l'expérience une modifica-

([1]) W. Weber, *Abhandl. der K. Sächs. ges.*, t. I, p. 219; 1846.
([2]) Weber et Zöllner, *Berichte der K. Sächs. Ges.*, t. II, p. 77; 1880.
([3]) G. Wiedemann, *Versuche zur Bestim. des Ohms*; 1884.
([4]) F. Kohlrausch, *Pogg. Ann.*; *Ergänz. band.*, VI, p. 1; 1874.

tion indiquée aussi par Weber. Le galvanomètre balistique est un appareil à grande sensibilité et la valeur de g est déterminée par la différence des amortissements à circuit ouvert ou fermé. L'équation (19) du n° **621** donne, en négligeant l'induction propre du circuit et supposant $\omega^2 = n^2$,

$$g^2 = \frac{2\,\mathrm{KR}}{\mathrm{M}^2}(\lambda' - \lambda) = \frac{2\,\mathrm{R}}{\mathrm{K}}\,\frac{h^2}{\omega^4}(\lambda' - \lambda),$$

$$\mathrm{R} = 4\,\mathrm{S}^2\mathrm{H}^2\,\frac{\pi^2}{\tau^2\alpha^2}\cdot\frac{2}{\mathrm{K}}\cdot\frac{\lambda' - \lambda}{\omega^4} = 8\,\frac{\mathrm{S}^2\mathrm{H}^2}{\mathrm{K}\,\omega^4}\cdot\frac{\pi^2}{\tau^2}\cdot\frac{\lambda' - \lambda}{\alpha^2}.$$

Il reste alors à connaître le moment d'inertie K du système magnétique, ainsi que la composante horizontale H; celle-ci intervient au carré, de sorte que l'erreur relative correspondante est doublée dans la valeur de R.

Nous avons trouvé plus correct [1] d'éliminer en même temps les constantes h, g et H dans l'équation (2), en comparant (**639**) le galvanomètre balistique avec une boussole des tangentes formée par le cadre inducteur lui-même. Il suffit de tourner ce cadre de 90° par rapport à sa direction primitive, d'installer au centre une aiguille aimantée et de faire passer un même courant I dans le circuit commun, avec un shunt de pouvoir multiplicateur m sur le galvanomètre balistique si les sensibilités des deux appareils sont très différentes. Les déviations respectives ainsi observées sur les deux instruments étant Δ et δ, il en résulte

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}}\,\mathrm{tang}\,\Delta = m\,\frac{h}{g}\,\mathrm{tang}\,\delta,$$

$$\mathrm{R} = 2\,\mathrm{SG}\,\frac{m\,\mathrm{tang}\,\delta}{\mathrm{tang}\,\Delta}\cdot\frac{\pi}{\tau\alpha}.$$

Les déviations δ et α du galvanomètre balistique n'entrent dans la formule finale que par leur rapport; il n'est donc pas nécessaire de déterminer avec beaucoup de soin la distance de l'échelle qui sert à les évaluer et il n'y a pas de correction à faire pour l'aiguille. La déviation Δ doit être mesurée exactement et corrigée, s'il y a lieu, de la longueur de l'aiguille.

(1) Mascart, De Nerville et Benoit, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. VI, p. 5; 1885.

Les constantes S et G sont calculées par les dimensions du cadre. En appelant a le rayon moyen, N le nombre de spires et L la longueur du fil, on a, sauf des termes de correction,

$$S = N\pi a^2, \qquad G = N\frac{2\pi}{a}, \qquad SG = 2\pi^2 N^2 a = N\pi L.$$

Les quantités qu'il importe de déterminer avec soin sont donc la longueur totale L du fil, la période τ des oscillations simples et l'angle d'impulsion α.

2° Le flux de force magnétique dans un cadre peut être produit par un courant voisin; c'est la méthode employée par Kirchhoff [1]. Si ce courant varie de I_1 à I_2, et que M désigne le coefficient d'induction mutuelle des circuits, la variation du flux de force dans le premier est $M(I_1 - I_2)$; cette variation se réduit à $\pm MI$ quand on établit ou qu'on supprime le courant latéral I, ou à $2MI$ lorsque ce courant est renversé.

Si le courant I est mesuré par la déviation β dans une boussole des tangentes, dont les constantes sont H et G, l'équation (1) devient alors

$$(3) \quad R\frac{h}{g}\frac{\tau}{\pi}\alpha = 2M\frac{H}{G}\operatorname{tang}\beta, \qquad R = 2\pi M\frac{H}{h}\cdot\frac{g}{G}\cdot\frac{\operatorname{tang}\beta}{\tau\alpha}.$$

La plupart des expériences ont été faites avec des bobines égales, à petite gorge, centrées sur le même axe. Le coefficient d'induction mutuelle M peut alors être déterminé en fonction des rayons moyens a et a' et de la distance x de leurs plans moyens (586). Si l'on fait $a' = a$, la valeur de M est une fonction de l'angle γ défini par la relation

$$\sin\gamma = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + x^2}}.$$

Comme le coefficient M est une longueur, c'est-à-dire une fonction homogène du premier degré des variables a et x, on peut écrire

$$\frac{dM}{M} = \lambda\frac{da}{a} + \mu\frac{dx}{x}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda + \mu = 1.$$

[1] Kirchhoff, *Pogg. Ann.*, t. LXXVI, p. 412; 1849.

On a, en effet, par les propriétés connues des fonctions homogènes,

$$M = f(a, x) = af_a' + xf_x', \qquad dM = f_a'\,da + f_x'\,dx;$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{af_a'}{af_a' + xf_x'} \cdot \frac{da}{a} + \frac{xf_x'}{af_a' + xf_x'} \cdot \frac{dx}{x}.$$

L'erreur relative commise sur la valeur de M se déterminera ainsi par les facteurs λ et μ en fonction des erreurs relatives sur les mesures de a et de x. La table suivante a été calculée par Lord Rayleigh (1) pour deux cercles égaux :

γ.	$\frac{x}{2a}$.	λ.	μ.	$\frac{M}{a}$.
60°	0,577	2,61	—1,61	0,316
70°	0,364	2,18	—1,18	0,597
75°	0,268	1,98	—0,98	0,828
80°	0,176	1,76	—0,76	1,186

La mesure de la distance x étant plus difficile, on répète les expériences après avoir retourné les bobines sur elles-mêmes de manière qu'elles occupent toutes les positions relatives. C'est ce qui a conduit les observateurs à employer des bobines enroulées sur des montures de bronze, afin que le repérage puisse se faire plus exactement.

Nous avons employé des bobines inégales concentriques avec leurs plans moyens en coïncidence. On a alors $x = 0$ et le calcul de M se fait par la formule (16)″ du n° **586**, ou simplement par l'expression (11)′ du n° **585**.

M. Roïti (2) a proposé de prendre comme circuit inducteur soit une longue bobine cylindrique de section S renfermant n spires par unité de longueur, soit un solénoïde circulaire de n spires par unité d'arc, en prenant pour l'induit N′ tours de fil enroulé sur la surface extérieure.

Dans le premier cas (**571**), on a sensiblement $M = 4\pi n N' S$. Dans le second cas (**405**), si x désigne le rayon de la circonférence sur laquelle se trouve un élément dS de la section, le

(1) Lord Rayleigh, *Comparaison of meth. for the determ. of resist.*; 1884.
(2) Roïti, *Atti. Ac. Torino;* 1882. — *Nuovo Cim.* [3], t. XV, p. 97; 1884.

coefficient d'induction mutuelle est

$$M = 4\pi n N' \int \frac{dS}{x}.$$

Pour un solénoïde circulaire de rayon moyen R et dont la section est un cercle de rayon a, ou un rectangle de côtés $2a$ et $2b$, on a ainsi (**266**)

$$M = 8\pi^2 n N' (R - \sqrt{R^2 - a^2}), \text{ ou } M = 8\pi^2 n N' b \mathcal{L}. \frac{R + a}{R - a}.$$

Les quantités auxiliaires h, g et H qui entrent dans l'équation (3) s'élimineront encore en comparant la boussole des tangentes avec le galvanomètre balistique, ce qui donne

$$\frac{H}{h} \cdot \frac{g}{G} = \frac{m \operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} \Delta}, \qquad R = 2\pi M \frac{m \operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \Delta} \cdot \frac{\operatorname{tang} \delta}{\tau \alpha}.$$

Les angles β et Δ, δ et α n'entrent alors dans la formule finale que par leurs rapports ; il n'est pas nécessaire de mesurer exactement la distance des échelles et les corrections relatives à la longueur des aiguilles restent très faibles.

Quoique l'emploi du shunt dans la comparaison des deux instruments présente alors toute sécurité, M. Rowland [1] et M. F. Weber [2] ont pris une disposition plus compliquée. Le galvanomètre balistique est formé de deux bobines symétriques dont la constante est g. Un cadre indépendant, formé d'un seul fil, situé dans le plan de symétrie, constitue avec la même aiguille une boussole des tangentes de constante g', les valeurs de g et g' pouvant être calculées par les dimensions des bobines.

En déterminant les déviations Δ et δ' produites par un même courant dans la boussole qui sert à mesurer le courant inducteur et dans le cadre à fil unique, on a

$$\frac{H}{h} \cdot \frac{g'}{G} = \frac{\operatorname{tang} \delta'}{\operatorname{tang} \Delta}, \qquad R = 2\pi M \frac{g}{g'} \cdot \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \Delta} \cdot \frac{\operatorname{tang} \delta}{\alpha}$$

(1) Rowland. *Am. Journ. of sc.*, p. 281, 325 et 429; 1878.
(2) F. Weber, *Phil. Mag.* [6], t. V, p. 30, 127 et 189 ; 1877.

Dans les premières expériences réalisées par cette méthode, Kirchhoff se servait du même galvanomètre pour mesurer les quantités I et q. Les bobines A et A′ (fig. 202) étaient placées dans deux parties d'un même circuit, l'une contenant la pile E, l'autre le galvanomètre G ; la résistance à mesurer R formait entre elles un pont PQ. L'expérience consistait à mesurer l'impulsion reçue par l'aiguille quand on faisait passer la bobine inductrice A de la position où elle est parallèle à A′ et

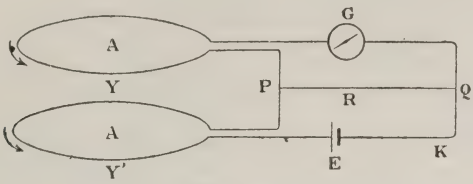


Fig. 202.

pour laquelle le coefficient d'induction mutuelle est maximum, à la position perpendiculaire où ce coefficient est nul.

En appelant r et r' les résistances des circuits A et A′, les intensités I et I′ correspondantes des courants permanents produits par la force électromotrice E sont

$$E = I'r' + (I' - I)R = I'(R + r') - IR,$$
$$0 = Ir - (I' - I)R = I(R + r) - I'R.$$

Si L et L' sont les coefficients de self-induction des deux circuits, $I + i$ et $I' + i'$ les courants relatifs à la période variable, on a alors, en tenant compte des relations précédentes,

$$i'(R + r') - iR + \frac{d}{dt}[M(I + i) + L'(I' + i')] = 0,$$

$$i(R + r) - i'R + \frac{d}{dt}[M(I' + i') + L(I + i)] = 0.$$

Les quantités q et q' d'électricité induites pendant toute la durée de l'état variable, où le coefficient d'induction mutuelle passe de M à 0, satisfont aux équations

$$q'(R + r') - qR - MI = 0,$$
$$q(R + r) - q'R - MI' = 0;$$

il en résulte

$$q = M\frac{(R+r')I' + RI}{(R+r)(R+r') - R^2} = \frac{M}{R}\cdot\frac{(R+r)(R+r') + R^2}{(R+r)(R+r') - R^2}\,I,$$

$$Rq = MI\left[1 + \frac{2R^2}{R(r+r') + rr'}\right].$$

Le courant I est déterminé par la déviation permanente δ du galvanomètre et la décharge q par l'angle supplémentaire d'impulsion α, ce qui donne finalement

$$R = \pi M\frac{\operatorname{tang}\delta}{\tau\alpha}\left[1 + \frac{2R^2}{(R+r)(R+r') + rr'}\right].$$

Si la résistance R du pont est très petite par rapport à celles des circuits, le second terme de la parenthèse est presque nul ; en tous cas, il est facile de l'évaluer.

Lorsque la déviation δ est assez faible, on peut admettre que l'arc d'impulsion à partir de la position d'équilibre est le même qu'à partir du zéro.

Au lieu d'observer un seul arc d'impulsion, M. Roïti mesure la déviation permanente produite par une succession de décharges correspondant à la rupture ou à la fermeture du circuit ; un commutateur interrompt le courant inducteur n fois par seconde et ne ferme le circuit induit sur le galvanomètre que pendant la durée d'une seule des phases variables du courant inducteur, établissement ou suppression. La déviation α relative aux décharges et la déviation δ obtenue dans le même galvanomètre par le courant inducteur I donnent alors

$$nq = \frac{H}{G}\operatorname{tang}\alpha, \qquad I = \frac{H}{G}\operatorname{tang}\delta;$$

$$R = \frac{MI}{q} = nM\frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

La méthode est ainsi ramenée au maximum de simplicité pour ce qui est du nombre des quantités à mesurer, mais elle comporte quelques incertitudes résultant de la rapidité avec laquelle se succèdent les interruptions. On peut craindre que, par suite des effets de polarisation et des extra-courants, l'intensité du courant inducteur au moment de la rupture ne dif-

fère de l'intensité relative au régime permanent; enfin, il est possible encore que l'interruption fasse perdre une partie du courant induit. Cette dernière cause d'erreur, en particulier, aurait pour effet d'augmenter le nombre trouvé pour la résistance R et, par suite, de diminuer la valeur de l'unité.

704. Amortissement des systèmes. — Les oscillations d'un aimant dans un cadre à circuit ouvert ou fermé (**621**) donneront la résistance R du circuit par l'une des expressions

$$(4) \qquad R = \frac{G^2 M}{2H} \frac{\omega^2 + \lambda^2}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda' = \frac{G^2 M}{2H} \frac{\omega'^2 + \lambda'^2}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda.$$

La valeur de L se déterminera par les dimensions du cadre ou, comme on le verra plus loin, par comparaison avec un coefficient d'induction mutuelle.

Pour le terme principal, il faut connaître la constante G du cadre, qui entre au carré, et le rapport du moment magnétique M de l'aimant à la composante H du champ terrestre. Ce rapport peut d'ailleurs s'écrire

$$\frac{M}{H} = \frac{K}{H^2}(\omega^2 + \lambda^2) = \frac{M^2}{K(\omega^2 + \lambda^2)};$$

il suffirait donc de déterminer le moment d'inertie K du système et l'une des constantes M ou H.

M. Weber négligeait le terme relatif à l'induction propre du circuit et calculait la constante G par les éléments de construction de la bobine, mais alors il faut lui donner des dimensions qui ne comportent pas un amortissement rapide, et on conçoit qu'il y ait intérêt à augmenter autant que possible l'effet qu'on veut mesurer, c'est-à-dire la différence des deux amortissements à circuit ouvert ou à circuit fermé.

Il est donc préférable de déterminer la constante G par comparaison avec un autre galvanomètre G′ de dimensions connues, en employant un shunt au besoin. Les déviations équivalentes δ et δ' dues à un même courant donnent

$$\frac{H}{G} \operatorname{tang} \delta = \frac{H'}{G'} \operatorname{tang} \delta',$$

$$\frac{G^2 M}{H} = G'^2 \frac{K}{H'^2}(\omega^2 + \lambda^2) \frac{\operatorname{tang}^2 \delta}{\operatorname{tang}^2 \delta'} = G'^2 \frac{H}{H'} \cdot \frac{M}{H'} \frac{\operatorname{tang}^2 \delta}{\operatorname{tang}^2 \delta'}.$$

La première de ces expressions, employée par M. Dorn [1], ne fait pas intervenir le moment magnétique du barreau, mais la composante H′ du champ terrestre entre au carré dans la formule, ce qui double l'erreur relative du résultat.

Avec la seconde, on déterminera le rapport des champs H et H′ par les oscillations d'une aiguille et le rapport de M à H′, comme on le verra plus loin, par la déviation que produit le barreau sur une boussole quand on le met dans une direction normale au méridien. Toutefois, il est nécessaire de remarquer alors que le barreau ne se trouve plus dans le même état que pendant les expériences d'oscillation et on peut avoir à tenir compte de l'influence du champ terrestre sur la valeur du moment magnétique.

Pour échapper à cette difficulté, M. Wild [2] place le plan du cadre à peu près perpendiculaire au méridien magnétique et ramène l'aimant dans la même direction au moyen d'une suspension bifilaire.

Soit C le coefficient du bifilaire, α l'angle du barreau avec le méridien dans la position de repère, par suite d'une erreur de réglage, et θ la torsion correspondante du bifilaire. La condition d'équilibre est

$$C \sin\theta - MH \sin\alpha = 0.$$

Pour des oscillations de faible amplitude, les angles α et θ subissent des variations égales et de signes contraires, auquel cas $d\alpha + d\theta = 0$, de sorte que le couple directeur est

$$(C \cos\theta + MH \cos\alpha)\, d\theta = MH(\cot\theta \sin\alpha + \cos\alpha)\, d\theta.$$

Comme l'angle α est très voisin de 90^0, cette expression se réduit sensiblement à $MH \cot\theta\, d\theta$.

Il faut ainsi, dans l'équation du mouvement (**621**), remplacer le couple MH par $MH \cot\theta$, ou H par $H \cot\theta$, c'est-à-dire diviser l'expression de R trouvée précédemment par $\cot\theta$. La valeur de θ déterminée par l'équation d'équilibre varie d'ailleurs avec l'angle α, c'est-à-dire avec la déclinaison, et surtout avec

[1] Dorn, *Wied. Ann.*, t. XVII, p. 773; 1882 et t, XXXVI, p. 22 et 398; 1889.
[2] H. Wild, *Mém. de l'Ac. des Sc. de Saint-Pétersb.* [7], t. XXXII; 1884.

la valeur de H, ce qui oblige à suivre d'une manière continue les variations des éléments magnétiques terrestres.

Il est digne d'attention que la méthode d'amortissement a presque toujours donné, sauf dans les dernières expériences de M. Dorn, des nombres trop élevés pour les résistances et, par suite, des valeurs trop petites pour l'unité.

On peut remarquer d'abord que le calcul suppose les déviations très petites, tandis qu'on est amené par l'expérience à observer des déviations notables pour rendre plus facile la mesure de l'amortissement qui doit être rapide ; dans ces conditions, il n'est plus permis de supposer que la constante G est indépendante de l'angle d'écart. Toutefois, les approximations faites dans le calcul, par l'hypothèse de petites déviations, ne paraissent pas fournir une explication suffisante du désaccord signalé.

L'aimantation temporaire du barreau par les courants induits eux-mêmes joue un rôle qui ne paraît pas négligeable [1], car ces courants sont très intenses.

Lorsque le barreau oscille de part et d'autre du méridien, l'aimantation temporaire est normale à sa direction, proportionnelle au champ Gi du courant induit, et peut être représentée par fGi ; si V désigne le volume de l'aimant, le moment magnétique correspondant est $fGiV$. Cette aimantation ne modifie guère l'équation $(11)'$ du n° **621** relative à l'induction, puisque le travail du courant sur l'aimant transversal est à peu près nul, mais l'action de la terre introduit dans l'équation $(13)'$ un couple $HfGiV$ de signe contraire au couple MGi, de sorte que le second membre de cette équation doit être emplacé par

$$i(MG - fHGV) = MGi\left(1 - f\frac{HV}{M}\right).$$

Il en résulte finalement que, dans l'expression (4) de la résistance R, le moment magnétique M doit être multiplié par le facteur $1 - f\frac{HV}{M}$.

Or, si A désigne l'aimantation moyenne de l'aimant, B celle

[1] Mascart, *C. R. de l'Acad. des sciences*, t. C, p. 318; 1885.

de la terre, et qu'on suppose l'expérience faite à la latitude magnétique de 45°, on a

$$M = VA, \qquad H = \frac{4}{3}\pi B \cos 45^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi B;$$

$$f\frac{HV}{M} = f\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\frac{B}{A}.$$

Il arrive souvent, en particulier pour des aimants dont la largeur relative est notable, que l'aimantation moyenne n'est pas 2000 fois plus grande que celle de la terre (**310**).

Quant au coefficient f, sa valeur dépend de la forme de l'aimant et de la nature du métal.

Pour un barreau cylindrique de grande longueur parallèle au plan de la bobine (**276**), on aurait $f = \frac{k}{1 + 2\pi k}$; la sphère donnerait $4\pi f = 3$ (**274**).

Comme le coefficient k est compris entre 30 et 40, le produit $2\pi f$, dans les deux cas, serait égal à 1 ou 1,5.

Si l'aimant est une barre rectangulaire aplatie, suivant la forme habituelle, on peut l'assimiler à un ellipsoïde. Dans le cas où les rapports du petit axe c à l'axe moyen b et de ce dernier au grand axe a sont petits, le coefficient M (**52**) relatif à l'axe moyen a pour valeur approchée

$$M = 4\pi\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b}{a} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{b^2}\,\mathfrak{L}.4\frac{b}{c}\right).$$

Pour $a = 10b$ et $b = 10c$, on a $M = 1,107$; le facteur f étant à peu près l'inverse de M, il en résulte $2\pi f = 5,6$.

Avec un aimant de cette dernière forme, dont l'aimantation est supposée 2000 fois celle de la terre, le terme de correction serait donc

$$f\frac{HV}{M} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{5,6}{2000} = 0,0013.$$

L'aimantation a souvent une valeur plus faible, de sorte que la correction peut atteindre facilement quelques millièmes; en négligeant cet effet, on doit donc obtenir une valeur trop élevée pour la résistance.

Enfin une dernière cause d'erreur, dont il est moins facile de dégager l'influence, est due aux courants induits qui se développent dans la masse de l'aimant lui-même par le fait de son déplacement dans un champ magnétique, et des variations du courant dans le cadre multiplicateur [1].

L'amortissement d'un cadre qui oscille dans un champ magnétique (**628**) fournirait encore un moyen de déterminer la résistance du circuit, mais il serait difficile de mesurer exactement la valeur du champ nécessaire pour obtenir un amortissement rapide.

705. Cadres tournants. — La rotation continue d'un cadre dans un champ magnétique, ou d'un aimant dans un cadre, produit une force électromotrice périodique et, lorsque le régime permanent est établi, le courant est lui-même périodique et alternatif.

Considérons un cadre tournant avec une vitesse angulaire constante ω dans un champ magnétique uniforme, comme le champ terrestre, dont la composante perpendiculaire à l'axe est H. Si l'on compte le temps à partir de l'époque où le cadre est perpendiculaire au champ, le flux de force qui le traverse pour le déplacement ωt est $HS \cos \omega t$ et la force électromotrice d'induction $\omega HS \sin \omega t$.

Supposons d'abord que le circuit soit ouvert et que les extrémités du fil communiquent avec un condensateur de capacité C. Représentant par E l'amplitude ωHS de la force électromotrice d'induction et par $v = V \sin(\omega t - \alpha)$ la différence de potentiel des armatures, laquelle est de même période, l'équation différentielle (**395**) du courant peut s'écrire

$$E \sin \omega t = ri + L\frac{di}{dt} - v = rC\frac{dv}{dt} + (1 - CL\omega^2)v;$$

il en résulte

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{rC\omega}{1 - CL\omega^2}, \qquad V = \frac{\omega HS}{1 - CL\omega^2}\cos\alpha.$$

Un électromètre [2] donnera le carré moyen de la différence de potentiel (**609**) et, par suite, la valeur de V^2. On mesurera

[1] Lord Rayleigh, *Wied. Ann.*, t. XXIV, p. 214; 1885.
[2] J. Joubert, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIV, p. 1519; 1892.

ensuite, par le même appareil, le rapport p de l'amplitude V à la différence du potentiel IR entre les deux extrémités d'un fil de résistance R parcouru par le courant I. Enfin, si δ est la déviation produite par le même courant I dans le cadre employé comme boussole des tangentes, on aura

$$\frac{\omega HS}{1 - CL\omega^2} \cos\alpha = pRI = pR\frac{H}{G} \operatorname{tang}\delta.$$

Le dénominateur du premier membre et $\cos\alpha$ se réduisent sensiblement à l'unité si la capacité C, qui se compose surtout de l'électromètre, est assez faible pour que les quantités $CL\omega^2$ et $rC\omega$ soient négligeables devant l'unité; il reste alors

$$R = \omega \frac{GS}{p \operatorname{tang}\delta}.$$

La résistance R que l'on mesure ainsi est distincte des appareils et il est facile d'en connaître la température.

Lorsque le circuit reste fermé et que le régime permanent est établi (393), le courant est périodique, d'amplitude I, et son carré moyen I_m^2 a pour expression

$$I_m^2 = \frac{I^2}{2} = \frac{\omega^2 H^2 S^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)},$$

ce qui donne

$$R^2 = \frac{\omega^2 H^2 S^2}{2 I_m^2} - L^2\omega^2.$$

La mesure du courant efficace I_m par un électrodynamomètre (633) ou par une méthode calorimétrique donnera la résistance R du circuit. Deux observations faites avec des vitesses différentes permettraient d'ailleurs d'éliminer le coefficient L de self-induction.

Au lieu de faire tourner le cadre, on peut encore donner un mouvement de rotation uniforme à un aimant situé au centre. Pour un angle ωt de l'aimant avec la perpendiculaire au plan du cadre, la force électromotrice d'induction serait $\omega GM \sin\omega t$; il suffit donc de remplacer dans l'expression précédente le produit HS par GM.

706. Champ moyen d'un cadre tournant. — Ces méthodes n'ont pas été appliquées pour la mesure des courants alternatifs, mais elles conduisent à une expérience plus simple.

On peut remarquer, dans le cas du cadre tournant, que le courant a toujours la même direction dans un azimut donné, bien qu'il change de sens par rapport au circuit à chaque demi-révolution; le champ magnétique du courant induit en chaque point varie périodiquement, mais la résultante n'est pas nulle. Comme le courant est maximum, sauf un retard dû à des effets secondaires, quand le cadre est parallèle au champ extérieur, la direction de cette résultante, au centre du cadre, est à peu près perpendiculaire à la composante H du champ extérieur; une aiguille aimantée placée en ce point sera donc déviée de sa position primitive.

Soit α la déviation de l'aiguille et x l'azimut du cadre. Si on tient compte de la direction réelle du courant et du champ de l'aiguille, le flux de force qui traverse le circuit est

$$\mathrm{HS}\sin x + \mathrm{MG}\cos(x-\alpha),$$

et la force électromotrice d'induction

$$[\mathrm{HS}\cos x + \mathrm{MG}\cos(x-\alpha)]\frac{dx}{dt} = \mathrm{HS}\,\omega\left[\cos x + \frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}}\cos(x-\alpha)\right].$$

On a d'ailleurs $\frac{di}{dt} = \omega\frac{di}{dx}$; en posant $\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}} = k$, l'équation du courant devient

$$L\omega\frac{di}{dx} + \mathrm{R}i = \mathrm{HS}\,\omega[\cos x + k\cos(x-\alpha)].$$

Si la rotation est uniforme et assez rapide, par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille, pour que celle-ci prenne une déviation permanente lorsque le régime est établi, les quantités ω et α sont des constantes; l'équation différentielle a une solution de la forme $i = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ et devient, après substitution,

$$(\mathrm{RA} + L\omega\mathrm{B} - \mathrm{HS}\,\omega)\cos x + (\mathrm{RB} - L\omega\mathrm{A})\sin x = \mathrm{HS}\,\omega k\cos(x-\alpha).$$

Cette équation doit être satisfaite à toute époque, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de x; il en résulte

$$\mathrm{RA} + L\omega\mathrm{B} = \mathrm{HS}\omega(1 + k\cos\alpha),$$
$$\mathrm{RB} - L\omega\mathrm{A} = \mathrm{HS}\omega k\sin\alpha;$$
$$\mathrm{A}(\mathrm{R}^2 + L^2\omega^2) = \mathrm{HS}\omega[\mathrm{R}(1 + k\cos\alpha) - L\omega k\sin\alpha],$$
$$\mathrm{B}(\mathrm{R}^2 + L^2\omega^2) = \mathrm{HS}\omega[\mathrm{R}k\sin\alpha + L\omega(1 + k\sin\alpha)].$$

Le couple produit par le courant induit sur l'aiguille est la moyenne des valeurs de $\mathrm{MG}i\cos(x - \alpha)$ relatives aux positions du cadre pendant une demi-révolution, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{MG}}{\pi}\int_0^{\pi}(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x)\cos(x - \alpha)\,dx = \frac{\mathrm{MG}}{2}(\mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha).$$

Comme l'aiguille est soumise en même temps à l'action du champ, la condition d'équilibre est

$$\mathrm{G}(\mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha) = 2\mathrm{H}\sin\alpha,$$

ou, en remplaçant A et B par leurs valeurs,

$$\mathrm{R}^2 + L^2\omega^2 = \frac{\mathrm{GS}\omega}{2}\left[\mathrm{R}\,\frac{k + \cos\alpha}{\sin\alpha} + L\omega\right],$$
$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{GS}\omega}{2}\left(\frac{k + \cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{L\omega}{\mathrm{R}}\right) - \frac{L^2\omega^2}{\mathrm{R}}.$$

Les termes qui renferment le coefficient L sont très petits; on peut donc y substituer à la résistance R la valeur approchée $\mathrm{R}_0 = \frac{\mathrm{GS}\omega}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. Remplaçant k par $\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}}$, il reste finalement

$$(5)\qquad \mathrm{R} = \mathrm{R}_0 + \frac{\mathrm{G}^2}{2}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}\,\frac{\omega}{\sin\alpha} + L\omega\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{L^2\omega^2}{\mathrm{R}_0}.$$

Dans cette expression, le terme principal R_0 comprend, outre la déviation observée et la vitesse angulaire, le produit GS qu'on déduit des dimensions du cadre. Le second terme exige que l'on connaisse le rapport du moment magnétique de l'aiguille au champ terrestre; ce rapport est petit et peut être évalué avec toute l'approximation désirable.

Les deux autres termes renferment le coefficient de self-induction du cadre; on pourrait bien éliminer ce coefficient à l'aide des résultats fournis par deux expériences à vitesses de rotation différentes, mais il vaut mieux le calculer directement ou le déterminer par comparaison avec un coefficient d'induction mutuelle. C'est par suite d'une erreur commise dans les premiers calculs que la valeur de l'ohm adoptée par le Comité de l'Association Britannique s'est trouvée un peu trop éloignée de la vérité.

Au lieu de faire tourner le cadre dans le champ terrestre autour d'une verticale, on pourrait aussi mettre l'axe de rotation horizontal [1]; la composante efficace H' est alors la projection du champ sur un plan perpendiculaire à l'axe, ce qui donne, en appelant α l'angle que fait ce plan avec le méridien magnétique,

$$H'^2 = Z^2 + H^2 \cos^2 \alpha = Z^2 (1 + \cot^2 I \cos^2 \alpha).$$

Les conditions les plus simples sont celles où l'axe de rotation est dans le méridien, auquel cas $H' = Z$. Abstraction faite de l'induction propre, le changement de sens du courant se fait dans le plan horizontal; l'action électromagnétique sur le centre est à chaque instant perpendiculaire au plan du cadre et la résultante dans une direction horizontale perpendiculaire à l'axe. Tant que l'aiguille reste dans le méridien, il n'y a pas de variation dans le flux émané de l'aiguille relativement au cadre, et par suite pas d'induction de la part de l'aiguille; cet effet peut être considéré comme négligeable, si la déviation reste très petite.

Toutefois, l'induction propre du cadre amène une complication nouvelle; le changement de sens du courant se fait en réalité hors du plan horizontal et la composante efficace doit être multipliée par un cosinus dont la détermination exacte présente des difficultés. On perd ainsi le plus grand avantage de la première disposition.

Le Comité de l'Association Britannique a utilisé cette méthode en faisant tourner un cadre autour d'un axe vertical dans le champ terrestre. Les premières expériences ont été

[1] H. F. Weber, *Der absol. Werth. der S. Q. U.*, Zurich; 1884.

réalisées en 1863 et 1864 [1]; différentes causes d'erreur ayant paru mettre en doute l'exactitude des résultats, l'expérience a été reprise avec des soins particuliers par Lord Rayleigh et M. Schuster [2], puis par Lord Rayleigh [3].

Le cadre tournant est formé de deux bobines identiques laissant entre elles l'espace nécessaire pour y placer l'appareil de suspension de l'aiguille; le cadre est en cuivre, mais composé de deux parties séparées par de l'ébonite, de manière à mettre obstacle aux courants induits dans la masse.

Dans les premières expériences, on employait un régulateur de vitesse et un compteur de tours; dans les dernières, lord Rayleigh mesurait la vitesse par un procédé stroboscopique. L'axe porte un disque de carton sur lequel sont tracés cinq cercles concentriques divisés en dents alternativement blanches et noires, respectivement au nombre de 60, 32, 24, 20 et 16. On observe ce disque de loin, à l'aide d'une lunette, à travers un système de fentes parallèles portées par la branche d'un diapason qui oscille devant un écran fixe portant un système de fentes identiques. Le diapason faisant 127 oscillations simples par seconde, si les dents d'un des cercles paraissent immobiles, c'est qu'elles se substituent l'une à l'autre pendant l'intervalle exact d'une ou de plusieurs oscillations. L'observateur qui a l'œil à la lunette peut maintenir la vitesse absolument constante par le simple frottement de la main sur une des cordes qui servent à transmettre le mouvement.

L'aiguille, soutenue par un fil de cocon, était mise par un tube en verre à l'abri des courants d'air extérieurs. On avait donné à cette aiguille un moment magnétique extrêmement faible, parce qu'il intervient comme terme de correction. Dans les expériences du comité, elle était formée d'une petite sphère d'acier de $0^c,8$ de diamètre, pesant environ 2 grammes, et son aimantation n'était guère que le quarantième de celle que peut recevoir l'acier. Son moment était égal à celui que prendrait un fil de fer doux de 10 grammes dans le champ terrestre. Le poids de l'équipage formé par l'étrier et le miroir était relativement considérable et donnait une période d'os-

(1) *Brit. Assoc. Reports;* Newscastle, 1863 et Bath, 1864.
(2) Lord Rayleigh et A. Schuster, *Proc. of the R. S. L.*, t. XXXII, p. 124; 1881.
(3) Lord Rayleigh, *ibid.*, t. XXXIII, p. 398; 1882.

cillation d'environ 10^s, c'est-à-dire au moins 30 fois plus grande que celle de l'aiguille libre.

Quand il s'agit de mesurer une déviation, la petitesse de l'aiguille et la faiblesse de son moment magnétique n'ont en théorie aucune influence sur l'exactitude du résultat; mais l'action directrice est alors très faible et la torsion du fil peut intervenir pour une part notable. En outre, diverses causes, telles que les courants d'air produits par les variations de température dans la cloche qui renferme le système mobile, suffisent à troubler l'équilibre.

Il importe surtout que l'axe magnétique reste absolument invariable, et sous ce rapport la forme sphérique n'est pas la plus avantageuse. On l'avait choisie à cause de cette propriété qu'une sphère aimantée uniformément exerce la même action extérieure qu'un aimant infiniment petit placé en son centre, mais on peut atteindre très sensiblement le même résultat avec un cylindre dont le carré du rapport de la longueur au diamètre soit égal à 1,5.

Lord Rayleigh a trouvé préférable de substituer à la sphère un système de quatre petites aiguilles de $0^c,5$ de longueur, satisfaisant à la condition précédente, montées parallèlement sur les quatre arêtes d'un petit cube de liège.

Les expériences du comité présentent quelques anomalies dont la plus grave est que les différences des valeurs obtenues s'élèvent en moyenne à 3 pour cent, suivant que le cadre tourne dans un sens ou dans l'autre. Ce résultat ne peut s'expliquer par une torsion préalable du fil de suspension, car cette torsion aurait dû être telle que la position d'équilibre de l'aiguille eût fait un angle de 12°, et même de 26°, dans certains cas, avec le méridien magnétique.

Des anomalies analogues, quoique beaucoup plus faibles, se sont manifestées dans les expériences de 1881. M. Kohlrausch avait indiqué, comme une des causes possibles, les courants induits dans le bâti métallique de l'appareil. Pour répondre à cette objection, les différentes pièces du bâti ont été coupées, isolées les unes des autres, et on pouvait à volonté rétablir entre elles les communications; l'expérience a montré que les courants induits n'ont qu'une influence négligeable, qui parait tendre à diminuer la déviation.

707. Forces électromotrices instantanées. — Si le circuit reste ouvert, dans l'expérience du cadre tournant, l'induction établit une différence de potentiel entre les extrémités du fil. Comme la capacité de ce fil est très petite s'il ne communique pas avec des condensateurs, le courant est toujours très faible et le terme relatif au coefficient de self-induction négligeable. Dans ce cas, la différence de potentiel des extrémités du fil est égale à chaque instant à la force électromotrice $\omega HS \cos x$ produite par le champ, et elle prend sa valeur maximum quand le cadre passe dans le plan du méridien.

En comparant cette force électromotrice par une méthode d'opposition avec la différence de potentiel de deux points séparés par une résistance R sur un circuit qui est parcouru par un courant constant I, on aura

$$RI = \omega HS \cos x. \tag{6}$$

Il en est de même si on fait tourner un aimant au centre du cadre maintenu immobile et dont le circuit reste ouvert ; la différence de potentiel $\omega GM \cos x$ aux extrémités du fil pourra aussi être déterminée par une méthode d'opposition.

Dans les deux cas, la force électromotrice constante RI doit être opposée pendant un temps très court à la force électromotrice variable d'induction et la mesure de I donnera la valeur de R. Il est important de remarquer que l'on n'a pas à faire intervenir la résistance du circuit ni la résistance nécessairement variable des points de contact.

M. Carey-Foster [1], à qui l'on doit le principe de cette méthode, l'appliqua seulement à titre d'essai.

On réglait par tâtonnements le courant I, évalué par un galvanomètre quelconque, la résistance R ou la vitesse de rotation du cadre, pour qu'il y eut équilibre au moment du passage dans le méridien. On utilisait ensuite le cadre comme boussole des tangentes, en mesurant la déviation δ produite par le même courant I ; l'équation (6) donne alors

$$R \frac{H}{G} \operatorname{tang} \delta = \omega HS, \qquad R = \omega \frac{GS}{\operatorname{tang} \delta}.$$

[1] Carey-Foster, *Brit. Ass. Rep.*; 1881, p. 2.

L'expérience paraît ainsi très simple. Il est vrai que la capacité du fil n'est pas négligeable, en toute rigueur, surtout si la bobine comprend un grand nombre de spires. Dans ce cas (**393**), la différence de potentiel maximum V des extrémités ne correspond pas au passage dans le méridien et n'est pas égale à l'amplitude ωHS de la force électromotrice, mais une discussion plus complète des données du problème montre que cette cause d'erreur n'a pas d'influence appréciable [1].

Si le champ dans lequel tourne le cadre est produit par le courant même I sur le trajet duquel on prélève la résistance R, l'équation (6) devient, pour $x = 0$, en appelant M le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits,

$$RI = \omega MI, \qquad R = \omega M.$$

M. Wuilleumier [2] a employé cette disposition, indiquée par M. Lippmann, en plaçant le cadre au centre d'une bobine cylindrique. La rotation était produite par un moteur Gramme muni d'un frein que l'observateur tient à la main et la vitesse réglée, par un procédé stroboscopique, sur un diapason entretenu électriquement ; l'équilibre était constaté par un électromètre capillaire.

Si l'axe de la bobine est parallèle au méridien magnétique, le champ terrestre s'ajoute à celui du courant. Deux expériences avec des courants de sens contraires donneront ainsi des résistances R_1 et R_2 telles que

$$R_1 I = \omega(MI + HS), \qquad R_2 I = \omega(MI - HS);$$

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = \omega M.$$

Le champ terrestre n'a plus d'influence si l'axe de la bobine est perpendiculaire au méridien.

Au lieu de calculer la valeur de M par les dimensions de la bobine, on remarquera que si elle était indéfinie avec n tours par unité de longueur, on aurait $M = 4\pi n S$ (**571**).

Pour éliminer la correction relative aux faces terminales,

(1) G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIII. p. 813 et 955; 1881 et t. XCVI, p. 1348; 1883. — M. Brillouin, *ibid.*, t. XCIII, p. 845 et 1069.

(2) H. Wuilleumier, *Journ. de phys.* [2], t. IX, p. 220; 1890.

il suffit encore (**651**) de recommencer l'expérience en plaçant la bobine dans deux positions nouvelles, qui font suite de part et d'autre à la position précédente, en déterminant les résistances additionnelles d'équilibre r et r_1, et de répéter ces épreuves successives jusqu'à ce que l'effet soit insensible; on aura finalement

$$R + r + r' + \ldots + r_1 + r'_1 + \ldots = \omega 4\pi n S = \frac{8\pi^2}{T} n S.$$

Les résistances r et r_1, r' et r'_1,..., relatives à des opérations symétriques, sont respectivement égales si le cadre a été centré dans la première expérience.

708. Forces électromotrices constantes.— Supposons encore, comme dans l'expérience de Faraday (**379**), qu'on fasse tourner dans un champ magnétique un disque métallique de rayon a, dont le centre est réuni par un fil conducteur à un ressort qui frotte sur le contour.

Si le champ est uniforme et que X en désigne la composante parallèle à l'axe, la force électromotrice induite, pour une vitesse angulaire ω constante, est

$$e = \frac{\omega a^2}{2} X.$$

Si le champ n'est pas uniforme, on remplacera X par sa valeur moyenne X_m relative à la surface, laquelle s'obtient très facilement (**573**) par l'expression du champ en chaque point lorsque le système magnétique est de révolution autour de l'axe de rotation.

Dans tous les cas, si le champ est produit par un courant extérieur I dont le coefficient d'induction mutuelle par rapport au contour du disque est M, le flux d'induction dans la surface est

$$\varphi = \pi a^2 X_m = MI,$$

ce qui donne, pour la force électromotrice induite,

$$e = \frac{\omega}{2\pi} MI = \frac{MI}{T}.$$

On mesurera la force électromotrice e en l'équilibrant par

la différence de potentiel RI' qui existe entre les deux extrémités A et B d'une résistance R, traversée par un courant constant I', et choisie de manière que le courant soit nul dans le circuit dont le disque fait partie. L'équilibre est encore indépendant de la résistance nécessairement variable des contacts glissants, et on a

$$RI' = \frac{MI}{T}.$$

Enfin, on évitera toute mesure d'intensité en faisant $I' = I$, c'est-à-dire en prenant la résistance R sur le circuit même du courant I de la bobine inductrice.

L'expérience se réduit ainsi à la mesure d'une longueur et d'un temps; il suffit alors de calculer le coefficient M et de déterminer la période T de la rotation qui établit l'équilibre. Cette méthode ingénieuse est due à Lorenz [1].

Les difficultés de l'expérience tiennent, d'une part à la petitesse de la force électromotrice induite et, d'autre part, à la grandeur relative des forces thermoélectriques qui naissent au contact des pièces glissantes. On atténue ces dernières en formant les ressorts de contact avec le même métal que le disque; si elles sont sensiblement constantes, on peut alors éliminer leur effet d'une manière à peu près complète en prenant les moyennes des résultats obtenus pour deux directions inverses du champ inducteur.

D'autre part, la petitesse de la force électromotrice exige que la résistance R soit très faible. Pour éviter les erreurs qu'entraîne la comparaison toujours délicate de résistances trop inégales, Lorenz opérait directement sur des colonnes de mercure renfermées dans des tubes de 2 à 3 centimètres de diamètre soigneusement calibrés, de manière à pouvoir en déduire par un simple calcul la valeur de l'unité mercurielle. Les résistances employées ont varié de $0^{\omega},0002$ à $0,0015$. Ces colonnes de mercure doivent d'ailleurs être placées dans des bains que l'on maintient à température constante.

Lord Rayleigh et Mrs Sidgwick [2] tournent la difficulté par une sorte de multiplication. Deux points A et B du circuit

[1] Lorenz, *Pogg. Ann.*, t. CXLIX, p. 251; 1873. — *Wied. Ann.*, t. XXV, p. 1; 1885.
[2] Lord Rayleigh et Mrs Sidgwick, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1883, p. 245.

principal étant séparés par une résistance R supérieure à celle qui conviendrait pour l'équilibre, on les joint par une dérivation de résistance notablement plus grande r. On cherche ensuite sur la dérivation quelle est la résistance r', à partir du point A, qu'on doit interposer entre les électrodes communiquant aux ressorts du disque pour établir l'équilibre.

Le courant principal étant I et le courant de dérivation i, on a $(I - i)\,R = ir$ et la différence de potentiel qui correspond à la résistance r' est

$$ir' = I\,\frac{R}{R + r}\,r',$$

ce qui donne, pour la condition d'équilibre,

$$\frac{M}{T} = R\,\frac{r'}{R + r}.$$

Si la dernière fraction est égale à 0,01 par exemple, la résistance R comprise entre les points A et B sera 100 fois plus grande que si l'on avait établi un contact direct.

L'erreur commise dans le calcul de M provient surtout de l'évaluation du rayon moyen a de la bobine; le rayon a' du disque peut être connu avec une exactitude beaucoup plus grande. Dans ses premières expériences, Lorenz avait donné à a' une valeur trop peu différente de a; comme l'intensité du champ croît très rapidement au voisinage des spires, la moindre erreur commise sur le rayon entraîne une erreur considérable sur le coefficient M. Dans ses dernières expériences, il plaçait le disque dans le champ sensiblement uniforme d'une bobine longue. Celle-ci était formée d'une seule couche de fil comprenant 472 spires enroulées sur un cylindre en laiton de 100^c de longueur et 33^c de diamètre. Le calcul était fait par une formule analogue à celle du n° **571**, 3°.

Lord Rayleigh employait deux bobines sensiblement identiques placées soit au contact, soit à une distance $2x = a\sqrt{2}$. Avec cette dernière disposition, l'erreur relative de M est à peu près indépendante de celle qu'on a commise sur l'évaluation du rayon moyen et dépend surtout de l'exactitude avec laquelle on évalue la distance $2x$, quantité beaucoup

plus facile à mesurer. En effet, si chacune des bobines renferme N spires et qu'on prenne pour valeur approchée

$$M = 4N\pi^2 \frac{a^2 a'^2}{u^3},$$

on en déduit, en tenant compte de la relation $u^2 = a^2 + x^2$,

$$\frac{dM}{M} = 2\frac{da}{a} + 2\frac{da'}{a'} - 3\frac{du}{u} = \left(2 - 3\frac{a^2}{u^2}\right)\frac{da}{a} + 2\frac{da'}{a'} - 3\frac{x^2}{u^2}\cdot\frac{dx}{x}.$$

Une erreur commise sur a n'intervient pas au premier ordre pour la condition $2u^2 = 3a^2$, ou $2x^2 = a^2$.

709. Résumé des expériences. — L'Association Britannique a fait construire un certain nombre d'étalons de résistance réglés d'après les expériences qu'elle avait instituées pour déterminer la valeur de l'ohm. La comparaison de ces étalons B.A.U. avec la résistance d'une colonne de mercure a montré que le rapport de l'unité mercurielle (100^c de longueur et 1^{mmq} de section) à l'unité B.A.U. est 0,95412 d'après Lord Rayleigh et 0,95374 d'après M. Benoît. Comme les copies ne sont jamais rigoureusement identiques, on peut adopter la valeur moyenne 0,95393 ; il en résulte

$$\text{B.A.U.} = \frac{100^c}{0{,}95393} = 104^c{,}83.$$

La mesure des résistances paraît aujourd'hui comporter plus d'exactitude que celle de la quantité de chaleur produite par un travail mécanique. Il semble donc que les méthodes calorimétriques doivent être considérées plutôt comme un moyen indirect de déterminer l'équivalent mécanique de la calorie. Malgré les nombreux travaux faits sur cette question par les plus habiles expérimentateurs [1], on ne pourrait pas affirmer encore que l'équivalent de la calorie soit connu à moins d'un millième près de sa valeur.

Si on rapporte les calculs à la chaleur spécifique de l'eau pour la température de 15°, les nombres obtenus varient de

[1] Voir en particulier C. Miculescu, *Ann. de Ch. et de Phys.* [6], t. XXVII, p. 202 ; 1892. — E. H. Griffiths, *Phil. Mag.* [5], t. XL, p. 431 ; 1895.

$4,17.10^7$ à $4,23.10^7$; il est très probable que l'équivalent de la calorie diffère extrêmement peu de $4,191.10^7$, valeur très voisine de celle (4,189) qui a été obtenue par M. Rowland.

L'emploi d'une force électromotrice d'induction a donné lieu à beaucoup d'expériences, dont une partie a été décrite dans la discussion qui précède ; il n'est pas inutile de passer rapidement en revue les différentes méthodes, pour signaler celles qui paraissent mériter le plus de confiance au point de vue expérimental.

La rotation d'un cadre de 180° présente des difficultés spéciales. L'opération doit être faite en un temps très court par rapport à la période des oscillations du galvanomètre balistique; le départ et l'arrêt brusque de la masse qu'il faut mettre en mouvement exigent des dispositions mécaniques particulières et causent un ébranlement des appareils; enfin, les positions de repère doivent être exactement dans le méridien et l'axe de rotation vertical.

L'expérience n'est plus sujette aux mêmes causes d'erreur quand l'induction est produite par un courant auxiliaire.

L'amortissement des aimants avait donné d'abord des nombres manifestement trop faibles, mais les corrections ultérieures, faites avec plus de soin, ont rapproché les résultats de ceux que fournissaient les autres méthodes.

Enfin la force électromotrice produite dans un cadre tournant, suivant qu'on en détermine le champ moyen ou la valeur instantanée, et la méthode si simple de Lorenz ne paraissent pas donner lieu à des objections fondées, dans l'état actuel de la science.

Une circonstance dont on n'a pas toujours tenu compte d'une manière suffisante et sur laquelle L. Rayleigh [1] a appelé l'attention, est le défaut d'isolement des spires des bobines. Cette cause d'erreur peut être très importante lorsque la force électromotrice d'induction est variable ; il est possible que l'isolement laisse alors beaucoup à désirer, tandis qu'il serait suffisant pour des courants faibles et continus.

Dans le cas plus simple où un contact existerait entre deux ou plusieurs spires consécutives du circuit induit, l'inexacti-

[1] Lord Rayleigh, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1883, p. 221.

tude du résultat correspond évidemment à une erreur d'une ou plusieurs unités sur le nombre des spires ; elle a pour effet d'augmenter la valeur numérique de la résistance observée et de diminuer celle de l'unité. Un effet de même sens se produit lorsque le défaut d'isolement est variable avec la force électromotrice.

Il est facile de voir que la plupart des causes d'erreur tendent à diminuer les effets produits par l'induction ; à ce point de vue, les nombres les plus élevés obtenus pour l'unité de résistance seraient les plus probables.

Lors des discussions qui ont eu lieu dans la Conférence de Paris en 1884, il semblait déjà que la longueur de la colonne de mercure à zéro ayant un millimètre carré de section, dont la résistance est égale à un ohm, ou 10^9 unités C.G.S., devait être comprise entre $106^c,25$ et $106^c,30$ et plus voisine de ce dernier nombre; c'est ce que les expériences ultérieures ont confirmé. Les résultats les plus dignes de confiance sont compris entre les valeurs extrêmes 106,32 et 106,27.

Sans discuter chacune de ces expériences en elle-même, on jugera sans doute que le choix définitif de $106^c,30$ par la chambre des Délégués de Chicago (**421**) pour définir l'*ohm international* paraît pleinement justifié. L'étalon B.A.U. vaudrait alors, en ohm international,

$$\frac{104,83}{106,30} = 0,98617 = \frac{1}{1,014}.$$

CHAPITRE QUATRIÈME

FORCES ÉLECTROMOTRICES

710. Couples étalons. — On n'est pas encore parvenu à réaliser un étalon défini et invariable de force électromotrice, comme pour les résistances; on est donc obligé, faute de mieux, de recourir aux couples électriques qui renferment des éléments liquides.

Le *couple Daniell* à sulfates est très souvent employé, mais il faut prendre diverses précautions pour empêcher le mélange des deux dissolutions ou pour éviter les vases poreux; tel est l'étalon de Lord Kelvin, où les liquides sont simplement superposés en raison de leurs densités. Dans tous les cas, il est nécessaire de renouveler les liquides quand on veut procéder à une nouvelle série de mesures.

La force électromotrice dépend de la densité des dissolutions. Avec du sulfate de cuivre saturé et du sulfate de zinc de richesse croissante, M. Carhart (1) a constaté que la force électromotrice varie de $1^{volt},04$ pour l'eau pure à un maximum de 1,137 pour du sulfate de zinc à 5 °/₀; elle diminue lentement jusqu'à 1,111 pour une dissolution de sulfate à 10 °/₀ et reste ensuite constante.

Toutefois, pour une même richesse des liquides, il se manifeste encore des différences de 2 à 3 °/₀, qui tiennent sans doute à l'inégale pureté des métaux (2).

Les variations de température n'ont pas d'influence, d'après von Helmholtz (3), quand la solution de sulfate de cuivre est

(1) H. S. Carhart, *Amer. Journ. of science*, t. XXVIII, p. 374; 1884. — *Journ. de Phys.* [2], t. IV, p. 98; 1885.

(2) L. Rayleigh, *Ph. Trans. R. S. L.*; 1884, part. II, p. 359.

(3) Helmholtz, *Sitz. der K. A. der Wissench., Berlin*, p. 26; 1882.

saturée et que celle du sulfate de zinc a pour densité 1,04; la force électromotrice décroît quand la température augmente, pour les dissolutions de zinc plus concentrées, et varie en sens contraire pour les dissolutions plus étendues.

La lumière semble avoir une influence encore plus grande que celle de la température. M. Pellat [1] a reconnu que le siège de cette action est sur la lame de cuivre et qu'elle est due aux radiations les plus réfrangibles; elle peut abaisser la force électromotrice de 1 à 2 %.

Dans le modèle de Lord Kelvin à sulfates concentrés et superposés, la force électromotrice est très sensiblement égale à $1^{volt},074$ pour la température de 15°.

Au lieu d'employer ce couple en circuit ouvert, il est préférable de prendre comme étalon la différence de potentiel des deux pôles quand ceux-ci sont réunis par une résistance de 250 ohms. Cette différence augmente d'abord pendant quelques heures après la fermeture du circuit, mais elle devient ensuite d'une constance remarquable.

Le *couple Latimer Clark* est presque entièrement formé de matières solides, ce qui en rend le transport et la conservation plus faciles. Les éléments qui le constituent sont les suivants : zinc, sulfate de zinc, sulfate de mercure et mercure.

On prépare une dissolution concentrée de sulfate de zinc dans l'eau bouillante; on ajoute dans la dissolution refroidie du sulfate de protoxyde de mercure jusqu'à formation d'une pâte épaisse et on maintient ensuite ce mélange pendant quelque temps à la température de 100°. La pâte est versée à la surface du mercure pur préalablement chauffé et un bâton de zinc pur y est encastré. Les électrodes extérieures sont formées de fils de platine reliés au zinc et au mercure. A cause même de son état physique, le couple se polarise facilement, mais il ne tarde pas à reprendre sa force électromotrice primitive; si les matières employées sont bien pures, les modèles ainsi construits ne diffèrent pas entre eux d'un millième. Sous cette forme, on n'a plus à craindre la diffusion des dissolutions et le couple, une fois monté et scellé dans le verre, est toujours prêt à servir. A la température de 15°, la force électromotrice est de $1^{volt},434$.

[1] Pellat, *C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. LXXXIX, p. 222; 1879.

La force électromotrice du couple L. Clark diminue quand la température s'élève. Les valeurs du coefficient de variation d'après différents physiciens, oscillent de 0,00041 à 0,00082; ces différences peuvent tenir au mode de construction, mais aussi à une évaluation inexacte de la température très difficile à connaître à cause de l'état physique du couple. En déterminant la température avec les plus grandes précautions, M. Pellat trouve que ce coefficient est constant entre 0° et 25° et égal à 0,000781; on aurait donc

$$E_0 = \frac{1^{\text{volt}},434}{1 - 0,000781.15} = 1^{\text{volt}},451.$$

Il semble résulter encore des expériences de MM. Ayrton et Cooper [1], que la force électromotrice n'a pas la même valeur, à une température déterminée, suivant que le couple s'échauffe ou se refroidit. Ces modifications sembleraient indiquer une sorte de retard ou d'hystérésis, comme pour l'aimantation; en outre, on ne retrouve pas exactement la force électromotrice primitive en revenant à la température initiale. Toutefois, les changements sont assez faibles pour qu'il n'y ait pas à en tenir compte quand l'exactitude des expériences est de l'ordre du millième.

M. Gouy [2] a proposé un couple formé de zinc amalgamé, solution de sulfate de zinc au dixième contenant du bioxyde de mercure précipité, et mercure. Le tout est enfermé dans un flacon en verre clos où des électrodes de platine, scellées à la lampe, communiquent au zinc et au mercure.

Ce couple a une très grande résistance, de 1000 à 2000 ohms. Quand on le ferme sur lui-même, il se polarise très lentement, mais il reprend par simple agitation sa valeur primitive à moins de 0,001. Une centaine de couples construits de cette manière n'ont présenté avec la moyenne que des écarts inférieurs à 0,0005 et les différences individuelles, sauf quelques accidents, n'atteignent pas 0,001.

La force électromotrice diminue encore quand la température s'élève, mais beaucoup moins que pour le couple L. Clark;

(1) W. E. Ayrton et W. R. Cooper, *Proced. L. R. S.*, t. LIX, p. 368; 1896.
(2) Gouy, *Journ. de Phys.* [2], t. VII, p. 532; 1888.

elle peut être représentée à la température t par la formule

$$E = E_0(1 - 0{,}0002\,t) = 1{,}3944(1 - 0{,}0002\,t).$$

Le couple de MM. Baille et Féry [1] est constitué par une tige de plomb placée dans un tube de verre recourbé rempli de chlorure de plomb pulvérisé, le tout dans une dissolution de chlorure de zinc de densité 1,157 où plonge une tige de zinc amalgamé. La force électromotrice varie avec la richesse de la solution de zinc, de $0^v{,}55$ à $0^v{,}46$; elle est sensiblement égale à un demi-volt pour la densité adoptée. La polarisation est plus grande que dans le couple Daniell, mais la force électromotrice reprend rapidement sa valeur normale.

Pour fractionner la force électromotrice d'un couple, il suffit de le fermer par une très grande résistance, afin que la polarisation soit insensible : entre deux points qui comprennent une fraction de cette résistance, la différence de potentiel est la même fraction de la force électromotrice totale.

Une boîte de résistances (**657**) permet de réaliser cette expérience d'une manière très simple. Les chevilles ordinaires étant placées sur le n° 9 de chaque cadran, on réunit l'étalon aux bornes extrêmes, en y joignant l'unité supplémentaire, ce qui intercale une résistance de 10 000 ohms. Si on place dans les plaques des couronnes deux chevilles auxiliaires séparées par une résistance de n ohms, la différence de potentiel de ces chevilles est une fraction égale à n dix-millièmes de celle des bornes extrêmes ou, sensiblement, de la force électromotrice étalon.

Lorsque les boîtes ne permettent pas la prise de résistances partielles, on joint bout à bout deux boîtes différentes dont les bornes extrêmes sont réunies à l'étalon. Avec n unités sur la première boîte et n' unités sur la seconde, la résistance totale est $N = n + n'$ et la différence de potentiel des bornes de la première est une fraction égale à $\frac{n}{n+n'} = \frac{n}{N}$ de celle des bornes extrêmes. On change en même temps les deux nombres n et n', de manière que la somme $n + n' = N$ reste constante, par exemple de 10 000 ohms.

[1] Baille et Féry, *Journ. de Phys.* [2], t. IX, p. 234; 1890.

711. Mesures électrostatiques. — Les forces électromotrices peuvent être déterminées, en valeurs absolues ou relatives, par les différentes méthodes indiquées pour la mesure des différences de potentiel. Quand il s'agit des piles et des courants permanents, ces méthodes sont, en général, plus simples que dans les expériences d'électrostatique, parce que les appareils sont alors des sources d'électricité et que les pertes dues aux communications sont aussitôt réparées, de sorte qu'il n'y a pas, en général, à tenir compte de la capacité des corps qui interviennent.

Remarquons encore que, pour les mesures absolues, les méthodes électrostatiques donnent des résultats évalués dans le même système et que, si l'on veut passer d'un système à l'autre, il est nécessaire de connaître le rapport des unités. Lord Kelvin [1], par exemple, a trouvé qu'un couple Daniell employé dans certaines expériences valait 0,00374 en unités électrostatiques. Si on admet 3.10^{10} pour le rapport des unités, ce résultat correspond à $0{,}00374 \times 3.10^{10} = 1{,}12.10^{8}$ en unités électromagnétiques, ou 1,12 volts.

712. Piles ouvertes. — Méthode d'opposition. — Pour les piles à liquides, on doit considérer la force électromotrice à deux points de vue, suivant que le circuit reste ouvert ou fermé, ou encore qu'il vient d'être fermé pendant quelque temps. Dans le premier cas, la force électromotrice est la somme des différences de potentiel aux surfaces de contact des élements successifs. Dans le second cas, la polarisation des électrodes intervient et la force électromotrice réellement en jeu peut avoir une valeur toute différente; c'est cette dernière qui présente surtout un intérêt pratique et qui règle l'intensité du courant. Il est donc très important de spécifier les conditions des expériences.

Le courant est nul dans un circuit lorsque la somme algébrique des forces électromotrices est nulle. Pour appliquer cette méthode d'opposition directe, il faut avoir à sa disposition une série de couples très faibles par rapport à celui qu'on veut étudier. M. J. Regnauld [2] prenait, comme unité principale, un couple thermoélectrique *bismuth-cuivre* dont les

[1] Sir W. Thomson, *Reprint of papers on Electr. and Magn.*, p. 245.
[2] J. Regnauld, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. XLIV, p. 453; 1855.

soudures étaient maintenues respectivement aux températures de 0° et de 100°; comme unité secondaire, un couple Daniell dans lequel le cuivre et le sulfate de cuivre étaient remplacés par du cadmium et du sulfate du cadmium, et dont la force électromotrice a été trouvée sensiblement égale à celle de 55 couples thermoélectriques.

L'expérience consiste alors à placer le couple à étudier dans un circuit qui renferme un galvanomètre sensible et où l'on intercale des couples à cadmium et des couples thermoélectriques jusqu'à ce que le courant soit à peu près nul. Cette condition n'étant jamais réalisée exactement, on détermine les deux nombres n et $n+1$ de couples thermoélectriques qu'il faut opposer à la force électromotrice considérée, pour obtenir dans le galvanomètre des déviations de sens contraires; la force électromotrice du couple étudié est ainsi connue à une unité près.

On pourrait évaluer la fraction complémentaire, soit par le rapport des déviations finales, soit en cherchant à quelle température il faut abaisser la soudure chaude du $n+1^e$ couple pour que le courant soit rigoureusement nul, mais il serait superflu de pousser l'approximation aussi loin. Cette méthode, en effet, outre les difficultés pratiques qu'elle entraîne, ne comporte pas le degré de précision qu'on pourrait en espérer. Le couple à cadmium est très constant; mais, quelques précautions que l'on prenne dans la construction des couples thermoélectriques, ils présentent de grandes différences dues à la cristallisation du bismuth et qui atteignent souvent le dixième de leur valeur. Le couple *cuivre-or*, dont la force électromotrice est 62,5 fois plus faible que celle du couple bismuth-cuivre, fournirait des étalons plus satisfaisants.

Quoi qu'il en soit, M. Regnauld a trouvé que le couple Daniell équivaut à 175 ou 176 unités thermoélectriques; le couple bismuth-cuivre, entre les températures de 0° et de 100°, vaut donc environ $0^{volt},0061$ et le couple Daniell au zinc et au cadmium $0^{volt},34$.

M. Limb [1] a mesuré ainsi la force électromotrice de différents couples, à circuit ouvert, en leur opposant une force électromotrice d'induction calculable.

[1] C. Limb, *Ann. de ch. et de Phys.* [7], t. VIII, p. 145; 1896.

Un aimant permanent de moment magnétique M, placé au centre d'une longue bobine cylindrique ayant n spires par unité de longueur, est animé d'un mouvement de rotation uniforme avec la vitesse angulaire ω. La force électromotrice induite serait rigoureusement sinusoïdale pour une bobine indéfinie, avec l'amplitude $\omega M 4\pi n$. Le couple est placé sur le même circuit, la communication établie par un contact au moment du maximum et on mesure la vitesse ω pour laquelle le courant est nul; cet équilibre était constaté par un électromètre capillaire dont la sensibilité avait été portée jusqu'à $\frac{1}{30\,000}$ et même $\frac{1}{50\,000}$ de volt. La force électromotrice du couple étudié est alors

$$E = \omega M 4\pi n(1 - \varepsilon),$$

le terme de correction ε pouvant être facilement calculé par les dimensions de la bobine.

L'aimant était formé par 65 barreaux en acier d'Allevard, de 6 à 8^c de longueur, et des précautions ont été prises pour maintenir son moment magnétique constant.

La valeur M était déterminée par la méthode de Gauss sur laquelle on reviendra plus loin; c'est là le seul point faible de l'expérience.

Pour la température de 0°, M. Limb a obtenu :

	volt
Couple Latimer Clark.	1,4535
Couple Gouy.	1,3928
Couple Daniell.	1,0943

713. Méthodes de compensation. — On peut désigner sous ce nom les méthodes dans lesquelles la force électromotrice est compensée par la différence de potentiel de deux points d'un circuit traversé par un courant permanent.

Le circuit d'une pile constante E [1] renferme deux rhéostats R et r (fig. 203), le dernier compris entre les deux points A et B. Le couple e à mesurer est relié aux points A et B par l'intermédiaire d'un galvanomètre G (ou d'un électromètre quelconque, tel que l'électromètre capillaire), les courants

[1] Poggendorff, *Pogg. Ann.*, t. LIV, p. 161; 1841.

produits par les forces électromotrices E et e étant tous deux dirigés vers le point A. On règle les deux rhéostats de façon que le courant soit nul dans le galvanomètre; si R et r représentent les résistances de la portion AEB du circuit et du pont AB, le courant principal est

$$(1) \qquad I = \frac{E}{R+r} = \frac{e}{r}.$$

Pour éliminer la résistance de la pile E, qui est comprise

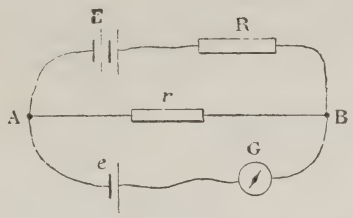


Fig. 203.

dans R, on ajoute aux rhéostats des résistances R′ et r' telles que l'équilibre soit encore établi; il en résulte

$$\frac{e}{E} = \frac{r}{R+r} = \frac{r+r'}{R+R'+r+r'} = \frac{r'}{R'+r'}.$$

L'expérience prend une forme extrêmement simple lorsque le rhéostat r est formé par un fil homogène AB (fig. 204), sur

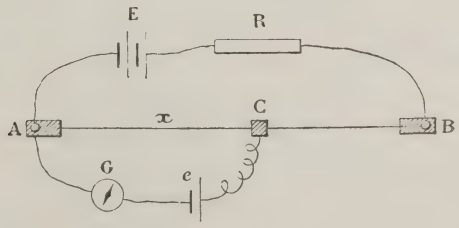


Fig. 204.

lequel on cherchera le point de contact C qui convient pour l'équilibre. Appelant l la résistance totale du fil AB, x et x' les résistances des longueurs AC qui ramènent le galvanomètre au zéro quand on donne à la résistance totale du cir-

cuit AEB successivement les valeurs R et R + R′, on a

$$\frac{e}{E} = \frac{x}{R+l} = \frac{x'}{R+R'+l} = \frac{x'-x}{R'}.$$

Il est préférable d'éliminer la force électromotrice E de la pile principale, qui est mal définie, et d'opérer par substitution en introduisant successivement dans le circuit du galvanomètre les deux forces électromotrices e et e' que l'on compare. Les expériences donnant les rapports de e et e' à E, on en déduit le rapport de e à e'.

Dans la seconde disposition, par exemple, si la valeur de R reste constante et que x et x' désignent les valeurs de la résistance AC qui correspondent à l'équilibre pour les deux couples e et e', on a simplement

$$\frac{e}{e'} = \frac{x}{x'}.$$

Avec un fil homogène, les résistances x et x' sont proportionnelles aux valeurs correspondantes de la distance AC. On règle alors la résistance R de manière que ces distances soient comprises dans la longueur du fil AB.

Si les deux expériences sont faites en même temps, il n'est plus nécessaire de supposer que la force électromotrice principale E reste constante ; c'est la disposition connue sous le nom de *potentiomètre* de Clark [1].

On intercale entre les deux points A et B (fig. 205), la plus grande force électromotrice e' avec un galvanomètre G′, et on règle le rhéostat R de manière que l'aiguille reste au zéro. Le second couple e est relié, d'une part au point A, d'autre part au contact mobile C qu'on déplace jusqu'à ce que le courant soit aussi nul dans le galvanomètre correspondant G. Au besoin, on pourrait supprimer ce galvanomètre, puisqu'après le premier réglage l'aiguille du galvanomètre G′ ne peut rester au zéro que s'il ne passe aucun courant dans le fil ajouté, mais la sensibilité serait alors beaucoup moindre.

Comme le couple étudié se trouve traversé par des courants, pendant les tâtonnements nécessaires pour atteindre

[1] L. Clark, *Journ. of tel. eng.*, t. II, p. 20 ; 1873.

la position d'équilibre, il finit par être plus ou moins polarisé. On atténue cet inconvénient en interposant sur le circuit une clef qu'on abaisse seulement pendant un temps très court. Néanmoins, lorsque les couples sont facilement polarisables,

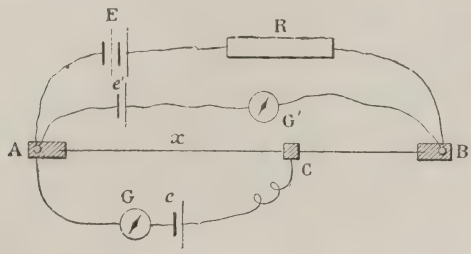


Fig. 205.

il est prudent, avant de faire la lecture définitive, ou de les remonter ou de les laisser reposer un temps assez long pour que la polarisation disparaisse.

714. Mesures électromagnétiques. — L'équation (1) donne la force électromotrice e en valeur absolue, si l'on connaît la résistance r interposée entre les points de dérivation et l'intensité I du courant principal. C'est ainsi que M. L. Clark [1] a déterminé la force électromotrice de son étalon.

Lord Rayleigh et Mrs Sidgwick [2] ont répété l'expérience

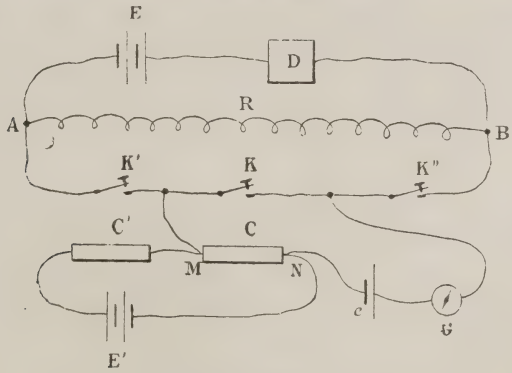


Fig. 206.

à l'aide d'une disposition un peu plus compliquée (fig. 206), Le circuit de la pile principale E renferme un électrodynamo-

(1) L. Clark, *Ph. Tr. L. R. S.*; 1873. — *J. of teleg. eng.*, t. VII, p. 85.
(2) Lord Rayleigh et Mrs Sidgwick, *Ph. Tr. L. R. S.*; 1884, p. 411.

mètre-balance D, qui mesure le courant principal I, et une résistance R, aux extrémités A et B de laquelle sera prise une dérivation. C et C′ sont deux boîtes de résistances qui ferment le circuit d'une pile auxiliaire E′ et dont les chevilles sont manœuvrées de manière à laisser toujours entre les pôles de la pile une résistance fixe de 10 000 ohms; le courant I′ est invariable s'il n'existe pas de dérivations.

On laisse d'abord ouvertes les deux clefs K′ et K″ et, fermant la clef K, on cherche sur la boîte C la résistance r qui annule le courant dans le galvanomètre G, d'où résulte $e = \mathrm{I}'r$. Ouvrant ensuite la clef K, on ferme K′ et K″, et on cherche sur la même boîte la résistance r' qui rétablit l'équilibre. On a alors $e = \mathrm{I}'r' + \mathrm{IR}$ et, par suite,

$$\frac{e}{r} = \frac{e - \mathrm{IR}}{r'} = \frac{\mathrm{IR}}{r - r'}.$$

715. Piles fermées. — Lorsqu'une pile polarisable, de résistance ρ_0 et de force électromotrice E_0 en circuit ouvert, est fermée par une résistance r, elle prend une force électromotrice plus petite E, et sa résistance elle-même a généralement une valeur différente ρ.

La différence $\mathrm{E}_0 - \mathrm{E}$ représente la force électromotrice de polarisation. Si l'intensité est assez grande pour que la polarisation atteigne dans tous les cas sa valeur maximum, on aura, en faisant varier la résistance interpolaire, une suite d'équations telles que

$$\mathrm{E} = \mathrm{I}(\rho + r) = \mathrm{I}'(\rho + r') = \mathrm{I}''(\rho + r''),$$

qui donnent

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{I}} - \frac{1}{\mathrm{I}'}\right) = r - r', \qquad \mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{I}} - \frac{1}{\mathrm{I}''}\right) = r - r'', \ldots$$

$$\rho = \frac{\mathrm{I}r - \mathrm{I}'r'}{\mathrm{I}' - \mathrm{I}} = \frac{\mathrm{I}r - \mathrm{I}''r''}{\mathrm{I}'' - \mathrm{I}} = \ldots\ldots$$

L'identité des différentes valeurs ainsi obtenues servira à vérifier que la polarisation et la résistance restent invariables. Deux expériences analogues détermineront le rapport de deux

forces électromotrices E et E_1. Si on règle les résistances de manière que les intensités I et I′, I_1 et I'_1, soient les mêmes de part et d'autre, on a simplement

$$\frac{E_1}{E} = \frac{r_1 - r'_1}{r - r'}.$$

Dans ce cas, le second membre est un rapport de résistances et le galvanomètre n'a pas besoin d'être gradué (1).

La méthode suivante, indiquée par Poggendorff (2), conduit au même résultat d'une manière plus immédiate. Les deux couples E et E′ (fig. 207) sont placés dans un même circuit de

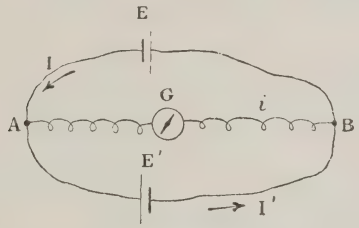


Fig. 207.

telle façon que leurs forces électromotrices s'ajoutent, et on introduit une dérivation AB contenant un galvanomètre. Le point A étant quelconque, on déplace le point B ou on modifie les résistances de manière que le courant soit nul dans la dérivation; les résistances totales R et R′ des deux segments AEB, AE′B du circuit sont alors dans le rapport des forces électromotrices.

Pour éliminer la résistance propre des couples, il suffit encore d'ajouter aux deux segments des résistances r et r' telles que le galvanomètre reste au zéro ce qui donne

$$\frac{E}{E'} = \frac{R}{R'} = \frac{R + r}{R' + r'} = \frac{r}{r'}.$$

716. Galvanomètres à grande résistance. — Lorsque la résistance r du circuit est très grande par rapport à la résistance

(1) Wheatstone, *Ph. Tr. L. R. S.*, t. CXXXIII, p. 313; 1843.
(2) *Voir* Bosscha, *Pogg. ann.*, t. XCVII, p. 172; 1851.

intérieure ρ de la pile, on peut écrire simplement

$$E = Ir, \qquad E' = I'r', \qquad \frac{E'}{E} = \frac{I'}{I} \cdot \frac{r'}{r}.$$

En disposant l'expérience de façon que les résistances ou les intensités soient les mêmes dans les deux cas, le rapport des forces électromotrices sera égal au rapport des intensités observées ou des résistances totales.

Cette méthode est la plus exacte, la plus expéditive, et presque la seule en usage aujourd'hui. On ferme les couples à comparer par une résistance constante de 30 ou 40 mille ohms, en mettant au besoin un shunt sur le galvanomètre, afin que les déviations restent très petites et proportionnelles aux courants.

La méthode équivaut d'ailleurs à l'emploi d'un électromètre et les forces électromotrices ainsi déterminées sont celles qui correspondent aux circuits ouverts, ou du moins à des courants tellement faibles et de si courte durée que la polarisation est absolument négligeable.

On déterminera, de même, la différence de potentiel entre deux points situés sur le trajet d'un courant, quand la résistance s qui les sépare est très petite par rapport à la résistance g du fil galvanométrique en dérivation. Appelant R la résistance du circuit en dehors des points touchés, I_0 et I les intensités du courant principal avant et après l'introduction du galvanomètre, et i le courant dans le galvanomètre, la différence de potentiel primitive est $V_0 = I_0 s$ et celle qui est observée par le galvanomètre

$$V = ig = (I - i)s = Is\frac{g}{g+s} = V_0 \frac{I}{I_0} \frac{g}{g+s}.$$

On a d'ailleurs

$$I_0(R + s) = I\left(R + \frac{gs}{g+s}\right).$$

Si le rapport de s à g est très petit, les courants I et I_0 sont sensiblement égaux, ainsi que les différences de potentiel V et V_0, et la valeur de V_0 sera donnée par le produit ig.

Supposons encore, d'une manière plus générale, que la ré-

sistance s renferme une force électromotrice e, de même sens que le courant par exemple, et soit E la force électromotrice totale. Les valeurs primitives du courant et de la différence de potentiel entre les deux points considérés sont alors

$$E = I_0(R + s), \qquad V_0 = I_0 s - e.$$

Quand on introduit le galvanomètre, on a

$$V = ig = (I - i)s - e = (Is - e)\frac{g}{g+s},$$

$$E = IR + (I - i)s = I\left(R + s\frac{g}{g+s}\right) + e\frac{s}{g+s} = I_0(R + s).$$

Les courants I et I_0 sont encore très sensiblement égaux; à moins que les valeurs de V et V_0 ne soient extrêmement petites, ce qui correspondrait à un cas très particulier, elles sont aussi égales entre elles et à ig.

717. Mesure de la polarisation. — Supposons qu'une pile de force électromotrice E_0 et de résistance ρ_0 soit fermée par un circuit de résistance R; lorsque la polarisation a pris sa valeur maximum, ce qui arrive en un temps très court si la résistance R est assez faible, les valeurs nouvelles E et ρ donnent $E = I(\rho + R)$, et la différence de potentiel V des deux pôles est

$$(2) \qquad V = IR = E\frac{R}{\rho + R}.$$

La méthode de compensation appliquée avec la pile ouverte ou fermée, en joignant chaque fois l'un des pôles au point A (fig. 204) et l'autre au point C qui correspond à un courant nul dans le galvanomètre, donnera des nombres m_0 et m respectivement proportionnels aux différences de potentiel E_0 et V; par suite [1]

$$\frac{E_0}{V} = \frac{m_0}{m} = \frac{E_0}{E}\cdot\frac{\rho + R}{R}.$$

[1] Paalzow, *Pogg, Ann.*, t. CXXXV, p. 326; 1868.

On a ainsi le rapport de la force électromotrice E de la pile polarisée à sa valeur primitive E_0.

Si l'on veut éliminer la résistance ρ de la pile, il suffit de remplacer R par une autre résistance R′ et de déterminer la valeur correspondante m'. Il en résulte

$$\frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} \cdot \frac{\rho + R}{R} = \frac{m'}{m_0} \frac{\rho + R'}{R'} = \frac{R' - R}{m_0\left(\frac{R'}{m'} - \frac{R}{m}\right)}.$$

Le rapport des différences de potentiel V et E_0 se déterminerait d'ailleurs directement par un électromètre ou par un galvanomètre à grande résistance.

718. Etude d'une pile en action. — Il est souvent très utile d'étudier les propriétés d'une pile en fonction, en évitant autant que possible d'interrompre le circuit.

Quand la pile est fermée, la différence de potentiel V aux deux pôles est donnée par l'équation (2). Si on l'ouvre pendant un temps assez court pour que la polarisation n'ait pas diminué, la différence de potentiel V_0 entre les mêmes points est égale à E. Les valeurs de V et V_0 étant comparées au moyen d'un électromètre ou d'un galvanomètre à grande résistance, on en déduit la résistance ρ de la pile par la relation

$$\frac{R + \rho}{V_0} = \frac{R}{V} = \frac{\rho}{V_0 - V}.$$

Supposons que la pile soit formée de n couples disposés en série, dont les forces électromotrices sont $e_1, e_2, \ldots, e_n$ et les résistances $r_1, r_2, \ldots, r_n$. On a d'abord, par l'expérience précédente,

$$E = \Sigma e = V_0,$$

$$\rho = \Sigma r = R\,\frac{V_0 - V}{V}.$$

On répétera ensuite la même épreuve pour chacun des couples en particulier. Les différences de potentiel v et v_0, avant et après l'ouverture de la pile, donnent aussi

$$v = e - Ir = v_0 - Ir,$$

$$r = \frac{v_0 - v}{I} = R\,\frac{v_0 - v}{V}.$$

Comme vérification expérimentale, il est clair que la force électromotrice et la résistance totales de la pile doivent être respectivement égales à la somme des valeurs obtenues pour les différents couples, ce qui exige que l'on ait

$$V_0 = \Sigma v_0, \qquad V_0 - V = \Sigma(v_0 - v);$$
$$V_0 = \Sigma v_0, \qquad V = \Sigma v.$$

Un couple n'a d'effet utile dans la série que si sa force électromotrice e est supérieure à la chute de potentiel Ir produite par la résistance qu'il apporte, c'est-à-dire que si la différence de potentiel v est positive. Le seul signe de v permet donc de reconnaître les couples qui sont en mauvais état, sans qu'il soit nécessaire d'ouvrir le circuit.

Si tous les couples sont de même espèce, ils ont la même force électromotrice et ne diffèrent que par la résistance. On peut donc poser $E = ne$, et la condition $e > Ir$ devient

$$e > \frac{ne}{R + \rho} r, \qquad \text{ou} \qquad r < \frac{R + \rho}{n}.$$

Il en résulte que, si la résistance propre d'un couple n'est pas inférieure à la n^e partie de la résistance totale, il y aurait avantage à retirer ce couple de la pile.

719. Méthode des décharges. — Dans un système électrique arrivé au régime permanent, un condensateur relié à deux points du circuit prend une charge proportionnelle à leur différence de potentiel V. En outre, ce condensateur ne modifie pas l'état primitif, si ses pertes sont négligeables et les forces électromotrices constantes.

Pour une capacité C, la charge q est égale à CV. La comparaison des décharges mesurées au galvanomètre balistique permettra donc de déterminer le rapport des différences de potentiel; la méthode équivaut encore à l'emploi d'un électromètre ou d'un galvanomètre à grande résistance.

Pour éviter les corrections compliquées, il est avantageux que les arcs d'impulsion à comparer soient ramenés au même ordre de grandeur. Au lieu des shunts, dont nous avons signalé les inconvénients, il est préférable d'employer des

capacités étalonnées que l'on réunit partiellement en cascade et dont on utilise, pour chaque expérience, une valeur telle que les charges soient de même ordre.

L'expérience peut être disposée de manière à déterminer la résistance ρ d'une pile. On joint les pôles de la pile ouverte à un condensateur par l'intermédiaire d'un galvanomètre balistique; l'impulsion α de l'aiguille est proportionnelle à la force électromotrice E_0. Laissant cette communication établie on réunit les pôles par une dérivation de résistance R; l'impulsion α' de l'aiguille a lieu en sens contraire et elle est proportionnelle à l'excès $E_0 - V$ de la force électromotrice sur la différence de potentiel $V = IR$ des pôles dans le nouvel état. On en déduit

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{E_0 - IR}{E_0} = 1 - \frac{R}{R+\rho} = \frac{\rho}{R+\rho};$$

$$\frac{\alpha'}{\rho} = \frac{\alpha}{R+\rho} = \frac{\alpha - \alpha'}{R}.$$

Deux clefs permettent de faire les opérations assez rapidement pour que la polarisation n'ait pas le temps de s'établir.

On peut opérer en sens contraire. La pile étant d'abord fermée par la résistance R, on joint les pôles au condensateur par le galvanomètre; puis on coupe la dérivation. Les impulsions sont alors de même sens, respectivement proportionnelles à V et E — V, mais cette fois la résistance et la force électromotrice correspondent à la pile fermée [1].

720. Siège de la force électromotrice. — Dans toute pile à température uniforme, ouverte ou fermée, la force électromotrice doit être considérée comme la somme algébrique des différences de potentiel aux différentes surfaces de séparation des solides et des liquides en présence.

Volta plaçait le siège de la force électromotrice de la pile uniquement à la surface de contact des deux métaux, le liquide n'ayant d'autre rôle que de ramener les métaux de deux couples successifs au même potentiel. Une expérience ingénieuse de Lord Kelvin semble confirmer cette vue de Volta [2].

[1] Kempe, *Handbook of electr. testing*, p. 195.
[2] Sir W. Thomson, *Reprint of pap. on electrostat. and magn.*, p. 317.

Deux demi-cercles ou deux demi-anneaux isolés, l'un en zinc et l'autre en cuivre, situés dans un plan horizontal, sont rapprochés presque au contact; une aiguille très légère est suspendue au-dessus du système de manière que sa position d'équilibre soit exactement parallèle à la fente de séparation. L'aiguille reste en équilibre si on l'électrise. Il suffit de réunir par un conducteur quelconque deux points des anneaux pour que l'aiguille dévie vers le cuivre, si elle est positive, ou vers le zinc si elle est négative; lorsque l'appareil est bien réglé, ces déviations de part et d'autre sont égales pour des charges égales et de signes contraires de l'aiguille. L'expérience démontre ainsi le fait général de la différence de potentiel des deux métaux en contact (**138**). Mais, si on établit la communication entre les deux anneaux par une goutte d'eau ou d'alcool, l'aiguille reste en équilibre dans la direction primitive, quelle que soit sa charge, ce qui prouve que les métaux restent au même potentiel.

Pour déterminer la différence de potentiel des deux métaux, on les relie respectivement à deux points d'un conducteur traversé par un courant I et séparés par la résistance R, choisis de façon que l'aiguille revienne au zéro. Lord Kelvin a constaté ainsi que la différence de potentiel compensatrice IR change avec l'état des métaux, par exemple, qu'elle augmente notablement quand on oxyde le cuivre en le chauffant et qu'on décape avec soin la lame de zinc.

721. Effets de contact. — Deux métaux. — Une méthode générale, pour déterminer la force électromotrice de contact entre deux métaux, consiste à les employer comme armatures d'un condensateur à plateaux qu'on réunit par un fil conducteur et dont on mesure la charge après les avoir isolés l'un de l'autre et séparés à une grande distance (**139**). La charge est proportionnelle au produit de la capacité par la différence de potentiel, ou seulement à cette dernière, dans le cas où la capacité reste constante.

Kohlrausch [1] s'est servi d'un électromètre de Dellmann. Pour ramener les mesures à un étalon déterminé, il fait successivement trois expériences en réunissant les deux pla-

[1] R. Kohlrausch, *Pogg. ann.*, t. LXXXII, p. 1 et 40; 1851 et t. LXXXVIII, p. 465; 1853.

teaux A et B (fig. 208) : 1° par un simple fil ; 2° par un fil dans lequel est intercalé un couple Daniell ; 3° par le même fil et le même couple, mais tourné en sens contraire. Il obtient ainsi trois déviations qui déterminent les rapports des différences de potentiel correspondantes V_1, V_2 et V_3. Si on dési-

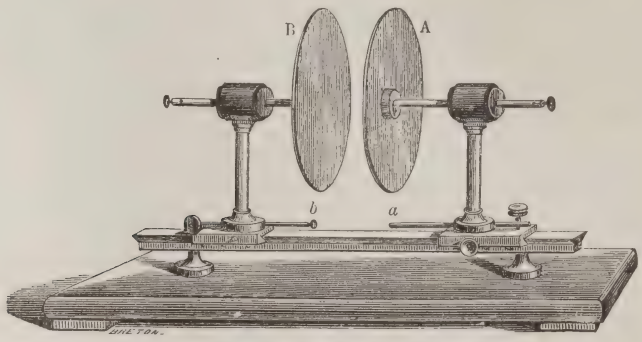


Fig. 208.

gne par V la force électromotrice de contact des deux métaux et par D celle du couple Daniell, on a

$$V_1 = V, \qquad V_2 = D + V, \qquad V_3 = D - V;$$

$$V = 2D\,\frac{V_1}{V_2 + V_3} = D\,\frac{V_1}{V_1 + V_3}.$$

La méthode exige que les plateaux soient exactement à la même distance dans les trois cas ; c'est ce que permettent les buttoirs *a* et *b*.

Différents physiciens ont opéré dans des conditions analogues. M. Pellat [1] a repris la méthode de Lord Kelvin en réunissant les deux plateaux par un fil conducteur qui renferme, non plus une force électromotrice fixe, mais une différence de potentiel variable obtenue au moyen de contacts mobiles sur un fil parcouru par un courant permanent. On règle la distance des points touchés de manière qu'après suppression des communications et écartement des plateaux, leur charge soit nulle ; la force électromotrice de contact est

[1] Pellat, *Ann. de Chim. et de Phys.* [5], t. XXIV, p. 5 ; 1881.

alors égale et de signe contraire à la différence de potentiel IR des points touchés. Une seule expérience suffit, sans qu'on ait à se préoccuper ni de la distance des plateaux ni de la graduation de l'électromètre.

Nous citerons encore une disposition ingénieuse employée par MM. Ayrton et Perry [1], quoiqu'elle paraisse plus compliquée et moins sûre.

Quatre plateaux A et B, A′ et B′ (fig. 209) forment deux sys-

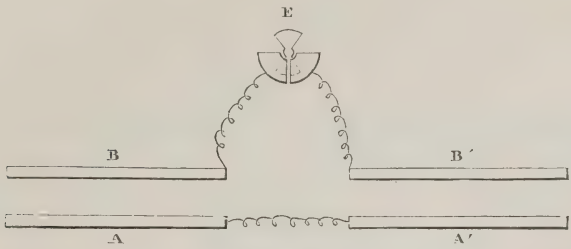


Fig. 209.

tèmes de condensateurs. Les plateaux inférieurs A et A′ sont formés de métaux différents; les plateaux supérieurs B et B′, tous deux en laiton, sont isolés et communiquent respectivement avec les quadrants d'un électromètre dont l'aiguille est maintenue à un potentiel très élevé.

Une communication permanente étant établie entre A et A′, on fait communiquer B et B′; l'aiguille de l'électromètre vient au zéro. La communication entre B et B′ étant rompue, on fait tourner le système des plateaux A et A′ de 180°, de manière à permuter leurs positions; la déviation de l'aiguille est proportionnelle à la différence V de potentiel entre les métaux A et A′.

Soient, en effet, c et c' la capacité des plateaux B et B', y compris les quadrants correspondants, q et q' les quantités d'électricité prises par chacun d'eux dans la première expérience, et désignons par les lettres A, A′, B, B′ les potentiels des conducteurs correspondants; on a

$$q = c(B - A), \qquad q' = c'(B' - A').$$

[1] Ayrton et Perry, *Phil. Trans. R. S. L.*, for. 1880, p. 15.

Après rotation de 180°, les plateaux ont des potentiels différents A_1, B_1, A'_1, B'_1, mais les charges et les capacités des deux systèmes B et B′ sont restées invariables, ce qui donne

$$q = c(B_1 - A'_1), \qquad q' = c'(B'_1 - A_1).$$

Comme les potentiels B et B′ sont égaux dans le premier cas, et que $A' - A = A'_1 - A_1 = V$, on en déduit

$$1 = \frac{B - A}{B_1 - A'_1} = \frac{B' - A'}{B'_1 - A_1} = \frac{V}{B_1 - B'_1 - V},$$
$$2V = B_1 - B'_1.$$

La différence de potentiel $B_1 - B_1$ est ainsi déterminée par la déviation de l'électromètre.

Cette méthode suppose que la capacité de l'électromètre est indépendante de la déviation (607), ou du moins que ses variations n'interviennent que pour une partie négligeable; en outre, la nécessité de ramener les plateaux rigoureusement à la même distance exige dans le jeu de l'appareil une perfection difficile à réaliser.

722. **Métal et liquide.** — Pour déterminer la force électro-

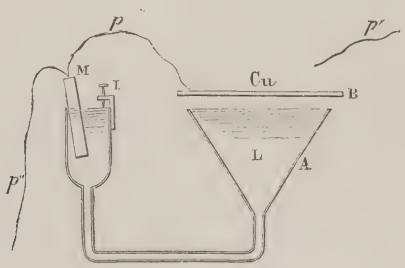


Fig. 210.

motrice de contact entre un métal et un liquide, Hankel [1] place le liquide dans un siphon (fig. 210) présentant d'un côté la forme d'un entonnoir, au bord duquel vient affleurer le liquide. Le condensateur est formé par la surface du liquide et par la lame de cuivre B; des fils de platine p et p'' relient le

[1] Hankel, *Abh. der K. S. Gess. math.-phys. kl.*; 1861 et 1865. — *Pogg. ann.*, t. CXV, p. 57; 1862, t. CXXVI, p. 286, 440; 1865 et t. CXXXI, p. 607; 1867.

plateau B avec le métal à étudier M, qui plonge dans la seconde branche du siphon, et ce dernier avec le sol.

Si on rompt les communications p et p'' et que, soulevant le plateau B, on le mette en communication avec un électromètre par le fil p', la charge est proportionnelle à la différence de potentiel V_1 du cuivre et du liquide, c'est-à-dire à la somme des forces électromotrices de contact du cuivre avec le métal M et de celui-ci avec le liquide L,

$$Cu|M + M|L = V_1.$$

On vide l'entonnoir et on substitue à la surface du liquide une lame du métal M, que l'on met en communication par un fil de platine avec B et avec le sol ; pour la même distance, la charge correspond à la différence de potentiel $Cu|M = V_2$; il en résulte

$$M|L = V_1 - V_2.$$

En prenant comme plateau inférieur A (fig. 209), la surface du liquide considéré mise en communication par un siphon avec le métal du plateau A', MM. Ayrton et Perry obtiennent la force électromotrice de contact du métal et du liquide.

Les vapeurs émanées du liquide et qui viennent se condenser sur le plateau apportent dans ces expériences une cause d'erreur qu'il est difficile d'écarter et dont il est impossible de tenir compte.

M. Gouré [1] fait écouler le liquide en gouttelettes d'un vase métallique A par un tube dont l'orifice est situé au milieu d'un cylindre vertical A' de même métal, qui joue le rôle d'une enveloppe fermée (8). Les gouttes qui tombent sont à l'état neutre lorsque le liquide est au même potentiel que le cylindre A', de sorte que la différence des potentiels A — A' des deux vases est égale à la force électromotrice de contact M|L du métal avec le liquide. On la compense par la différence de potentiel IR prise sur le circuit d'un courant et l'équilibre est constaté par un électromètre.

Il importe que toutes les pièces métalliques de l'appareil soient identiques; on réalise cette condition au moyen de dé-

[1] Gouré de Villemontée, *Journ. de Phys.* [2], t. IX, p. 65; 1890.

pôts galvaniques. Les valeurs obtenues avec les dissolutions salines augmentent en général à mesure que la concentration diminue. Pour le cuivre en contact avec le sulfate de cuivre, ou le zinc avec le sulfate de zinc, la force électromotrice de contact passe par un maximum. L'expérience exige un ensemble de précautions délicates et les résultats obtenus ne comportent pas de relation générale.

723. Deux liquides. — La disposition de MM. Ayrton et Perry peut s'appliquer au cas de deux liquides ; on remplace les deux plateaux inférieurs A et A′ (fig. 209) par les surfaces des deux liquides en expérience qu'on réunit par un siphon. Pour permettre le retournement des vases, tout en ne laissant qu'une très petite distance entre les surfaces des liquides et les plateaux supérieurs, ces derniers sont suspendus par un châssis en forme de parallélogramme, qui permet de les soulever parallèlement à eux-mêmes, mais il y a là une nouvelle complication des appareils.

Les expériences de MM. Bichat et Blondlot [1] ne paraissent pas soulever les mêmes objections.

Deux vases X et Y, contenant l'un des liquides L, communiquent respectivement par un fil de platine avec les quadrants d'un électromètre. Le liquide L′ contenu dans le vase Z communique avec le vase X au moyen d'un siphon fermé par un diaphragme poreux. Les liquides des deux vases Y et Z étant ramenés au même potentiel par un artifice spécial, la différence de potentiel entre les vases X et Y est égale à la force électromotrice de contact L|L′. L'artifice en question consiste à faire écouler le liquide L′ du vase Z au milieu d'un cylindre sur les parois intérieures duquel le liquide L du vase Y coule d'une manière continue.

724. Discussion des expériences. — Maxwell [2] a le premier appelé l'attention sur la nature complexe du phénomène que l'on mesure par toutes les méthodes où les corps sont séparés par une couche diélectrique. Dans l'expérience relative à deux métaux M et M′ par exemple, il y a en réalité trois contacts à considérer : celui des deux métaux entre eux, et

[1] Bichat et Blondlot, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XC, p. 1202 et 1293; 1883. — *Journal de Phys.* [2], t. II, p. 533; 1883.

[2] Cl. Maxwell, *The Electrician*, 26 avril 1879.

celui de chacun des métaux avec le milieu A dans lequel il est plongé. La somme

$$M|M' + M'|A + A|M = \Delta,$$

que l'on mesure en réalité, ne serait égale à la force électromotrice vraie $M|M'$ des deux métaux que si les deux forces électromotrices $A|M$ et $A|M'$ étaient nulles, ce qui n'est rien moins que démontré, ou égales, ce qui n'est point probable. On peut appeler Δ la force électromotrice apparente, et cette remarque s'applique à toutes les méthodes. Ainsi, dans l'expérience de MM. Bichat et Blondlot, il est évident que l'effet observé représente la somme $L|L' + L'|A + A|L$.

Maxwell admet que le phénomène de Peltier donne la force électromotrice vraie entre deux métaux; comme les résultats obtenus par les méthodes calorimétriques et les méthodes électrométriques sont très différents (179), que les premiers nombres sont de beaucoup inférieurs aux seconds et parfois de signes contraires, il en résulterait que la force électromotrice de contact entre les corps considérés et l'air doit entrer pour la plus grande part dans le phénomène observé.

Cette manière de voir n'est pas en contradiction avec l'expérience de Lord Kelvin (720). Le liquide L, interposé entre les deux parties de l'anneau, intervient alors et l'expérience démontre qu'on a

$$A|M + M|L + L|M' + M'|A = 0,$$
$$M|L + L|M' = M|A + A|M'.$$

Ainsi interprétée, l'expérience prouverait simplement que les deux forces électromotrices de contact du métal avec l'air et avec un liquide oxygéné, tel que l'eau ou l'alcool, sont sensiblement égales.

L'idée la plus simple serait de répéter les mesures dans le vide absolu. M. Pellat, en réduisant la pression de l'air à 1 ou 2 centimètres de mercure, ou en remplaçant celui-ci par un gaz inerte vis-à-vis des métaux employés, tel que l'azote ou l'hydrogène, n'a observé que des variations très faibles de la force électromotrice. Pour le cuivre et le zinc, la différence

de potentiel augmente quand la pression diminue, et la variation est plus grande dans l'oxygène que dans l'hydrogène.

M. Brown [1], au contraire, a trouvé des différences très grandes en employant des gaz capables d'agir sur les métaux, comme l'acide chlorhydrique et l'hydrogène sulfuré. Un anneau divisé, comme celui de Lord Kelvin, est placé dans une cloche; quand on y introduit alternativement de l'air et de l'hydrogène sulfuré, l'aiguille dévie alternativement à droite et à gauche jusqu'à ce que le cuivre soit recouvert d'une couche bleue de sulfure de cuivre. Toutefois, cette altération permanente de la surface d'un des métaux laisse des doutes sur les conséquences qu'on est en droit de tirer des expériences.

Après avoir discuté les résultats fournis par les méthodes électrostatiques, Maxwell conclut ainsi :

« Ces expériences semblent montrer que l'accord que présentent les résultats obtenus par les méthodes ordinaires pour les forces électromotrices de contact, avec ceux qu'on obtient en plongeant les métaux dans l'eau ou dans tout autre électrolyte oxygéné, tient moins à l'extrême petitesse de la force électromotrice entre un métal et un gaz ou entre un métal et un électrolyte, qu'à ce fait que les propriétés de l'air concordent jusqu'à un certain point avec celles des électrolytes oxygénés. Et, en effet, si le composant actif de l'électrolyte est le soufre, les résultats changent du tout au tout, et les mêmes différences se reproduisent quand on remplace l'air par l'hydrogène sulfuré. »

La tension superficielle du mercure au contact d'un liquide ne dépend que de la différence de potentiel qui existe entre le liquide et le mercure (**196**), et cette différence est nulle lorsque la tension superficielle A est maximum, puisque la capacité X de l'unité de surface est alors nulle. La force électromotrice E, qu'il faut introduire entre les deux liquides pour atteindre le maximum de A est donc égale et de signe contraire à la différence de potentiel préexistante.

M. Garbe [2] en a déduit une méthode qui peut fournir des valeurs absolues, indépendantes du milieu extérieur.

Dans un électromètre capillaire, la force électromotrice

(1) J. Brown, *Ph. mag.* [5], t. VI, p. 142; 1878 et t. VII, p. 109; 1879.
(2) Garbe, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IC, p. 123; 1884.

extérieure E qui produit la tension maximum est égale à la différence de potentiel de contact M|L du mercure avec l'eau acidulée. Si on remplace l'eau par un liquide L′, on déterminera de même la valeur de $M|L' = E'$.

Les liquides L et L′ sont ensuite placés dans deux vases, au-dessus d'une couche de mercure, et communiquent par un siphon muni d'un diaphragme. La force électromotrice E_1 du couple ainsi constitué, avec des électrodes de mercure, est

$$E_1 = M|L + L|L' + L'|M = E + L|L' - E'.$$

La différence de potentiel L|L′ des deux liquides sera donnée par les trois forces électromotrices E, E′ et E_1.

Quand on fait varier l'étendue de la surface de contact du mercure avec l'eau acidulée (**196**), il se produit, en circuit fermé, un courant de même nature que si l'on modifiait la distance ou la surface des armatures d'un condensateur. Le changement de surface n'a plus d'influence, et le courant est nul, si l'on compense la différence de potentiel de contact des deux liquides. M. Pellat [1] fait écouler le liquide goutte à goutte dans un électrolyte; la différence de potentiel du mercure supérieur et du même métal en repos au fond du vase correspond au contact L|M de l'électrolyte et du mercure. On trouve ainsi $L|M = 0^v,97$ et $L|A = 0^v,02$ quand on remplace le mercure par l'amalgame de zinc liquide (A).

Un couple formé d'almalgame de zinc, eau acidulée et mercure a pour force électromotrice $1^v,44$; on a donc, en tenant compte des électrodes en platine (P),

$$1^v,44 = P|A + A|L + L|M + M|P.$$

L'expérience précédente donne $A|L + L|M = 0^v,95$; par suite

$$M|A = M|P + P|A = 1^v,44 - 0^v,95 = 0^v,49.$$

L'amalgame de zinc peut d'ailleurs remplacer le zinc des piles sans modification, de sorte que la valeur $0^v,49$ convient également au contact du mercure avec le zinc.

[1] Pellat, *Journ. de Phys.* [2], t. VI, p. 374; 1887 et t. IX, p. 401; 1890. — *Ann. de Ch. et de Phys.* [6], t. XIX, p. 556; 1890.

Le mercure qui s'écoule dans l'azotate de mercure est en équilibre électrique. Il en est de même pour l'écoulement des amalgames liquides de cuivre ou de zinc dans des dissolutions de même métal, car les forces électromotrices observées ne dépassent pas $0^{v},001$ ou $0^{v},002$.

Les résultats obtenus par ces différentes méthodes n'ont pas le même ordre de grandeur, ni quelquefois le même signe, que ceux que fournissent les expériences faites au contact de l'air. Une telle divergence ne peut s'expliquer que par le rôle de l'air ; cette manière de voir est confirmée par les résultats déduits de la considération des effets Peltier.

L'explication des courants thermoélectriques par le seul principe de Volta conduit à cette conséquence, en contradiction avec les faits, que tous les couples auraient une marche uniforme, auquel cas la force électromotrice de contact de deux métaux devrait être proportionnelle à la température absolue (**200** et **205**). Il en résulte que, dans l'emploi du condensateur, la différence de potentiel des plateaux ne peut pas en général être considérée comme constante ; on doit admettre qu'il s'y produit, sans doute par l'action du milieu ambiant, un phénomène analogue à la polarisation des électrodes.

725. Limites de polarisation. — Si faible que soit la force électromotrice dans un circuit qui renferme un voltamètre à électrodes de platine, il se produit une électrolyse du liquide, au moins momentanée, les gaz restant absorbés par le platine ; le phénomène s'arrête alors, en raison des changements survenus dans la constitution des électrodes, pour continuer ensuite plus lentement à mesure que les gaz unis au platine sont écartés par la dissociation, la diffusion dans les liqueurs, l'action oxydante de l'air dissous et diverses influences secondaires qui tendent à rétablir l'état initial du système [1].

A cet égard, les deux électrodes ne se comportent pas tout à fait de la même manière, parce que l'absorption de l'hydrogène à la cathode est beaucoup plus importante que celle de l'oxygène à l'anode. Il se forme d'ailleurs de véritables combinaisons de platine avec l'hydrogène et l'oxygène, qui dégagent de la chaleur, de sorte que la force électromo-

[1] M. Berthelot, *Journal de Physique* [2] t. I, p. 341 ; 1882. — E. Bouty, *Ibid.*, p. 346.

trice nécessaire pour provoquer la première apparition des gaz correspond à l'excès de la chaleur de décomposition de l'eau en gaz sur la somme relative à la formation de l'hydrure et du composé oxygéné.

Les expériences de M. Bouty sont entièrement conformes à cette manière de voir. Entre les deux électrodes A et A′ était placé un fil de platine M ; on déterminait les résistances r et r' du liquide dans les intervalles AM et MA′, ainsi que les différences de potentiel correspondantes V et V′. En appelant i l'intensité du courant, p et p' les polarisations des électrodes, on avait ainsi

$$p = V - ir, \qquad p' = V' - ir'.$$

Le courant principal était produit par un couple à sulfate de zinc et de cadmium ($0^{v},365$) ou un couple Daniell, avec une densité de courant très faible rapportée à la surface des électrodes. La polarisation initiale est nulle, elle croît d'abord plus rapidement à la cathode, mais la valeur finale est notablement plus faible qu'à l'anode.

M. Lippmann [1] a constaté que le pouvoir dépolarisant d'une solution métallique est limité au métal même qu'elle renferme ; l'expérience a porté sur les cathodes.

On plonge dans une solution deux électrodes B et A, celle-ci devant servir de cathode au courant d'une pile, et un fil isolé A′ de même métal que A ; les conducteurs A et A′ sont réunis à un électromètre capillaire. Tant qu'on ne fait passer aucun courant entre B et A, l'électromètre reste au zéro. Si la dissolution ne renferme pas le métal A, le mercure de l'électromètre se déplace dès que le liquide est traversé par un courant; la déviation persiste après l'ouverture du circuit et disparaît lentement à mesure que la polarisation se dissipe. Tel serait le cas d'électrodes en cuivre dans une solution de sulfate de zinc, de cobalt, etc. ; il suffit alors d'ajouter quelques gouttes de sulfate de cuivre, moins de $\frac{1}{1000}$, pour qu'aussitôt le mercure revienne au zéro.

L'argent se polarise de même dans les solutions de zinc, de cobalt, de nickel, de cuivre, et se dépolarise si le liquide

[1] G. Lippmann, *Journ. de Phys.* t. VIII, p. 48 ; 1879.

renferme des traces d'argent. L'expérience fournit ainsi une méthode très délicate d'analyse chimique.

Le nickel exposé à l'air ou mis en contact avec une dissolution de son sulfate paraît s'altérer à sa surface et se comporte dans un de ses sels comme un métal étranger ; il ne jouit des propriétés normales que si on l'a préparé par électrolyse au moment de s'en servir.

L'or et le platine sont peu sensibles à la présence de leurs propres sels, peut-être pour une cause analogue.

Cette propriété ne saurait être prévue par la considération du travail chimique, puisqu'une cathode de platine se polarise dans une dissolution de sulfate de cuivre, avec une anode en cuivre, alors que le courant n'a d'autre effet que de transporter le cuivre de l'anode sur la cathode. L'énergie nécessaire pour produire la polarisation est donc emmagasinée sous forme électrique, comme dans un condensateur.

Pour étudier le contact du mercure avec l'eau acidulée, M. Pellat dispose un électromètre capillaire en dérivation sur un courant et détermine la différence de potentiel compensatrice V qui donne à la tension capillaire sa valeur maximum. La cathode et le liquide sont alors au même potentiel; en d'autres termes, la couche électrique double est nulle (**197**). Dès qu'on dépasse cette valeur de V, qui est $0^{v},95$ pour l'eau acidulée par $\frac{1}{6}$ d'acide sulfurique et $0^{v},99$ quand on ajoute au liquide $\frac{1}{2000}$ de bichromate de soude, une bulle d'hydrogène se forme, dans des conditions plus ou moins régulières, sur la surface capillaire du mercure qui sert de cathode. L'électrolyse commence dès que le potentiel de la cathode est devenu inférieur à celui du liquide. Une autre disposition expérimentale permet de constater la même relation pour l'eau acidulée par l'acide chlorhydrique.

726. Phénomènes actinoélectriques. — Nous avons déjà signalé l'action de la lumière sur les couples électriques (**710**) et sur le sélénium (**699**). Le phénomène est plus général. Il suffit, par exemple, de placer dans l'eau salée [1] deux lames de cuivre réunies par un conducteur extérieur et d'éclairer vivement l'une des lames pour obtenir un courant appréciable.

[1] Gouy et Rigollot, C. R. de l'*Acad. des Sc.* t. CVL, p. 1470 ; 1888.

L'intensité est d'abord proportionnelle à l'éclairement, de sorte que l'appareil peut servir d'actinomètre; les rayons jaunes du spectre sont alors les plus actifs [1].

D'après M. Von Uljanin [2], le sélénium éclairé devient négatif et le maximum d'action a lieu pour les rayons du spectre compris entre le jaune et le vert.

M. Righi [3] éclaire un système formé par un grillage métallique et une lame de sélénium, respectivement en relation avec les quadrants d'un électromètre. Lorsque cet appareil est dans l'obscurité et qu'on sépare la lame du grillage après les avoir mis en contact, le sélénium est négatif. Il conserve le même signe, mais avec une charge beaucoup plus grande, s'il a été éclairé. La différence de potentiel due à l'action de la lumière peut atteindre $0^{v},10$ et même $0^{v},12$.

Dans tous les cas, l'effet produit par la lumière paraît instantané, sans être proportionnel à l'éclairement; il met ensuite un certain temps à disparaître.

D'ailleurs la loi de Volta n'est plus alors applicable, car un couple formé de deux métaux avec le sélénium produit un courant, même dans l'obscurité, sans doute à cause de la présence possible d'électrolytes dans la masse.

Les propriétés électromotrices du sélénium peuvent être attribuées, comme les variations de résistance (**699**), à une constitution hétérogène. Cette manière de voir serait conforme à certaines expériences dans lesquelles M. Korda [4] a pu constater la polarisation des cristaux de *soufre* par la lumière, la partie éclairée devenant négative par rapport à l'autre.

L'action des rayons ultra-violets, sur laquelle nous reviendrons à propos des décharges électriques, paraît beaucoup plus efficace; un métal primitivement neutre prend alors un potentiel positif et, si le métal est porté d'abord à un potentiel plus élevé, cette lumière le ramène au même potentiel limite. D'après M. Righi, les valeurs limites du potentiel produit par les rayons ultra-violets seraient, par exemple, $3^{v},42$ pour l'*or*, $2^{v},75$ pour le *cuivre* et $1^{v},63$ pour le *zinc*.

(1) H. Rigollot, *Ann. de Ch. et de Phys.* [6], t. XXII, p. 567; 1891.
(2) Von Uljanin, *Wied ann.*, t. XXXIV, p. 241; 1888.
(3) A. Righi, *Nuovo Cimento*, t. XXIII, XXIV et XXV; 1888.
(4) D. Korda, *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 230; 1889.

727. Frottement des liquides. — Lorsqu'un liquide traverse une cloison poreuse, des électrodes plongées dans les deux portions du liquide situées de part et d'autre de la cloison sont à des potentiels différents et peuvent donner lieu à un courant électrique. Quincke [1] place un tampon d'argile cuite ou de toute autre substance dans un tube de verre et le fait traverser par de l'eau pure sous pression. Un galvanomètre relié aux électrodes indique un courant dans le sens du mouvement de l'eau ; ce courant change de signe et devient temporaire, par suite de la polarisation des électrodes, quand on arrête le liquide.

La force électromotrice ainsi produite est proportionnelle à la pression qui provoque le mouvement du liquide et indépendante de l'épaisseur ou de la surface de la paroi poreuse.

Avec de l'eau pure, la force électromotrice relative à la pression d'une atmosphère aurait les valeurs suivantes pour différents diaphragmes :

Soufre.	9,77 v	Argile.	0,36 v
Sable	6,20	Asbeste. . . .	0,22
Résine.	3,30	Porcelaine. .	0,20
Soie	1,15	Ivoire.	0,03

L'addition d'une petite quantité d'acide ou de sel diminue la force électromotrice ; l'alcool l'augmente un peu.

Il en est de même pour l'écoulement de l'eau dans un tube de verre [2]. La force électromotrice est encore proportionnelle à la pression et indépendante de la longueur ou de la section du tube, pourvu que celles-ci restent dans les limites où la loi de Poiseuille est applicable.

Le phénomène est lié au mouvement relatif du liquide et du corps solide. M. Dorn [3] remplit d'eau un long tube de verre communiquant avec un galvanomètre par des électrodes soudées latéralement ; une couche épaisse de perles ou de sable est placée au fond du tube. Quand on renverse le tube, la chute des perles produit un courant électrique en sens

(1) Quincke, *Pogg. Ann.*, t. CVII, p. 1 ; 1859 et t. CX, p. 38 ; 1860.
(2) Zöllner, *Pogg. Ann.*, t. CXLVIII, p. 640 ; 1837.
(3) Dorn, *Wied. Ann.*, t. V, IX et X ; 1878 et 1880.

inverse de leur mouvement, c'est-à-dire parallèle à la vitesse acquise par le liquide.

Des effets analogues se produisent [1] quand on lance un jet de liquide sur une surface solide sous différentes inclinaisons; la force électromotrice se détermine par deux électrodes, l'une sur l'ajutage du jet et l'autre à la plaque frappée. Cette force électromotrice, toutes choses égales, augmente avec l'inclinaison du jet sur la plaque ; elle dépend de la nature des corps, solide et liquide, et semble proportionnelle au carré de la vitesse du jet.

Le phénomène d'*endosmose électrique*, dont la découverte est due à Reuss [2], peut être considéré comme un effet réciproque du précédent. Si l'on fait passer un courant, par des électrodes de platine, dans un tube en U contenant de l'eau et dont la courbure est bouchée par un tampon d'argile, le liquide traverse la cloison dans le sens du courant et il s'établit une différence de niveau entre les deux branches.

Il en est de même, à un degré beaucoup moindre, avec des liquides plus conducteurs, comme l'acide sulfurique étendu.

La quantité d'eau ainsi transportée [3] est proportionnelle au courant, indépendante de la surface et de l'épaisseur de la paroi ; elle est 500 ou 600 fois plus grande que celle qui subit l'électrolyse. La pression antagoniste capable d'équilibrer cette poussée du liquide est proportionnelle au courant et en raison inverse de la surface de la paroi ; cette dernière relation s'explique si on assimile la plaque poreuse à un assemblage de tubes capillaires, puisque le nombre de ces tubes est proportionnel à la surface.

Avec l'essence de térébenthine, l'endosmose a lieu en sens contraire. Cette inversion serait due [4] à l'électrisation négative que prennent l'eau et l'alcool par frottement sur un corps solide, tandis que l'essence s'électrise positivement.

La structure de la paroi poreuse a une influence considérable [5]. Pour un même courant, différentes plaques d'argile on donné des nombres variant de 107 à 738; les nombres

(1) Elster, *Wied. Ann.*, t. VI, p. 553 ; 1879.
(2) Reuss. *Mém. de la soc. des Nat. de Moscou*, t. II, p. 327 ; 1809.
(3) G. Wiedemann, *Pogg. Ann.*, t. LXXXVII, p. 321 ; 1852.
(4) Quincke, *Pogg. Ann.*, t. CXIII, p. 583 ; 1861.
(5) T. Engelmann, *Arch. néerl.*, t. IX, p. 332 ; 1872.

sont beaucoup plus faibles, de 41 à 8, avec des plaques de bois, des tranches de pomme de terre, vessie de porc, peau de grenouille, etc.

L'endosmose peut même entraîner des corps solides [1]. Si on place les électrodes dans des tubes fermés en bas par des tampons d'argile et situés dans un vase plein d'eau, le tube de l'anode contenant un peu d'argile délayée, cette argile traverse peu à peu la paroi correspondante.

728. Couples thermoélectriques. — On a vu déjà que la méthode la plus exacte pour mesurer des variations locales de potentiel consiste à observer le phénomène de Peltier.

D'une manière générale, l'énergie fournie ou absorbée pendant l'unité de temps par un courant d'intensité I, entre deux points dont la différence de potentiel est H, a pour expression le produit IH. Si cette énergie n'est employée qu'à l'échauffement du système et que Q désigne la quantité correspondante de chaleur, on a

$$HI = JQ = Q.4,17.10^7.$$

Lorsqu'on évalue le courant en ampères et la différence de potentiel H en volts, la formule devient

$$HI = 4,17Q, \qquad H = 4,17\frac{Q}{I} = 4,17\,Q_1;$$

la quantité Q_1 représente la chaleur qui correspond au passage d'un ampère pendant une seconde, ou d'un coulomb.

Si la valeur de H est indépendante du courant, sa détermination se ramène ainsi à une mesure calorimétrique; la seule difficulté consiste à éliminer la chaleur qui se dégage entre les mêmes points en vertu de la loi de Joule.

On doit à M. Le Roux (**212**) des déterminations très soignées de la force électromotrice de contact H pour un assez grand nombre de couples à la température moyenne de 25°. Le couple formé par le cuivre et un alliage renfermant 10 de bismuth et 1 d'antimoine donne, aux températures de 100° et de 25°, des quantités de chaleur dont le rapport est 1,29. Ce nombre diffère très peu du rapport 1,25 des températures ab-

[1] A. Becquerel, *Traité d'Électricité*, etc., t. III, p. 102 ; 1835.

solues ; la valeur de H est donc sensiblement proportionnelle à la température absolue, et le couple doit avoir une marche uniforme, ce qui est conforme à l'expérience.

Les différences de potentiel de contact H sont très faibles. Pour le couple précédent, qui donne le nombre le plus élevé, M. Le Roux a obtenu $0^{v},0219$.

M. Bellati [1] a trouvé qu'à la température de $13^{\circ},8$ le débit d'un coulomb dégage 0,0006065 calorie dans une soudure du couple *fer-zinc* ; la valeur correspondante de H serait $0^{v},00253$. Entre 0° et t°, la force électromotrice du couple est

$$E_0^t = 917,77t - 1,9488t^2 = 0^{v},91777.10^{-5}(t - 0,002123t^2).$$

On peut encore en déduire H par la relation (**209**)

$$H = T\frac{dE}{dT} = T.0^{v},91777.10^{-5}(1 - 0,004246t),$$

qui donne $H = 0^{v},00248$ à $13^{\circ},8$; les deux valeurs sont aussi concordantes qu'on peut le désirer.

Les expériences de M. Le Roux relatives au transport électrique de la chaleur (**211**) ont été faites par une méthode ingénieuse. Deux barres de même métal AB, A′B′ (fig. 211) sont

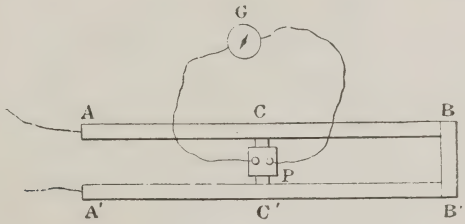


Fig. 211.

disposées parallèlement entre elles. Les extrémités A et A′ sont maintenues dans un bain à zéro et les extrémités B et B′, réunies par une lame de cuivre, dans un bain à 100°.

Lorsqu'on fait passer par A et A′ un courant énergique, la température des points intermédiaires est modifiée en raison de la loi de Joule et du transport électrique de la chaleur. La différence des températures des points C et C′, également situés sur les deux barres, laquelle correspond au double de

[1] Bellati, *Atti del R. Inst. Veneto* [5], t. V, p. 573; 1879.

l'effet à observer, est estimée à l'aide d'une pile thermoélectrique P. Si la symétrie de l'appareil était complète, le galvanomètre G devrait rester au zéro quand les barres ne sont traversées par aucun courant, mais cette condition n'est pas nécessaire ; en effet, si on renverse le sens du courant, la différence des déviations observées correspond dans tous les cas au quadruple de l'effet. On peut encore recommencer l'expérience en remplaçant l'un par l'autre les bains à température constante ; la moyenne des résultats obtenus dans les deux cas élimine tous les défauts de symétrie.

Si on admet que la variation de température est uniforme entre les deux bains, l'effet observé au milieu de la barre est proportionnel à la chaleur spécifique d'électricité du métal relative à la température moyenne. M. Le Roux a vérifié d'abord que cet effet est proportionnel au courant. Il résulte aussi de ses expériences que la chaleur spécifique d'électricité est *nulle* pour le *plomb* ; positive pour le *laiton*, le *cuivre*, l'*argent*, le *zinc*, le *cadmium*, l'*antimoine* et un alliage de *bismuth* avec un dixième d'*antimoine;* négative pour l'*étain*, l'*aluminium*, le *platine*, le *maillechort* et le *bismuth* pur. Dans les deux listes, les métaux ont été rangés dans l'ordre des valeurs croissantes des chaleurs spécifiques d'électricité.

M. Battelli [1] a étudié le phénomène jusqu'à la température de 300° environ. Deux tubes contiennent une petite quantité de mercure, dans lequel plongent les deux soudures d'un couple thermoélectrique ; un courant extérieur I échauffe l'une et refroidit l'autre ou les échauffe inégalement; la différence de température des deux masses de mercure est indiquée par un couple fer-maillechort bien étudié.

Les deux tubes sont placés dans une enceinte à double paroi dont la température est maintenue constante par les vapeurs d'un liquide en ébullition. En désignant par t_1 et t_2 les températures du mercure pendant le passage du courant extérieur, la déviation δ du galvanomètre relié au couple thermométrique est donnée par une expression de la forme

$$\delta = \alpha(t_2 - t_1)\left(\beta - \frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

[1] A. Battelli, *Nuovo Cim.* [3], t. XXVII, p. 111 ; 1889.

dans laquelle α et β sont des constantes. Comme la moyenne des températures t_1 et t_2 est sensiblement égale à la température t de l'étuve, on en déduit

$$t_2 - t_1 = \frac{\delta}{\alpha(\beta - t)}.$$

On élimine d'ailleurs l'échauffement propre des conducteurs en renversant le sens du courant.

En appelant M la valeur en eau des deux masses de mercure, la quantité de chaleur relative à l'effet Peltier, pendant le temps correspondant θ, est $Q = M(t_2 - t_1)$ et l'on a

$$JQ = HI\theta, \qquad H = \frac{JQ}{I\theta} = \frac{JM}{I\theta}(t_2 - t_1).$$

D'autre part, la force électromotrice du couple, étudié directement, est représentée par une formule parabolique

$$E = a(T - T_1)[T_n - \tfrac{1}{2}(T + T_1)],$$

qui détermine les deux constantes a et T_n. La valeur de H à deux températures différentes, déduite du phénomène de Peltier, donnera les mêmes constantes par la relation (209)

$$H = aT(T_n - T).$$

Avec le couple *cuivre-fer*, par exemple, les valeurs de la constante a (en unités C. G. S.), déduites de la force électromotrice ou de l'effet Peltier aux températures de $2^\circ,85$ et 275°, ont été 4,871 et 4,732 ; celles de T_n étaient 547,1 et 552,7. La température du point neutre serait voisine de

$$550 - 273 = 277^\circ.$$

La théorie se vérifie encore au même degré d'approximation pour six autres couples.

Enfin la mesure des chaleurs spécifiques d'électricité, par le transport électrique de la chaleur, donne aussi

$$\frac{\sigma' - \sigma}{T} = -\frac{d}{dT}\left(\frac{H}{T}\right) = a.$$

Pour le couple *cadmium-plomb*, on a ainsi obtenu $a = 1,527$ au lieu de 1,452 calculé par la force électromotrice. Les valeurs sont plus différentes (1,66 au lieu de 2,261) avec un couple *plomb-bismuth*; on sait d'ailleurs que le bismuth présente des difficultés particulières à cause de sa cristallisation.

729. Couples thermoélectriques à liquides. — M. Bagard [1] a construit un couple qui peut servir d'étalon. Trois tubes A, B et C contiennent de l'almalgame de zinc, à 0,0005 de zinc, surmonté par une dissolution de sulfate de zinc saturée à 0°. Le tube intermédiaire B est porté à la température de l'eau bouillante, les deux autres entourés de glace à 0°. Des siphons relient les solutions des tubes A et B ainsi que les amalgames des tubes B et C; le sulfate que renferme ce dernier n'a d'autre but que d'empêcher l'altération de l'amalgame.

En prenant les électrodes sur les amalgames des tubes extrêmes A et C, le couple n'est pas polarisable; sa force électromotrice, mesurée par compensation, est $E_0^{100} = 0^v,1167$. Cette valeur ne varie que de $0^v,0001$ quand la proportion de zinc change de 0,02; il n'est donc pas nécessaire de faire les dosages du liquide avec une grande précision. Entre les températures de 0° et de t°, la force électromotrice est

$$E_0^t = E_0^{100}[0,009233t + 0,00000767t^2].$$

La même loi s'applique aux couples formés par un amalgame et un électrolyte, ou même par deux électrolytes; dans ce cas, le contact des liquides est établi par des diaphragmes en parchemin végétal.

Avec le sulfate de zinc et l'acide sulfurique, l'acide est positif et la force électromotrice est environ $E_0^{76,6} = 0,058$.

Pour le contact des sulfates de zinc et de cuivre, le sulfate de zinc est négatif aux températures modérées, puis devient positif; le maximum a lieu vers 40°.

Le passage d'un courant par la surface de séparation d'un corps solide et d'un liquide électrolysable y produit toujours une opération chimique correspondante. Si la chaleur de com-

[1] Bagard, *Journ. de Phys.* [3], t. I, p. 128; 1892. — *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXIV, p. 980; 1892.

binaison des éléments de l'électrolyse est de Q_1 calories par équivalent évalué en grammes, la quantité de chaleur relative à un coulomb est $Q_1 . 1,036 . 10^{-5}$ calories (653) et la force électromotrice nécessaire, exprimée en volts,

$$Q_1 . 1,036 . 10^{-5} . 4,17 = Q_1 . 0,432 . 10^{-5}.$$

S'il existe un effet Peltier au contact des deux corps, on doit admettre que l'énergie totale fournie par le courant produit, en même temps que l'électrolyse, un dégagement ou une absorption de chaleur.

Pour éliminer les pertes de chaleur par conductibilité ou par convection dans le liquide, M. Bouty [1] prend comme électrode le thermomètre lui-même, qui a été d'abord gradué en calories. A cet effet, le réservoir est entouré par un fil bien isolé et, en plongeant l'appareil dans le liquide, on détermine l'élévation de la colonne qui correspond au passage d'un courant I dans le fil pendant le temps θ, c'est-à-dire à l'accès d'une énergie calorifique $I^2 R \theta$.

Le fil enlevé, on argente la surface du verre et on y dépose par électrolyse une mince couche de cuivre. Deux thermomètres semblables peuvent alors être employés comme électrodes dans une solution de cuivre.

Dans une dissolution de sulfate de cuivre, par exemple, on constate un dégagement de chaleur sur l'électrode positive, ou anode, et un refroidissement sur la cathode. Comme les quantités de chaleur sont proportionnelles à l'intensité du courant, le phénomène présente bien le caractère qui correspond à un effet Peltier.

Avec les métaux tels que le cuivre, le zinc, le cadmium, l'effet observé est indépendant de la nature de l'acide et du degré de concentration des dissolutions, pourvu qu'elles ne soient pas trop étendues. Pour le cuivre, la quantité de chaleur par coulomb est $0^c,05078$, ce qui correspondrait à une différence de potentiel de $0^v,212$; le zinc donne $0^v,241$. Ces nombres surpassent beaucoup ceux qu'on trouve, par le même procédé, pour le contact des métaux entre eux.

L'anode est le siège du travail chimique positif. La forma-

(1) Bouty, *Journ. de Phys.* [1], t. IX, p. 229; 1880.

tion d'un équivalent d'oxyde de cuivre hydraté dégage 19 000 calories et la combinaison de cet oxyde avec l'acide sulfurique étendu 9 200, soit en tout 28 200 calories. La quantité de chaleur produite par l'action chimique est donc de 0,292 calorie pour un coulomb, laquelle correspond à une différence de potentiel de $4,17.0,292 = 1^{v},217$; il en résulte que l'excès de potentiel de la dissolution sur celui du métal, ou la force électromotrice de contact, est

$$H = 1^{v},217 - 0^{v},212 = 1^{v},005.$$

Par un calcul analogue relatif au sulfate de zinc, en partant de 53 500 calories pour la chaleur de formation du sulfate, on obtient encore

$$H = 2^{v},309 - 0^{v},241 = 2^{v},068.$$

Si l'on suppose que dans un couple Daniell à sulfates, les deux dissolutions soient au même potentiel, la différence des excès de potentiel du liquide sur les deux métaux donnerait $1^{v},06$ pour le contact du cuivre et du zinc, valeur très voisine de la force électromotrice du couple.

M. Jahn (1) arrive au même résultat par des considérations différentes. Il détermine la polarisation maximum d'électrodes de platine dans une solution métallique; la cathode est alors recouverte par une couche du métal déposé et le contact a lieu entre le métal et sa dissolution. Pour un couple formé par deux métaux plongés respectivement dans une dissolution de leurs sels, la force électromotrice est sensiblement égale à la différence des polarisations ainsi observées, d'où résulterait que les dissolutions sont en équilibre électrique. Cette relation se vérifie avec une grande exactitude pour différents sels des métaux suivants : cadmium, zinc, cuivre, plomb et argent. La même méthode permet encore d'étudier l'influence de la température sur la polarisation et, par suite, sur la force électromotrice des couples.

M. Haga (2) a constaté que la chaleur spécifique d'électricité pour le mercure est $-0,69.10^{-6}$ à la température de 78°

(1) H. Jahn, *Wied. Ann.* t. XXVIII, p. 491 et 498; 1887. — *Journal de Physique* [2] t. VI, p. 575.

(2) Haga, *Wied. Ann.*, t. XXVIII, p. 179; 1886.

et qu'entre les limites de 42° et 218° elle est proportionnelle à la température absolue.

Pour les couples thermoélectriques métal-liquide entre les températures t_1 et t_2, M. Bouty trouve que la force électromotrice est représentée par une expression du premier degré

$$E = a + b(t_2 - t_1),$$

dans laquelle le paramètre b ne dépend que de la nature du métal; il en résulte que l'effet Peltier est proportionnel à la température absolue. Avec le cuivre, $b = 0^v,00078$; on en déduit $0^v,22$ pour l'effet Peltier à 12°, tandis que la mesure directe avait donné $0^v,212$.

730. Diagrammes thermoélectriques. — Le pouvoir thermoélectrique $\varphi(T) = \frac{dE}{dT}$ de deux corps (**209**) présente une grande analogie avec l'*entropie* de Clausius appliquée aux cycles réversibles (**75**), puisque la quantité H est égale à $T\varphi(T)$. En raison de cette propriété, Maxwell [1] proposait de désigner la fonction $\varphi(T)$ sous le nom d'*entropie électrique*.

Comme la chaleur spécifique d'électricité est nulle pour le plomb, si l'on rapporte toutes les mesures au plomb, les courbes qui figurent le pouvoir thermoélectrique en fonction de la température devraient être des droites dont le coefficient angulaire serait le quotient k de cette chaleur spécifique d'électricité par la température absolue correspondante.

La plupart des expériences [2] relatives aux métaux et aux alliages montrent, en effet, que ces pouvoirs thermoélectriques sont sensiblement des fonctions linéaires de la température. Quelle que soit leur forme, d'ailleurs, les diagrammes fournissent une représentation très simple des quantités de chaleur dégagées ou absorbées dans le circuit à différents titres pendant le passage d'un courant.

Le pouvoir thermoélectrique $\varphi(T)$ d'un métal A étant figuré par la courbe A (fig. 212), il résulte d'abord de la relation $H = T\varphi(T)$ qu'à la température T la différence de potentiel de

(1) Cl. Maxwell, *Élément. Treatise on Elect.*, p. 137.

(2) Tait, *Proceed. Ed. R. S.*, 1870 et 1871. — Mac Gregor et Knott, *Phil. Trans. Ed. R. S.*, t. XXVIII, p. 321; 1879. — Bottomley et Tanakadaté, *Proceed. L. R. S.*, t. XLVI, p. 286; 1889.

contact avec le métal neutre est égale à l'aire du rectangle PQ. De même, la valeur H_1 relative à la température T_1 est donnée par le rectangle P_1Q_1. Enfin, la force électromotrice E du métal A avec le plomb entre les températures T_1 et T est l'inté-

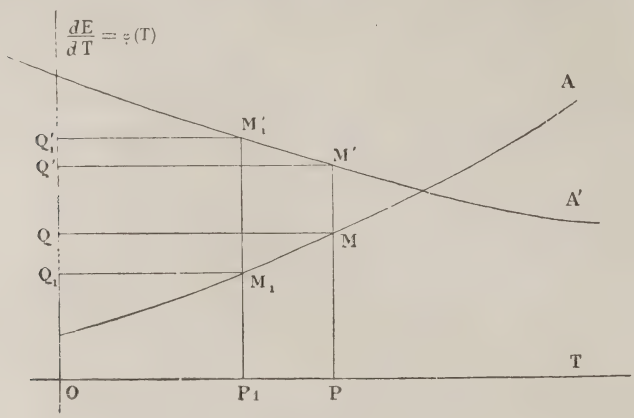


Fig. 212.

grale de $\varphi(T)\,dT$, c'est-à-dire l'aire du trapèze curviligne M_1P.

En faisant $\sigma' = 0$ pour le plomb, on a aussi (209)

$$\int_{T_1}^{T} \sigma\, dT = H - H_1 - E;$$

cette intégrale est l'aire du trapèze curviligue MQQ_1M_1.

Pour un circuit de deux métaux quelconques A' et A, les valeurs de H et H_1 sont les aires des rectangles MQ' et $M_1Q'_1$, la force électromotrice est représentée par l'aire du trapèze curviligne $MM'M'_1M_1$ et les effets relatifs au transport électrique de la chaleur sont figurés respectivement par les trapèzes curvilignes MQQ_1M_1 et $M'Q'Q'_1M'_1$.

Ces différentes surfaces représentent également les énergies calorifiques absorbées ou dégagées aux points correspondants du circuit pendant le passage de l'unité d'électricité.

Toutefois le phénomène n'est pas toujours régulier. Ainsi les courbes relatives au *fer* et au *nickel* ont plusieurs sinuosités et varient avec les échantillons. Des couples [1] formés de

[1] Abraham et Chassagny. — *Ann. de Chimie et de Physique* [6], t. XXVII, p. 355; 1892.

cuivre, *fer*, *argent* et *platine* donnent des résultats concordants quand on prend des fils sur la même bobine, mais la force électromotrice n'est pas exactement représentée par une formule parabolique en fonction des températures absolues rapportées au thermomètre à hydrogène.

MM. Dewar et Fleming [1] ont étudié un grand nombre de couples de métaux ou alliages avec le plomb. L'une des soudures du couple étant à zéro, l'autre est placée dans un bain dont la température, qui variait de $+100°$ à $-200°$, est évaluée par un thermomètre à résistance de platine (**690**).

Les diagrammes des forces électromotrices ainsi obtenues sont presque toujours des lignes courbes, mais aucune ne peut être représentée exactement par une parabole dans toute son étendue et quelques-unes ont des points d'inflexion. Lorsque la tangente est horizontale, la température correspondante définit le point neutre du métal par rapport au plomb, mais il existe quelquefois plusieurs points neutres différents. L'*antimoine* aurait deux points neutres, vers $-30°$ et $-200°$. Les courbes du *bismuth* ont une allure singulière : deux échantillons de métal pur ou commercial ont présenté un changement brusque de continuité au voisinage de $-80°$.

731. Énergies chimiques. — Dans toute pile hydroélectrique fermée, le travail électrique est emprunté à l'énergie chimique; il est évidemment nécessaire que les réactions considérées dans leur ensemble dégagent de la chaleur.

En appelant Q_1 la somme des chaleurs de combinaison des éléments d'un couple par équivalent, la quantité JQ_1 d'énergie chimique dépensée dans le passage de l'unité d'électricité est égale à l'énergie électrique correspondante, ou à la force électromotrice E, si le courant ne produit pas de travail extérieur et qu'il n'existe aucune action secondaire; la force électromotrice (**729**) serait donc $0^v,432.10^{-4}.Q_1$.

Pour le couple Daniell à sulfates, l'action chimique se réduit à la substitution du zinc au cuivre dans le sulfate, c'est-à-dire au dégagement de 25 300 calories. La force électromotrice serait alors $25\,300.0^v,432.10^{-4} = 1^v,09$; c'est sensiblement la valeur que donne l'expérience directe.

[1] J. Dewar et J.-A. Fleming, *Ph. Mag.* [5] t. XL, p. 95 : 1895.

L'accord est aussi satisfaisant pour le couple à sulfates de zinc et de cadmium.

Cette conformité du calcul avec l'expérience avait conduit Lord Kelvin à considérer la force électromotrice des couples comme étant égale à l'énergie chimique des réactions par équivalent, mais cette loi n'est pas générale (**198**).

Il faut remarquer, en effet, que les couples en question présentent des conditions exceptionnelles ; ils ne donnent lieu à aucun dégagement de gaz, ni action secondaire, et ne se polarisent pas d'une manière appréciable.

Diverses causes accessoires doivent aussi intervenir. Les couples de Volta formés de *zinc amalgamé*, par exemple, n'ont pas la même force électromotrice suivant que le second métal, supposé inaltérable, est le *cuivre*, l'*argent*, le *platine*, etc., bien que l'unité d'électricité dissolve dans tous la même quantité de zinc et dégage le même volume d'hydrogène.

Parmi les actions chimiques elles-mêmes, on doit distinguer celles qui sont liées au courant et celles qui proviennent d'effets secondaires. Dans l'électrolyse, l'effet direct du courant est de séparer les éléments. Les effets secondaires dépendent de la nature de ces éléments et de celle des électrodes; ils s'accomplissent en vertu des propriétés chimiques des corps en présence et d'une manière indépendante, au moins en apparence, du courant. On doit encore y joindre les changements d'état, le dégagement des gaz provenant de la décomposition de l'eau, la cristallisation d'un sel formé par l'électrolyse au milieu de la dissolution saturée, etc. Parmi ces actions si complexes, quelles sont celles dont on doit tenir compte finalement et celles qu'on doit négliger dans le calcul de la force électromotrice ?

Considérons l'électrolyse du sulfate de potasse [1]. Pour chaque unité d'électricité, il se dégage à l'anode un équivalent d'oxygène et un équivalent d'hydrogène à la cathode. En outre, la présence de l'acide sulfurique devient manifeste autour de la première électrode et celle de la potasse autour de la seconde. On explique habituellement ce résultat en admettant que la décomposition du sulfate de potasse se fait

[1] M. Berthelot, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIII, p. 661; 1881. — *Ann. de Chim. et de Phys.* [5], t. XXVII, p. 89; 1882.

de la même manière que celle du sulfate de cuivre, sauf que le potassium mis en liberté décompose l'eau par une action secondaire. L'acide sulfurique d'un côté et la potasse reformée, de l'autre, se diffusent ensuite dans le liquide et reproduisent le sulfate de potasse primitif.

La question est de savoir si le travail direct du courant correspond à la mise en liberté du potassium, les autres actions étant considérées comme purement chimiques et indépendantes; ou à la décomposition simultanée du sulfate de potasse en acide et en base et de l'eau en hydrogène et en oxygène; ou enfin, étant donné que l'acide et la base se recombinent incessamment et que le résultat final se réduit au dégagement de l'oxygène et de l'hydrogène, à la seule décomposition de l'eau. Les quantités de chaleur relatives à un équivalent seraient, suivant le cas, 98 000, 50 200 ou 345 000 calories; c'est le second qui semble se réaliser. En associant des couples constants et de forces électromotrices graduées, M. Berthelot cherche par expérience la force électromotrice minimum qui fait apparaître nettement la décomposition. L'électrolyse du sulfate de potasse exige une force électromotrice d'au moins $2^{v},16$ équivalant à 50 000 calories. Cette force électromotrice ne suffit plus quand on emploie le mercure comme cathode, le potassium s'amalgamant au lieu de décomposer l'eau; la force électromotrice nécessaire se rapproche alors de $3^{v},234$ (ou 98 000 calories), tout en restant moindre, c'est-à-dire qu'il reste à tenir compte de la chaleur d'amalgamation du potassium.

Un cas intéressant est celui où l'électrolyse peut s'effectuer de plusieurs manières; l'expérience montre que, si on fait croître progressivement la force électromotrice, la réaction qui absorbe la plus petite quantité de chaleur commence par se manifester; chaque mode de décomposition apparaît à son tour, dès que la force électromotrice atteint la valeur voulue, sans toutefois que les précédents cessent de se produire.

La même chose a lieu pour un mélange de sels en dissolution, et on a pu fonder une méthode analytique de séparation de certains métaux sur l'action de forces électromotrices progressivement croissantes.

Il paraît résulter de ces expériences que la force électro-

motrice dans l'électrolyse correspond à la somme des énergies de toutes les réactions effectuées pendant le passage du courant, sans qu'il y ait lieu de distinguer entre les réactions dites primitives et les réactions réputées secondaires, à toutes celles du moins qui ont lieu immédiatement et au contact même de l'électrode, le cas du sulfate de potasse montrant qu'il n'y a pas lieu de tenir compte de la recomposition ultérieure du sulfate de potasse par suite des diffusions de l'acide et de la base.

Pour un grand nombre de couples du genre Daniell, où les sulfates sont remplacés par des chlorures, des bromures et des iodures, et le cuivre par le mercure et l'argent, la relation simple des forces électromotrices aux énergies chimiques est le plus souvent en défaut [1], en particulier quand le sel qui entoure l'anode est insoluble.

M. Braun admet qu'une portion seulement de la chaleur chimique peut être convertie en travail électrique et que, pour chaque composé, il y a un rapport constant, qu'il appelle le coefficient de rendement, entre ces deux quantités; la chaleur non convertie en travail électrique échauffe le couple et produit l'élévation de température qu'on attribue ordinairement aux actions secondaires. A ce point de vue un couple serait l'analogue d'une machine à gaz dans laquelle, en vertu du principe de Carnot, une fraction seulement de l'énergie chimique rendue disponible est convertie en travail mécanique. Poussant l'analogie plus loin, M. Chaperon [2] suppose que le coefficient de M. Braun est celui qui serait déterminé par le théorème de Carnot pour une machine thermique fonctionnant entre la température actuelle et la température de dissociation du composé; mais les données expérimentales nécessaires à la vérification de cette hypothèse sont actuellement insuffisantes.

732. Influence de la température et de la pression. — On a, d'après Von Helmholtz (**198** et **199**), la relation générale

$$JQ_1 = E - T\frac{\partial E}{\partial T}.$$

(1) Braun, *Wied. Ann.*, t. V, p. 182; 1878, t. XVI, p. 561; 1882 et t. XVII, p. 593; 1882.

(2) Chaperon, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCII, p. 786; 1881.

La correspondance de la force électromotrice avec l'énergie chimique ne doit donc se vérifier que si la première est indépendante de la température. Cette condition est sensiblement réalisée pour le couple Daniell, mais non pour tous les couples du même genre. Ainsi, quand on substitue l'argent au cuivre [1], on a $\frac{\partial E}{\partial T} = -0^{v},0012$. A la température de 15°, la correction doit donc être de $0^{v},35$ environ, ce qui est conforme à l'expérience. Le couple L. Clark (**710**) varie dans le même sens, mais beaucoup plus rapidement.

Lorsque la force électromotrice croît avec la température, elle surpasse la somme des énergies chimiques; le couple tend alors à se refroidir par le passage du courant. Tel est le cas du couple à calomel de Von Helmholtz, dont la force électromotrice croît légèrement avec la température, ou encore d'un couple analogue dans lequel le chlore est remplacé par le brome. La force électromotrice vaut environ 1,7 fois celle qu'on déduit de la chaleur chimique.

On a vu aussi que la loi de Kopp et Wœstyne doit s'appliquer à tous les éléments du couple pour que la force électromotrice soit indépendante de la température. Or, cette loi n'est satisfaite [2] dans une série de transformations qu'autant que celles-ci ne comportent pas de changements d'état. Dans le cas contraire, la chaleur de combinaison est, en outre, variable avec la température. Ce sont précisément les couples à dépolarisant solide, comme les couples à sulfate de mercure, à protochlorure de mercure, à chlorure d'argent, qui sont les plus sensibles aux variations de température et présentent les plus grands écarts avec les énergies chimiques; les deux ordres de phénomènes sont donc connexes.

De nombreuses expériences ont été faites par M. Crapski [3] et M. Gockel [4] pour vérifier la théorie de Von Helmholtz. Le terme de correction déduit des variations de la force électromotrice avec la température est toujours du signe prévu, mais il ne représente jamais qu'une fraction plus ou moins

(1) A. Potier, *Bulletin de la Société de Physique*; juillet 1884, p. 179.
(2) Berthelot, *Essai de mécanique chimique*, t. I, p. 110; 1879.
(3) Crapski, *Wied. Ann.*, t. XXI, p. 209; 1884.
(4) Gockel, *Wied. Ann.*, t. XXIV, p. 612; 1885.

grande de la différence qui existe entre l'énergie chimique et celle qui correspond à la force électromotrice.

Les résultats obtenus par M. Jahn, dans le travail déjà cité plus haut (729), paraissent beaucoup plus concordants. Les variations de la force électromotrice E avec la température ont été déterminées en comparant deux couples dont l'un est placé dans la glace fondante. Pour obtenir la valeur de Q_1, on plonge le couple dans un calorimètre et on ajoute à la chaleur dégagée celle qui correspond au courant dans le circuit extérieur. L'expérience faite sur une dizaine de couples, dont les variations avec la température étaient positives ou négatives, a montré que les quantités $T\frac{\partial E}{\partial T}$ et $E - JQ_1$ sont toujours de même signe, souvent très voisines, et que le maximum des écarts ne dépasse pas un dixième.

La théorie de Von Helmholtz conduit aussi à l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial p} = -\delta v,$$

dans laquelle la quantité δv représente l'accroissement qu'éprouve le volume du couple, à pression constante, pendant le passage de l'unité d'électricité.

M. Gilbault [1] a mesuré cette influence de la pression sur divers couples. Quand il n'existe pas de dégagement gazeux, la variation de la force électromotrice est de la forme

$$E_0 - E = ap - bp^2.$$

Comme le coefficient b est très petit, le terme correspondant n'a d'importance qu'aux pressions très élevées, de sorte que la variation est sensiblement linéaire.

Pour les couples à dégagement gazeux, l'influence de la pression se traduit par la formule

$$E_0 - E = A \log. p + cp.$$

Le coefficient c est encore très petit et la variation peut être considérée comme logarithmique.

[1] H. Gilbault, *C. R, de l'Acad. des Sc.*, t. CXIII, p. 465; 1891.

Ces deux résultats sont conformes à la théorie ; l'expérience en vérifie également les valeurs numériques, comme on le voit dans le tableau suivant où la variation ∂E de la force électromotrice est exprimée en dix-millièmes de volts par pression de 100 atmosphères :

Couple.	∂E Obs.	∂E Cal.
Daniell.	+ 5	+ 5,17
Warren de la Rue.	+ 7	+ 6,62
Accumulateur Planté. .	— 12	— 12,7
Volta.	—600	—586
Bunsen.	—405	—383
Pile à gaz.	+845	+865

733. Effets du magnétisme. — L'influence de l'aimantation sur les propriétés thermoélectriques du fer et de l'acier avait été signalée par Lord Kelvin (1). La force électromotrice d'un couple *fer-cuivre* augmente (2) quand il est placé axialement dans un champ de faible intensité (35 unités) et la variation croît avec la différence de température des deux soudures. M. Chassagny (3) met en opposition deux couples *fer-cuivre* dont les soudures sont respectivement à 0° et 100°, le fil de fer de l'un d'eux étant placé tout entier suivant l'axe d'une bobine. A l'état ordinaire, le courant est nul et la force électromotrice de chacun des couples est de 1093,2 microvolts. Dès que la bobine est alimentée par un courant de sens quelconque, le couple situé dans le champ magnétique prédomine. L'accroissement de force électromotrice augmente d'abord avec le champ jusqu'à un maximum de 6,1 microvolts pour un champ de 55 unités et diminue ensuite plus lentement.

M. Houllevigue (4) a confirmé ces résultats. L'accroissement de force électromotrice produit par une aimantation longitudinale sur le couple *fer-cuivre* présente un maximum et s'annule dans un champ de 350 unités. Pour le couple *acier-cuivre*, au contraire, il y a une diminution qui augmente avec le champ.

(1) W. Thomson, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1856, p. 722.
(2) V. Strouhal et C. Barus, *Wied. Ann.*, t. XIV, p. 54; 1881.
(3) Chassagny, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. CXVI, p. 977; 1893.
(4) L. Houllevigue, *Ann. de ch. et de phys.* [7], t. VII, p. 456; 1896.

Dans les deux cas, l'aimantation transversale produit un effet de même sens, mais beaucoup plus faible.

M. Remsen [1] a trouvé aussi que le magnétisme modifie les actions chimiques. Si l'on met, par exemple, une solution de sulfate de cuivre dans une coupe de fer située entre les pôles d'un électro-aimant, le dépôt de cuivre n'est plus uniforme et l'épaisseur de la couche est sensiblement plus faible aux points où le champ est maximum, particulièrement auprès des pièces polaires.

Cette expérience et d'autres analogues [2] ont donné lieu à des interprétations contradictoires. M. Janet déduit du principe de la conservation de l'énergie cette conséquence que la chaleur dégagée par la combinaison du fer avec un corps quelconque doit être plus faible lorsque le métal est placé dans un champ magnétique. M. Duhem était arrivé de son côté à la même conclusion.

Considérons un aimant permanent A et un morceau de fer doux, et supposons que l'on fasse subir au système le cycle d'opérations suivantes : 1° le fer étant d'abord très éloigné, on l'approche de l'aimant, ce qui correspond à un travail $\mathfrak{T}$ des actions magnétiques, abstraction faite de l'échauffement du métal par l'aimantation; 2° on attaque le fer par un acide, d'où résulte un dégagement de chaleur Q; 3° en éloignant le sel formé, le travail magnétique dépensé est négligeable devant $\mathfrak{T}$, puisque le coefficient d'aimantation du sel est très petit ; 4° on décompose le sel de manière à reconstituer le fer primitif, opération qui absorbe une quantité de chaleur Q'. Le cycle étant fermé, il en résulte

$$\mathfrak{T} + J(Q - Q') = 0 \qquad \text{et, par suite,} \qquad Q' > Q.$$

La force électromotrice d'un couple renfermant du fer doit donc diminuer quand on le soumet à l'influence d'un champ magnétique ; en d'autres termes, le fer aimanté serait positif par rapport au fer moins aimanté.

(1) I. Remsen, *La lum. électr.*, t. IV, p. 126 ; 1881.

(2) Voir Colardeau, *Journ. de Ph.* [2], t. VI, p. 129 ; 1887. — P. Janet. *Ibid.*, p. 286 et t. VIII, p. 312, 1889. — Hurmuzescu, *Ibid*, [3] t. IV, p. 118 ; 1895. — E. L. Nichols et W. Franklin, *Am. Journ.*, t. XXV. — H. A. Rowland et Bell, *Ibid.*, t. XXVI ; 1888. — *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 142 ; 1889.

MM. Nichols et Franklin ont trouvé, au contraire, que si l'on forme un couple à liquide avec des électrodes en fer et en platine, l'action du champ magnétique augmente la force électromotrice; l'accroissement serait de $0^{v},068$ dans un champ de 3800 unités. MM. Rowland et Bell attribuent ce désaccord à l'existence du liquide magnétique produit par la réaction chimique. Si on observe la première impulsion galvanométrique, avec deux électrodes en fer dont une seule est soumise au champ, on trouve alors que le fer aimanté devient positif.

M. Hurmuzescu emploie des électrodes formées de fils de fer à la Wollaston, c'est-à-dire noyées dans un tube de verre de façon que la section terminale soit seule dénudée. Deux électrodes semblables plongent dans un tube en U renfermant une dissolution très étendue d'acide acétique ou d'acide oxalique, l'une des branches du tube étant placée entre les pôles d'un électro-aimant ; la force électromotrice est compensée dans chaque expérience et l'équilibre vérifié par un électromètre capillaire sensible au dix-millième de volt.

On doit distinguer deux cas, suivant que le fil de fer est parallèle ou perpendiculaire au champ, c'est-à-dire que la surface libre possède ou non du magnétisme.

Dans le second cas, abstraction faite de l'effet initial dû au défaut de symétrie du couple, le fer situé dans le champ devient positif par rapport à l'autre. La force électromotrice correspondante croît avec l'aimantation et atteint $0^{v},0229$ dans un champ de 7000 unités; elle est indépendante de la nature de l'acide et du degré de concentration. L'aimantation se calculerait par la relation connue pour un cylindre perpendiculaire au champ (**276**).

Le phénomène paraît très irrégulier et dépend de diverses circonstances lorsque la surface de contact du fer avec le liquide est l'un des pôles d'aimantation induite.

CHAPITRE CINQUIÈME

CAPACITÉS ET DIÉLECTRIQUES.

734. Des condensateurs. — Les capacités à mesurer sont presque toujours celles de condensateurs, dont le type est la bouteille de Leyde, composés de deux armatures séparées par un diélectrique. Les câbles sous-marins ou souterrains, dont les fils conducteurs sont noyés dans une couche isolante, ont le même caractère et présentent parfois des capacités considérables. Les fils conducteurs, ou l'âme du câble, constituent l'armature intérieure ; l'armature extérieure est formée, soit par une enveloppe métallique qui protège le câble, soit par l'eau ou la terre dans laquelle il est plongé.

La bouteille de Leyde est de toutes les formes celles qui se prête le mieux à la conservation des charges. Certaines qualités de verre paraissent absolument isolantes aux températures ordinaires. Franklin a conservé de l'électricité pendant plusieurs mois dans une bouteille dont le col avait été fermé à la lampe. Lord Kelvin a répété cette expérience avec une bouteille scellée dont l'armature intérieure était formée par une couche d'acide sulfurique : la perte était insensible même au bout de plusieurs années.

Les condensateurs *feuilletés* permettent d'obtenir des appareils moins fragiles et de capacités beaucoup plus grandes. On superpose par couches alternatives des feuilles d'étain et des lames minces de mica ou des feuillets de papier paraffiné. On réunit séparément toutes les feuilles d'étain d'ordre pair et les feuilles d'ordre impair pour former les armatures. Ce mode de construction donne, sous un petit volume, des surfaces très étendues et très rapprochées.

Dans les condensateurs à feuilles de mica, M. Bouty remplace l'étain par une argenture sur les deux faces en regard; le volume total est encore moindre et l'épaisseur du diélectrique mieux définie, puisqu'il n'existe plus aucune couche d'air entre les armatures et le mica.

Les diélectriques solides et liquides possèdent plus ou moins la propriété, encore mal connue, d'*absorber* l'électricité et de donner lieu à des décharges *résiduelles* (**172**) qui dépendent, non seulement de la charge primitive et de sa durée, mais encore des charges antérieures.

Une bouteille de Leyde, par exemple, qui a reçu d'abord une charge positive pendant plusieurs semaines, puis une charge négative pendant vingt-quatre heures et une nouvelle charge positive pendant cinq minutes, peut donner un résidu tel que le potentiel de l'armature intérieure, maintenue isolée pendant que l'autre est au sol, présente avec le temps des oscillations alternativement positives et négatives ([1]). Tout se passe donc comme si l'électricité pénétrait peu à peu dans le diélectrique pour se dissiper ensuite, par un déplacement en sens contraire, lorsque les armatures sont finalement ramenées au même potentiel.

Sans insister ici sur ce phénomène de charges résiduelles, qui exige une étude spéciale, il suffira pour le moment d'y avoir égard dans les expériences et de préciser les conditions de durée de la charge.

Dans les condensateurs à air ou à gaz quelconque, la décharge est toujours complète, sans effet résiduel; ce sont les seuls appareils qui offrent une sécurité complète, pour les mesures exactes, à la condition d'empêcher les poussières de s'introduire entre les deux plaques. Malheureusement ils n'ont jamais qu'une capacité très faible.

735. Étalons de capacité. — Dans le système électrostatique, la capacité d'un conducteur est une quantité linéaire, que l'on peut déterminer par les dimensions de l'appareil.

La solution du problème est quelquefois très simple: tels sont les cas d'une sphère infiniment éloignée de tout autre conducteur ou d'un système formé par les surfaces de deux sphères concentriques (**50**).

([1]) Sir W. Thomson, *Congrès international des électriciens;* Paris, 1881, p. 217.

Lord Kelvin a employé ainsi un condensateur à surfaces sphériques : les rayons R et R_1 avaient été déduits du poids de l'eau contenue dans la sphère extérieure seule, et dans l'intervalle des deux sphères, quand elles étaient placées concentriquement. Il faut, en outre, tenir compte du pouvoir inducteur spécifique des cales isolantes qui supportent la sphère intérieure, ainsi que de l'orifice ménagé dans l'armature extérieure pour laisser passer une tige qui communique avec l'autre armature, enfin évaluer l'influence de cette tige; ces corrections ne peuvent se faire que d'une manière approchée. Dans l'appareil en question, on avait $R_1 = 5^c,857$, $R = 4^c,511$. La formule simple donne $C = 63^c,264$; les corrections montaient à $0^c,255$ et portaient la capacité à $63^c,519$.

Les condensateurs à cylindres concentriques (**57**) sont plus faciles à construire, mais on doit corriger l'action des extrémités ou l'éliminer par l'expérience.

Dans les condensateurs formés de deux plans parallèles (**58**), séparés par la distance e, il y aurait à tenir compte des variations de densité sur les bords des plateaux et des couches électriques qui peuvent exister sur la surface extérieure. On a vu (**605**) comment Lord Kelvin échappe à ces difficultés par l'emploi de l'*anneau de garde*, en protégeant la surface utile par un couvercle métallique au même potentiel. Si la largeur du sillon qui sépare l'anneau de garde et la surface utile est assez petite, la valeur de S qui entre dans l'expression de la capacité est sensiblement égale à la surface augmentée de la moitié de l'aire correspondant au sillon.

M. Curie [1] constitue ces étalons de capacité avec deux plaques de verre P et P′ argentées sur les deux faces et séparées par des lames de quartz parallèles à l'axe, la conductibilité du cristal étant très faible dans une direction perpendiculaire. Sur l'argenture intérieure de l'une des plaques P on isole une surface a par une coupure, de façon que le contour constitue un anneau de garde A.

On peut utiliser l'appareil à la manière ordinaire. L'anneau A étant au sol, on porte la plaque P à un certain potentiel V; par un trou creusé dans la plaque P′ on joint la surface a à

[1] P. Curie, *Journ. de Phys.* [3], t. II, p. 265; 1893.

l'électromètre et on cherche, à l'aide d'un quartz piezoélectrique (**614**), la quantité q d'électricité nécessaire pour annuler le potentiel. On a alors

$$q = V \frac{a}{4\pi e}.$$

Toutefois, l'appareil est mal isolé parce que le sillon devient conducteur par la surface même du verre, surtout à cause de l'humidité atmosphérique.

Il est préférable d'opérer autrement. L'anneau de garde A étant toujours au sol, on porte la surface a au potentiel V ; on joint à l'électromètre la plaque P, qui est bien isolée, et on mesure la charge $-q'$ qui annule la déviation. La distribution des lignes de force est très différente dans les deux cas, mais les quantités d'électricité q et q' sont égales.

On a surtout besoin, dans la pratique, de connaître les capacités en unités électromagnétiques. La mesure déduite des dimensions se trouvant exprimée en unités électrostatiques, on doit la diviser par le carré $\mathbf{v}^2$ du rapport des unités (**419**), ou par $3^2 . 10^{20}$, pour avoir sa valeur dans le système électromagnétique. La capacité des sphères concentriques employées par Lord Kelvin serait ainsi

$$\frac{63,519}{9} \cdot 10^{-20} = 7,058 . 10^{-20} = 7,058 . 10^{-5} \text{ microfarads.}$$

La mesure directe des capacités en unités électromagnétiques peut être faite par différentes méthodes.

Comme on a $Q = CV$, on obtiendra la valeur de C par celles d'une charge et d'une force électromotrice.

Remarquons encore que la capacité, dont les dimensions sont $L^{-1} T^2$, est le quotient d'un temps par une résistance ou du carré d'un temps par un coefficient d'induction. La mesure d'une capacité pourra donc aussi se ramener à celle d'une résistance ou d'un coefficient d'induction.

On construit, avec des condensateurs feuilletés ne présentant qu'une absorption très faible, des boîtes de capacités graduées, que l'on peut réunir par des chevilles ; ces capacités sont évaluées en *microfarads*.

L'association des capacités en *surface* (**60**) fournit une capa-

cité totale égale à leur somme, comme pour les boîtes de résistances; si on les réunit en *série* ou en *cascade* (**61**), l'inverse de la capacité est égal à la somme des inverses de chacune d'elles, résultat analogue à celui que donnent les boîtes de conductances (**658**).

Il est intéressant de rappeler que Cavendish avait employé une disposition analogue aux boîtes actuelles [1]. Il se servait de carreaux de Franklin, c'est-à-dire de condensateurs formés d'une lame de verre, garnie de feuilles d'étain, et présentant entre eux des rapports déterminés. Il avait remarqué aussi que les capacités ne sont pas proportionnelles aux surfaces, à cause de l'influence des bords, et reconnu que, pour tenir compte de cet effet, il suffisait d'ajouter à la surface réelle de la feuille d'étain une bande circulaire dont la largeur était de $1^{mm},5$ pour un verre de 5 millimètres d'épaisseur, et de $2^{mm},25$ pour un verre de $1^{mm},7$.

736. Condensateurs glissants. — Il est souvent utile de pouvoir modifier les capacités d'une manière continue; c'est ce qu'on obtiendrait en faisant varier la distance des surfaces d'un condensateur à plateaux. On arrive au même résultat d'une manière plus commode avec des condensateurs dans lesquels une des armatures glisse parallèlement à elle-même, de manière à modifier l'étendue des surfaces en présence, sans altérer leur distance.

Considérons, en particulier, le système déjà examiné (**71**) de trois conducteurs cylindriques A, B et C (fig. 213) centrés

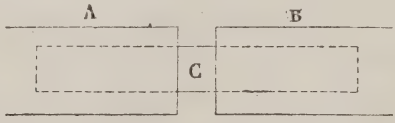


Fig. 213.

sur le même axe [2]. L'enveloppe B communiquant au sol, les cylindres A et C sont réunis entre eux et isolés. Soit C_0 la capacité du système formé par la réunion de A et de C,

[1] Cavendish, *Electr. Researches*, publiées par Maxwell, p. 157; 1879.

[2] L'idée de ce condensateur est due à Lord Kelvin. *Voir* Gibson et Barclay, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1871, p. 573.

lorsque le cylindre intérieur est dans une position déterminée qui sert de repère, c la capacité par unité de longueur du condensateur CB pour la région moyenne où la distribution des densités est uniforme. Si on fait glisser le cylindre C vers la droite d'une longueur x, la capacité du système AC devient $C_0 + cx$; elle varie proportionnellement à x. Il en serait de même pour l'enveloppe B, si elle était seule isolée, le système AC communiquant avec le sol.

En désignant par a et a' les rayons du cylindre C et des surfaces intérieures des cylindres A et B, le coefficient c a pour valeur, en unités électrostatiques (57),

$$\frac{1}{c} = 2\mathcal{L}.\frac{a'}{a}.$$

Quant à la capacité C_0 correspondant au repère ou zéro de l'échelle, on la détermine par comparaison [1].

La capacité du condensateur glissant est assez faible ; mais on peut toujours y adjoindre une capacité convenable, et ne se servir du premier que pour achever le réglage.

Enfin, pour éviter toute perturbation de la part des conducteurs voisins, la partie isolée AC est renfermée dans un cylindre conducteur en communication avec le sol.

La figure 214 représente un condensateur glissant, em-

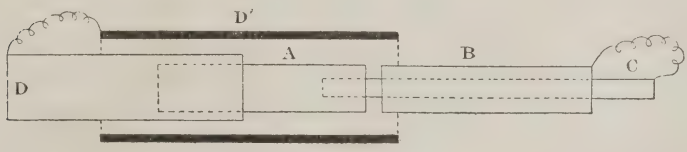


Fig. 214.

ployé par Lord Kelvin, qui comporte un double réglage. Le cylindre A est isolé, les cylindres B et C communiquent entre eux et au sol, ainsi que les cylindres D et D'; les cylindres D et C sont mobiles. La capacité de A augmente quand on enfonce les cylindres D ou C, mais beaucoup plus dans le pre-

[1] Dans le condensateur employé par MM. Gibson et Barclay, le cylindre central C était mû par un bouton glissant dans une rainure de l'enveloppe A, en face d'une échelle divisée. On avait $a = 1^c,2515$ et $a' = 2^c,4807$, ce qui donne $c = 0^c,6514$; les enveloppes A et B avaient 30^c de longueur et le cylindre C 36^c.

mier cas que dans le second pour un même déplacement. Le premier mouvement donnera un équilibre approché dans une expérience de comparaison, et on achève le réglage en faisant mouvoir le cylindre C dans un sens ou dans l'autre.

737. Comparaison des capacités. Méthode d'opposition. — Une méthode d'opposition directe a été déjà employée au siècle dernier par Volta et par Cavendish. On charge deux condensateurs à des potentiels égaux et de signes contraires, puis on les décharge l'un sur l'autre ; si leurs capacités sont égales, ils seront tous deux ramenés à l'état neutre.

Considérons, par exemple, deux bouteilles de Leyde dont les armatures intérieures sont A et A′ et les armatures extérieures B et B′. On les réunit en cascade en faisant communiquer respectivement A avec B′, B avec A′; joignant au sol l'un des systèmes, on électrise l'autre par une source à potentiel élevé. On supprime ensuite les communications avec la source et avec la terre, ainsi que les conducteurs intermédiaires, et on réunit respectivement les armatures intérieures et les armatures extérieures; les deux capacités sont égales si les bouteilles se trouvent alors entièrement déchargées. Sous cette forme, la méthode n'est rigoureuse que si la capacité des condensateurs est indépendante du choix des armatures, c'est-à-dire s'ils peuvent être considérés comme entièrement fermés.

Un procédé simple pour charger deux surfaces à des potentiels égaux et de signes contraires consiste à les mettre respectivement en communication avec les deux pôles d'une pile dont le milieu est relié au sol. Après avoir supprimé les communications avec la pile, on réunit les deux capacités : la charge est réduite à zéro si elles sont égales.

738. Platymètre. — Lord Kelvin [1] désigne sous ce nom un condensateur double formé de deux anneaux cylindriques A et A′ (fig. 215), d'égale longueur et de même rayon, parfaitement isolés, placés autour d'un cylindre BB′ de même axe. Maintenant d'abord le cylindre B en relation avec le sol, on charge l'un des anneaux A à un potentiel V; on supprime ensuite les communications à la source et au sol. Si alors

[1] Sir W. Thomson, *Br. Ass. Rep.*; 1855 (Glasgow). *Voir* Gibson et Barclay, *Trans. Ph. R. S. L.*; 1871, p. 570.

on joint les deux anneaux, le potentiel commun devient moitié moindre, par le partage des charges, et on constate par un électroscope que le potentiel du cylindre BB′ reste nul. La même chose aurait lieu d'ailleurs, sauf l'influence des bords, si les anneaux A et A′, toujours de même rayon, avaient des longueurs différentes, leurs capacités a et a' étant proportionnelles à leurs longueurs. Il faut admettre cependant que ces anneaux sont assez éloignés l'un de l'autre pour que leur in-

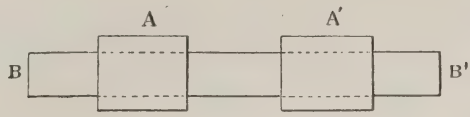


Fig. 215.

duction réciproque soit négligeable par rapport à celle qu'ils exercent sur le cylindre intérieur.

Pour comparer deux capacités C et C′, on les réunit séparément aux deux anneaux A et A′ du platymètre. Si l'expérience, répétée dans les mêmes conditions, montre que le potentiel du cylindre BB′ reste nul, après la communication des deux anneaux, les capacités totales des deux systèmes sont dans le rapport des capacités des anneaux, ce qui donne

$$\frac{a}{a'} = \frac{C+a}{C'+a'} = \frac{C}{C'}.$$

On peut alors vérifier l'égalité des capacités a et a' : il suffit de permuter les capacités C et C′ relativement aux anneaux. Si l'équilibre existe encore, on a aussi

$$\frac{C'}{C} = \frac{a}{a'}, \qquad \text{ou} \qquad a' = a.$$

Lorsque cette condition n'est pas réalisée et que l'équilibre, ayant été établi dans une première expérience avec des capacités C et C′, persiste dans une seconde où les capacités sont C″ et C, il en résulte

$$\frac{C}{C'} = \frac{a}{a'}, \qquad \frac{C''}{C} = \frac{a}{a'}, \qquad C = \sqrt{C'C''}.$$

L'expérience est analogue à l'emploi d'une balance à bras inégaux, quand on place le corps à peser alternativement dans les deux plateaux.

739. Balances de capacités. — On peut donner ce nom à plusieurs dispositions expérimentales qui rappellent celle du pont de Wheatstone.

Dans la méthode employée par De Sauty [1], deux condensateurs C et C′ (fig. 216) tiennent la place des deux branches b

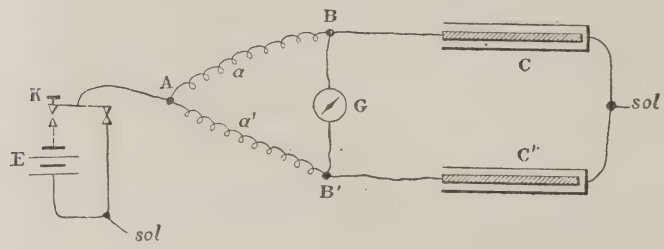


Fig. 216.

et b' du pont de Wheatstone, leurs armatures extérieures étant en communication avec le sol. On ajuste les deux résistances a et a' de manière qu'en ouvrant ou fermant la clef K qui établit la communication avec la pile, aucun courant ne passe dans le galvanomètre.

La condition d'équilibre exige évidemment que les extrémités B et B′ du pont soient au même potentiel, c'est-à-dire qu'à un instant quelconque, les charges Q et Q′ soient proportionnelles aux capacités correspondantes C et C′ ; comme ces charges sont proportionnelles aux courants qui les amènent et ceux-ci en raison inverse des résistances correspondantes a et a', il en résulte

$$\frac{C}{C'} = \frac{a'}{a}.$$

Il est clair qu'on pourrait remplacer le galvanomètre par un électromètre ou un téléphone.

Cette méthode ne convient que pour les capacités de valeur

[1] L. Clark and R. Sabine, *Electrical tables and formulæ*, p. 62; 1871.

moyenne et dans lesquelles l'absorption électrique a peu d'influence ; elle exige, en effet, que le temps de charge soit le même pour les deux condensateurs. Aussi n'est-elle pas applicable aux grandes capacités, comme celles des câbles sous-marins ; on en est averti par cette circonstance que l'ajustement des résistances qui convient pour la charge ne convient pas pour la décharge.

Lord Kelvin [1] a indiqué deux méthodes où l'équilibre ne dépend pas du temps de charge, mais seulement de l'état final, et qui sont applicables aux capacités de toute nature.

La première exige l'emploi de trois condensateurs de comparaison, dont l'un au moins ait une capacité variable.

Soient C, C′, C_1, et C'_1 (fig. 217) quatre capacités formées de

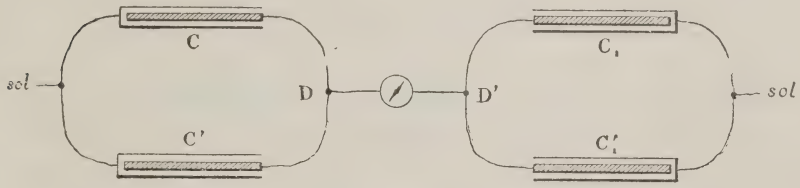


Fig. 217.

condensateurs dont l'une des armatures est au sol. On charge deux d'entre elles C et C_1 à un même potentiel V_0, puis on réunit respectivement C avec C′, et C_1 avec C'_1 ; les potentiels V et V_1 de part et d'autre deviennent

$$(C+C')V = CV_0, \qquad (C_1+C'_1)V_1 = C_1V_0.$$

Si les valeurs de V et V_1 sont égales, un galvanomètre ou un électromètre intercalé entre deux points D et D′ des deux systèmes reste au zéro, ce qui donne

$$\frac{C}{C_1} = \frac{C+C'}{C_1+C'_1} = \frac{C'}{C'_1}.$$

L'emploi de l'électromètre est préférable, car chaque système conserve sa charge et on a toute facilité pour ajuster la

[1] Sir W. Thomson, *Journ. of Teleg. Eng.*, t. I, 5, 394; 1873.

capacité du condensateur variable de manière que la condition d'équilibre soit satisfaite.

Quand on fait usage du galvanomètre, il faut attendre, avant d'établir la jonction entre D et D′, que l'équilibre de charge ait le temps de s'établir. Ce temps peut s'élever à plusieurs secondes si on opère sur de grandes capacités et de grandes résistances.

La seconde méthode n'exige pour la comparaison qu'une capacité invariable. Les armatures extérieures des deux capacités C et C′ (fig. 218) sont isolées et communiquent entre

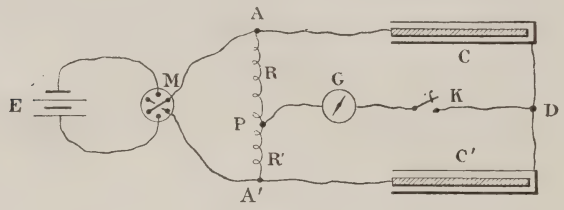


Fig. 218.

elles par un conducteur D; les armatures intérieures sont en relation avec les extrémités d'une résistance considérable AA′ traversée par un courant permanent. On cherche le point P de la résistance AA′ auquel il faut attacher le fil d'un galvanomètre G, ou mieux un électromètre, pour qu'en établissant la communication entre P et D, l'appareil reste au zéro. La position du point P ne change pas quand on renverse le courant par le commutateur M situé sur le circuit de la pile E.

Comme la charge des deux condensateurs est la même, par suite de leur liaison, on a alors, en appelant V et V′ les potentiels en A et A′ et V_1 celui des armatures extérieures,

$$C(V - V_1) = C'(V_1 - V').$$

D'autre part, si on désigne par x le potentiel au point P, par R et R′ les résistances AP et PA′, on a aussi

$$\frac{V - x}{R} = \frac{x - V'}{R'}.$$

L'égalité des potentiels x et V_1 exige la condition

$$CR = C'R',$$

c'est-à-dire que les capacités C et C′ sont dans le rapport inverse des résistances correspondantes R′ et R.

Cette méthode est susceptible d'une grande précision et se prête très bien à la vérification des boîtes de capacités.

740. Mesure des potentiels. — On détermine d'abord la différence de potentiel V entre les armatures d'un condensateur électrisé; cette capacité C étant réunie à un autre C′, sans que la charge totale Q soit modifiée, la différence de potentiel V′ diminue et l'on a

$$Q = CV = (C + C')V',$$

$$\frac{C'}{C} = \frac{V - V'}{V'} = \frac{V}{V'} - 1.$$

Si l'une des armatures est au sol, V et V′ représentent les potentiels de l'autre armature. Ces quantités jouent ici le même rôle que les variations de température dans la *méthode des mélanges* en calorimétrie; on donne quelquefois le même nom à l'expérience électrique.

On peut aussi réunir d'abord les condensateurs en surface, puis supprimer les communications et les joindre en cascade. L'armature restée en communication avec l'électromètre conserve la même charge Q et les potentiels sont V_0 et V_1 dans les deux expériences; il en résulte

$$V_0 = \frac{Q}{C}, \qquad V_1 = Q\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right), \qquad \frac{V_1}{V_0} = 1 + \frac{C}{C'}.$$

C'est là une des méthodes employées par Faraday [1] pour la détermination des pouvoirs inducteurs spécifiques (**83**). Deux condensateurs sphériques ayant les mêmes dimensions, l'intervalle des armatures de l'un d'eux avait été rempli de soufre par fusion jusqu'à mi-hauteur. On charge le premier condensateur à couche d'air complète et on mesure, par la balance de torsion (**603**), la quantité d'électricité prise par

[1] Faraday, *Exper. Researches*, série XI, § 1187; 1837.

une boule isolée sur un point de l'armature intérieure ; on répète ensuite l'expérience en touchant le même point, après avoir établi une communication avec le second condensateur. Le rapport des charges mesurées est le même que celui des potentiels V et V'. Désignant par K le pouvoir inducteur spécifique du soufre, on a

$$\frac{C'}{C} = \frac{1+K}{2} = \frac{V}{V'} - 1, \qquad K = 2\frac{V}{V'} - 3.$$

Si les potentiels V et V' sont mesurés pas un électromètre dont la capacité γ n'est pas négligeable, on l'élimine par une expérience spéciale en chargeant d'abord l'instrument seul au potentiel U et déterminant la valeur U' après qu'on l'a réuni à la capacité C. On a alors

$$(C+\gamma)V = (C'+C+\gamma)V',$$
$$\gamma U = (C+\gamma)U';$$
$$\frac{C'}{C}\left(1 - \frac{U'}{U}\right) = \frac{V}{V'} - 1.$$

Nous avons supposé encore que la capacité de l'électromètre est indépendante de la déviation, ce qui n'est pas tout à fait rigoureux. Enfin il faut avoir soin que les capacités que l'on compare n'aient pas d'induction réciproque et que la capacité des fils de communication soit négligeable.

La méthode devient très exacte, surtout pour des capacités peu différentes, quand on opère par opposition. Les condensateurs étant réunis en croix et l'un des systèmes d'armatures au sol, on porte l'autre système au potentiel V_0 ; les charges respectives sont

$$Q = CV_0 \qquad \text{et} \qquad Q' = C'V_0.$$

Quand on joint ensuite les armatures de signes contraires, le potentiel final est V_1, ce qui donne

$$Q - Q' = (C+C')V_1 = (C-C')V_0,$$
$$\frac{C'}{C} = \frac{V_0 - V_1}{V_0 + V_1}.$$

Lorsque le rapport des capacités est très voisin de l'unité, on peut écrire

$$\frac{C'}{C} = 1 - 2\frac{V_1}{V_0}.$$

741. Mesure des charges. — Gaugain [1] comparait les capacités des condensateurs par le rapport des charges relatives à une même différence de potentiel entre les armatures.

Les quantités d'électricité étaient mesurées par un électromètre à décharges (**612**) avec lequel on mettait les corps électrisés en communication par un fil de coton. Comme la décharge n'est pas complète, on peut tenir compte du résidu qui correspond à l'état final de l'électromètre; toutefois ce résidu n'intervient pas dans le cas actuel, car la décharge observée correspond à une même chute de potentiel, depuis la valeur primitive V_0 jusqu'à la valeur finale incapable de provoquer un nouveau contact de la feuille d'or.

L'expérience donne ainsi la charge totale. Si on veut connaître la décharge instantanée, il suffit, après avoir déterminé la charge totale, d'électriser de nouveau le condensateur au même potentiel, de le décharger sur lui-même pendant un temps très court et de déterminer ensuite la charge résiduelle. La différence des deux valeurs ainsi obtenues correspond à la décharge instantanée.

On peut déterminer aussi les vitesses d'écoulement, par un fil de résistance R entre les armatures, ou les intervalles de temps t qui correspondent à une même chute $V_0 - V$ de potentiel (**663**). D'après la relation

$$t = RC\,\mathcal{L}.\,\frac{V_0}{V},$$

les durées t sont proportionnelles aux capacités. Cette méthode n'exige que l'emploi d'un électroscope sensible, sans qu'on ait à se préocuper de sa graduation.

M. J. Curie charge l'une des armatures du condensateur et compense celle de l'autre par un quartz piézoélectrique; on peut ainsi étudier la charge et la décharge instantanées.

[1] Gaugain, *Ann. de chim. et de phys.* [3], t. XLIV, p. 174; 1862 et [4], t. II, p. 264; 1864.

Si la décharge est observée au galvanomètre balistique (**643**), l'angle d'impulsion α de l'aiguille, toutes corrections faites relatives à l'amortissement et à la graduation, donne

$$q = CV = \frac{H}{G}\frac{\tau}{\pi}\alpha.$$

Pour un même potentiel dans des expériences successives, la capacité est proportionnelle à l'angle d'impulsion.

Lorsque les capacités sont très inégales, il est utile de prendre des forces électromotrices V et V′ qui soient dans un rapport connu, par exemple avec des nombres n et n' de couples de même nature. On aura alors

$$\frac{C}{C'} = \frac{\alpha}{\alpha'}\frac{V'}{V} = \frac{n'\alpha}{n\alpha'}.$$

L'expérience comporte une grande précision quand les capacités sont très voisines et de même nature. Pour des capacités très différentes, la durée des décharges introduit une cause d'erreur qu'il est difficile d'éliminer.

Cette expérience permet de déterminer la capacité C en mesures absolues électromagnétiques. En effet, si l'on mesure, directement ou indirectement, la déviation réduite δ que produirait dans le même galvanomètre le courant I dû à la force électromotrice V dans une résistance R, on a

$$V = RI = R\frac{H}{G}\delta,$$

$$C = \frac{H}{GV}\frac{\tau}{\pi}\alpha = \frac{\tau}{R}\cdot\frac{\alpha}{\pi\delta}.$$

M. Fleming Jenkin [1], a ainsi déterminé, pour le Comité de l'Association Britannique, la valeur absolue d'un condensateur feuilleté devant servir d'étalon, et dont la capacité était voisine de 10 microfarads (10^{-15} unités C.G.S).

Avec les condensateurs à diélectrique solide, l'expérience présente de grandes difficultés. A moins de rendre les oscil-

[1] Fl. Jenkin, *Br. Ass. Rep.*; Dundee, 1867. — *Reprint*, p. 146.

lations de l'aiguille extrêmement lentes, ce qui est incommode dans la pratique et ce qui réduit les angles d'impulsion, on n'est jamais sûr que la durée de la décharge ne soit qu'une fraction très petite de la période d'oscillation. En outre, par suite des phénomènes d'absorption de l'électricité, la capacité est une fonction des temps de charge et décharge.

Ainsi, dans les expériences de M. Jenkin, avec un galvanomètre astatique (**624**) dont le moment d'inertie du système mobile avait été augmenté au point de porter la durée d'oscillation à 20^s environ, la charge était obtenue par une pile de 20 couples Daniell. On déchargeait le condensateur après une minute de charge. Suivant que la durée du contact de décharge était très courte ou variait de $1^s,7$ à $3^s,4$ et à 5 secondes, la déviation de l'aiguille était de 156, 161, 164 et 166 divisions, cette dernière étant la même que pour un contact permanent. Ici encore il est donc nécessaire de spécifier la durée de la décharge.

Lorsque deux capacités sont égales et qu'après les avoir chargées par une même pile on les décharge à la fois dans un *galvanomètre différentiel*, l'aiguille doit rester immobile. Si elles sont inégales, on peut rétablir l'équilibre, soit par une capacité variable, soit par un shunt convenable sur l'une des bobines du galvanomètre.

En appelant G et G′ les constantes des deux bobines, m le pouvoir multiplicateur du shunt établi sur la première, C et C′ les capacités correspondantes, on a

$$G\frac{C}{m} = G'C', \qquad \text{ou} \qquad \frac{C}{C'} = m\frac{G'}{G}.$$

L'emploi des shunts est alors légitime, à la condition toutefois que les décharges aient la même durée. C'est là le point faible de la méthode imaginée par Varley [1].

742. Courants intermittents. — Werner Siemens [2] mesure le courant moyen produit par une série de décharges qui se succèdent à des intervalles très courts par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille du galvanomètre.

[1] L. Clark and R. Sabine, *Electrical tables and formulæ*, p. 63; 1871.
[2] Werner Siemens, *Pogg. Ann.*, t. CII, p. 66; 1857.

Dans la figure 219, A et B représentent les armatures d'un condensateur, L une lame vibrante entre deux contacts C et D, et P une pile d'un nombre suffisant de couples. Lorsque la lame est en vibration, le galvanomètre est parcouru par le courant de charge; si la pile P est placée sur une autre bran-

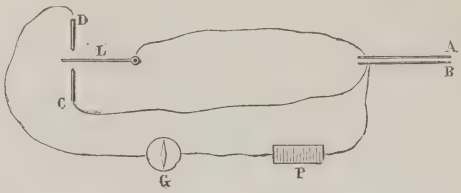


Fig. 219.

che (fig. 220), le galvanomètre reçoit le courant de décharge.

Appelant E la force électromotrice de la pile et n le nombre de vibrations complètes de la lame par seconde, le courant moyen est $I = nEC$, et la déviation correspondante est α,

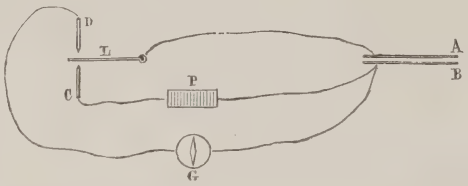


Fig. 220.

toutes réductions faites. Si le courant I_0 de la même pile dans une résistance R produit une déviation δ, on a encore

$$nEC = I, \qquad E = RI_0, \qquad nCR = \frac{I}{I_0} = \frac{\delta}{\delta_0}.$$

Lorsque la résistance R est choisie de manière que le courant soit le même dans les deux cas, il reste simplement $nCR = 1$, sans qu'on ait à se préoccuper de la graduation du galvanomètre [1].

[1] M. Lippmann fait remarquer (*C. R. l'Acad. des Sc.* t. CIV, p. 1070; 1887) qu'on aurait ainsi une mesure du temps par des procédés purement électriques. En effet, le produit d'une capacité par une résistance est un temps dans les deux systèmes (**418**); si on répète l'expérience avec une résistance et une capacité invariables, ou de dimensions géométriques déterminées, en modifiant la période de la lame vibrante de manière à égaler les deux courants, on en déduira la valeur de n correspondante et, par suite, l'unité de temps.

Un commutateur à bascule permet de diriger successivement, dans le même galvanomètre, les courants de charge ou de décharge. Le galvanomètre G (fig. 221) étant placé sur le circuit de la pile qui aboutit aux bornes P et N du commutateur, les armatures du condensateur C sont reliées aux bornes A et B. Quant on fait osciller l'équipage du commutateur, la charge du condensateur est alternatiment $\pm$ EC ; à chaque mouvement, la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre est 2EC et, pour n oscillations simples par se-

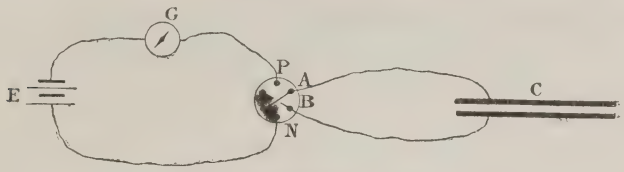


Fig. 221.

conde, le courant moyen est $2n$EC. En appelant R la résistance du circuit qui donnerait le même courant permanent, on a alors $2n\mathrm{CR} = 1$.

Comme les oscillations du commutateur doivent être régulières, il sera plus commode, au point de vue mécanique, d'employer un appareil tournant.

Cette méthode suppose qu'à chaque opération les contacts sont maintenus assez longtemps pour que la charge ou la décharge du condensateur arrivent à l'état d'équilibre, condition qui n'est pas toujours réalisée.

Dans la dernière disposition, par exemple, appelons r la résistance totale du circuit et q la charge du condensateur à l'époque t après le mouvement de bascule ; le courant est $\mathrm{I} = -\frac{dq}{dt}$ et l'on a, en négligeant l'induction propre,

$$\mathrm{E} = r\mathrm{I} - \frac{q}{\mathrm{C}} = -\left(r\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\mathrm{C}}\right).$$

Si Q est la charge initiale du condensateur, avant l'inversion, il en résulte

$$\mathrm{EC} + q = (\mathrm{EC} + \mathrm{Q})\, e^{-\frac{t}{r\mathrm{C}}}.$$

Lorsque les deux espèces de contact ont la même durée θ, la charge variable q passe de $+Q$ à $-Q$, ce qui donne

$$Q\left(1+e^{-\frac{\theta}{rC}}\right)=EC\left(1-e^{-\frac{\theta}{rC}}\right).$$

Le courant moyen est alors $2nQ$ et la condition d'équilibre avec le courant permanent de même valeur devient

$$2nCR\left(1-e^{-\frac{\theta}{rC}}\right)=1+e^{-\frac{\theta}{rC}}.$$

743. Comparaison des capacités aux résistances. — Dans la mesure des courants moyens, les capacités ont été déterminées ou comparées par des résistances ; nous pouvons considérer le problème d'une manière plus générale.

Entre deux points N et P d'un réseau de conducteurs renfermant des forces électromotrices constantes, on intercale une capacité C et, par l'une des dispositions précédentes, on la décharge n fois par seconde. Si E est la différence de potentiel des deux points dans le régime permanent, et qu'on suppose qu'après chaque interruption ce régime ait le temps de se rétablir, le courant moyen dans le fil de jonction est, avec le second mode d'interruption,

$$I=2nCE.$$

Les contacts ainsi établis modifient les courants de toutes les branches du réseau, mais la somme algébrique des courants induits reste nulle puisque le système reprend le même état après chaque interruption. Dès lors, l'intensité moyenne dans chacune des branches est indépendante de la manière dont se succèdent les décharges entre les points N et P ; par suite, elle est la même que si on joignait ces deux points par un conducteur de résistance R_1 qui laisserait passer, sous forme de courant continu, le même débit I d'électricité, et réciproquement. Mais dans ce cas, en appelant R_2 la résistance qui séparait primitivement les deux points, on a, d'après le le théorème de M. Thévenin (**672**),

$$I=\frac{E}{R_1+R_2}=2nCE.$$

Si la résistance R_1 est ajustée de manière que dans une branche quelconque l'intensité soit la même qu'avec les décharges du condensateur, il résulte

$$2nC(R_1 + R_2) = 1.$$

La capacité C se trouve ainsi déterminée en fonction de deux résistances connues et du nombre n des interruptions.

On peut se rendre compte plus complètement de la manière dont les courants de décharge se distribuent dans le réseau, en remontant aux équations générales. Soit i l'intensité à un instant donné dans une branche quelconque r qui renferme une force électromotrice e, L le coefficient de self-induction de cette branche et φ le flux des forces extérieures, dues à des aimants ou des courants. La différence de potentiel aux extrémités de la branche est $ri + \frac{d}{dt}(\varphi + Li) - e$.

Pour un circuit fermé dont elle fait partie, on a

$$\Sigma ri + \Sigma \frac{d}{dt}(\varphi + Li) - \Sigma e = 0,$$

ou, en appelant $q' = \int i\,dt$ la quantité d'électricité qui traverse la branche r pendant la durée θ d'une décharge

$$\Sigma rq' + [\Sigma(\varphi + Li)]_0^\theta - \Sigma e\theta = 0.$$

Si les intensités sont les mêmes au début et à la fin de chacune des décharges, c'est-à-dire si le régime permanent a le temps de se rétablir et qu'aucun aimant ou courant extérieur n'ait été déplacé ni modifié, la quantité comprise entre parenthèses est nulle et il reste

$$\Sigma rq' - \Sigma e\theta = 0.$$

Soit i_0 le courant relatif au régime permanent et $q = q' - i_0\theta$ l'excès de la décharge sur la quantité d'électricité qui correspondrait à ce régime ; l'équation précédente peut s'écrire

$$\Sigma rq + \theta(\Sigma ri_0 - \Sigma e) = 0.$$

Comme le second terme est nul, il en résulte

$$\Sigma rq = 0.$$

Ainsi, on peut dire que la décharge q se surperpose aux courants permanents et se partage entre les différentes branches en raison de leurs résistances respectives et indépendamment des forces électromotrices qu'elles renferment [1].

Ce théorème conduit à plusieurs méthodes particulières.

1° Si le réseau se compose d'un fil unique de résistance r et qu'on établisse le même courant dans les deux expériences, soit par les décharges du condensateur, soit par une résistance auxiliaire R_1 (fig. 221), on a

$$R = \frac{1}{2nC} = R_1 + r.$$

2° Si les points P et N sont réunis par deux résistances r

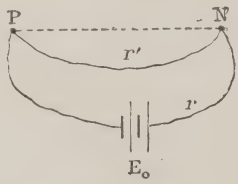


Fig. 222.

et r' (fig. 222), dont la première renferme une force électromotrice E_0, la résistance du réseau est

$$R_2 = \frac{rr'}{r + r'}.$$

Pour que le courant de la branche r' soit nul dans les deux expériences, il faut que la résistance compensatrice R_1 soit nulle; on a alors simplement

$$R = \frac{1}{2nC} = \frac{rr'}{r + r'}.$$

[1] M. Brillouin, *Ann. de l'Éc. norm. sup.* [2], t. X, p. 9; 1881.

Au lieu de ramener les courants à la même valeur, on peut déterminer l'intensité I_0 du courant primitif et les intensités i et i' du courant dans les deux branches pendant le jeu du commutateur; il en résulte

$$E_0 = I_0(r + r'), \qquad E = I_0 r' = E_0 \frac{r'}{r + r'},$$

$$I = 2nCE = \frac{E}{R} = I_0 \frac{r'}{R}.$$

Dans les conducteurs r' et r, les courants de décharge I' et $I - I'$ sont définis par la relation $r'I' = r(I - I')$, les courants moyens étant $i' = I_0 - I'$ et $i = I_0 + I - I'$, ce qui donne

$$I' = I \frac{r}{r + r'} = I_0 \frac{R_2}{R}, \qquad I - I' = I' \frac{r'}{r} = I_0 \frac{r'}{r} \frac{R_2}{R};$$

$$i' = I_0\left(1 - \frac{R_2}{R}\right), \qquad i = I_0\left(1 + \frac{r'}{r} \frac{R_2}{R}\right).$$

Le rapport des résistances R_2 et R peut ainsi être déterminé, soit par les courants successifs I_0 et i ou I_0 et i', soit par les courants simultanés i et i'.

Un galvanomètre à deux cadres rectangulaires (**670**), intercalé sur les branches r et r', donnerait directement le rapport des courants i et i' et, par suite,

$$\frac{R}{R_2}\left(1 - \frac{i'}{i}\right) = 1 + \frac{i'r'}{ir}.$$

La valeur de R serait encore déterminée par le rapport du courant I de décharge, soit au courant primitif I_0, soit à l'un des courants i et i'. Si on introduit, par exemple, un galvanomètre différentiel sur la branche r' et sur la communication d'un des points P ou N avec le condensateur, on peut choisir la résistance r' de façon que l'aiguille reste au zéro. Lorsque le galvanomètre est réglé, la condition $I = i'$ donne $R = r' + R_2$.

3° Supposons que la capacité à décharges soit intercalée entre deux points P et N sur l'une des branches b du parallélogramme de Wheatstone (fig. 223).

Les résistances a, a' et b' étant réglées de façon que le courant soit nul dans le pont pendant les décharges alternantes

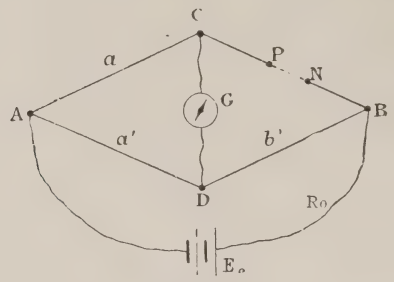


Fig. 223.

du condensateur, on remplace ensuite la capacité par une résistance R_1 qui satisfasse à la relation d'équilibre $R_1 a' = b'a$ des courants permanents et l'on aura $2nC(R_1 + R_2) = 1$.

Quant à la résistance R_2 du réseau entre les points B et C, elle a pour valeur (**673**), en désignant ici par R_0 celle du conducteur qui renferme la pile E_0,

$$R_2 = \frac{a'(a + R_0)(r + b') + aR_0(r + b') + rb'(a + R_0)}{a'(a + R_0 + r + b') + (R_0 + b')(a + r)}.$$

Cette méthode, indiquée par Maxwell [1], a été appliquée par M. J.-J. Thomson avec une modification qui permet l'emploi d'une lame vibrante [2].

Une des armatures du condensateur est reliée avec le sommet C du pont et l'autre avec une lame L qui oscille entre les contacts P et N (fig. 224). Le condensateur se décharge sur lui-même et sa charge seule intervient dans le courant général. Pour n oscillations complètes par seconde, l'intensité moyenne du courant de charge est nCE et, si l'équilibre du pont est réalisé dans les deux expériences, on a $nC(R_1 + R_2) = 1$.

La lame L était mise en mouvement par un trembleur électrique et les contacts établis sur des surfaces platinées ; le nombre des vibrations était donné par la hauteur du son. Les valeurs obtenues pour la capacité sont restées très con-

(1) Cl. Maxwell, *Élect. and Magn.*, t. II, p. 375.
(2) J.-J. Thomson, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1883, p. 707.

cordantes à moins de 0,002 quand on a fait varier le nombre des oscillations de 16 à 128 par seconde et modifié dans de grandes limites la durée relative des contacts. Le phénomène

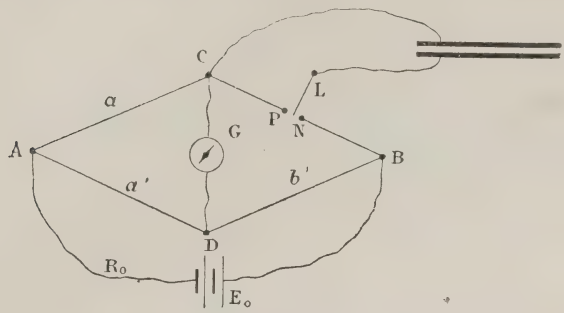


Fig. 224.

est donc bien défini et le condensateur avait le temps de prendre à chaque contact la charge dite instantanée.

L'expression de R_2 peut se simplifier si on choisit convenablement les différentes résistances [1]. En écrivant cette expression sous la forme

$$R_2 = \frac{ar(a' + R_0 + b') + R_0 r(a' + b') + b'[a(a' + R_0) + a' R_0]}{(a + r)(a + R_0 + b') + a'(R_0 + b')},$$

on voit que, si les résistances R_0 et a' sont petites par rapport à b' et r, il reste sensiblement

$$R_2 = (a + R_0)\frac{r}{a + r}.$$

744. Comparaison avec les coefficients d'induction. — On obtient des effets de même nature par les décharges induites. La charge que prend une capacité C, mise en relation avec les extrémités d'une résistance R traversée par le courant permanent I, est $q = CRI$; lancée ensuite dans un galvanomètre balistique, elle donne

$$q = CRI = \frac{H}{G}\frac{\tau}{\pi}\alpha.$$

[1] R. T. Glazebrook, *Phil. Mag.* [5], t. XVIII, p. 98; 1884. Dans ces expériences, les résistances étant évaluées en ohms, on avait $a' = 10$, $R_0 = 5$ à 6, $a = 240$ à 1800, $b' = 1000$, $r = 11000$.

Soit M le coefficient d'induction mutuelle du circuit considéré et d'un circuit voisin de résistance R'. Lorsqu'on établit ou que l'on supprime le courant principal I, la décharge induite q' est définie par la relation

$$q'\mathrm{R}' = M\mathrm{I}.$$

Si on l'évalue par l'impulsion α' qu'elle produit dans le même galvanomètre, il en résulte

$$\frac{q}{q'} = \frac{\mathrm{CRR}'}{M} = \frac{\alpha}{\alpha'}, \qquad \mathrm{C} = \frac{M}{\mathrm{RR}'}\frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Les deux systèmes de décharges peuvent encore être transformés en courants moyens par un jeu de commutateurs. La décharge du condensateur et la décharge induite étant répétées n fois et n' fois par seconde, les courants moyens correspondants i et i' dans un même galvanomètre donnent

$$\frac{n\mathrm{CRR}'}{n'M} = \frac{i}{i'}, \qquad \mathrm{C} = \frac{M}{\mathrm{RR}'}\cdot\frac{n'i}{ni'}.$$

Une disposition mécanique convenable permettra d'envoyer alternativement les deux espèces de décharges, sous forme de courant moyen, dans le galvanomètre ou dans un galvanomètre différentiel; en réglant les résistances ou les valeurs de M et de C de manière que l'aiguille reste au zéro, on a $n = n'$, $i = i'$ et, par suite,

$$\mathrm{CRR}' = M.$$

745. Influence du temps de charge. — Les recherches ingénieuses de Gaugain (741) sur les condensateurs à plateaux séparés par un diélectrique solide, par l'emploi de l'électroscope à décharges, ont montré que :

1° La charge d'un condensateur, pour une différence donnée de potentiel, augmente avec la durée de communication à la source dans un rapport qui peut aller de 1 à 5, par suite d'un phénomène auquel on donne quelquefois le nom de *viscosité électrique*. La charge n'est définie que pour un contact très court; elle est dite alors *instantanée*.

2° La décharge instantanée, correspondant à une communication de très courte durée entre les armatures, est égale à la charge instantanée.

Ce résultat est conforme à l'hypothèse de Maxwell sur le défaut d'homogénéité des diélectriques (**174**).

Il en résulterait aussi que l'absorption doit être nulle dans un milieu parfaitement homogène. Cette conséquence a été vérifiée par M. Rowland pour le spath d'Islande, qui paraît être la substance naturelle la plus pure et la plus homogène. Les autres cristaux ont donné des résidus plus ou moins importants; l'absorption du quartz serait le neuvième de celle du verre ordinaire ([1]).

Pour étudier la viscosité électrique, M. Wullner ([2]) met au sol l'une des armatures d'un condensateur et l'autre armature en relation avec l'aiguille d'un électromètre. Aussitôt après la charge, le potentiel atteint d'abord un maximum et baisse ensuite très rapidement pendant les premières secondes, puis d'une manière beaucoup plus lente. La loi de diminution varie d'une substance à l'autre et ne reste pas identique pour différents échantillons d'un même diélectrique.

MM. Porter et Morris ([3]) ont essayé de mettre en évidence une sorte de retard, ou hystérésis, analogue à celui qu'on observe dans les milieux magnétiques (**285**). Les deux décharges d'un condensateur, porté à la même différence de potentiel en montant ou en descendant, ont toujours donné la même impulsion dans un galvanomètre balistique, alors qu'une différence de 0,0001 eut été appréciable.

M. Bouty ([4]) a étudié avec beaucoup de soin ces phénomènes d'absorption dans les condensateurs à mica argenté. Quand on intercale un condensateur dans le circuit d'une pile à grande résistance, la différence de potentiel des armatures augmente d'abord, à partir de la fermeture du circuit, à cause de l'électricité accumulée dans le condensateur, et tend vers une limite constante plus faible que si le circuit était interrompu. Le courant continu qui subsiste dans ces conditions

([1]) Rowland et Nichols, *Phil. Mag.* [5], t. XI, p. 414; 1881.
([2]) A. Wullner, *Wied. Ann.*, t. XXXII, p. 19; 1887.
([3]) Porter et Morris, *Proceed. of the L. R. S.*, t. LVII, p. 469; 1895.
([4]) Bouty, *Journ. de Phys.* [2], t. IX, p. 288; 1890 et [3], t. I, p. 5 et 445; 1892.

ne peut être attribué à la conductibilité du mica, car il ne varie pas d'une manière appréciable quand on augmente de 1 à 10 la surface des armatures.

Pour rendre compte des observations, la résistivité du mica doit être supérieure à $3,19.10^{19}$ ohms ou $3,19.10^{28}$, c'est-à-dire 2.10^{25} fois celle du cuivre, qui est égale à 1600.

Il ne semble pas non plus que l'obstacle opposé par le mica au passage de l'électricité soit de nature électrolytique, car la polarisation devrait dépasser 20 volts et, en prenant pour capacité de polarisation celle du platine dans l'eau acidulée, la quantité d'électricité correspondante serait 10^5 fois plus grande que la charge normale du condensateur, tandis qu'elle est comprise entre 0,01 et 0,02 de cette charge.

On peut supposer enfin qu'il existe une sorte d'élasticité électrique résiduelle, mais cette explication serait en désaccord avec les expériences de MM. Porter et Morris.

Les résidus de charge et de décharge se déterminent de la manière suivante. Dans un circuit de faible résistance contenant une pile E non polarisable, on intercale en cascade deux condensateurs de capacité C et c, la première variable avec le temps, la seconde supposée sans perte ni résidu. Les armatures de c sont reliées à un électromètre capillaire et réunies d'abord par une dérivation s. On établit le courant; la capacité C se charge seule au potentiel E. Au bout du temps θ, on coupe la dérivation s; à l'époque $\theta + t$, la capacité c a pris une différence de potentiel très petite v, par l'accroissement de charge de C, dont la capacité est devenue $C + \partial C$ pendant que la différence de potentiel a varié de $\partial V = (E - v) - E = -v$, Il en résulte

$$cv = \partial(CV) = V\partial C + C\partial V = E\partial C - Cv,$$

$$q = E\partial C = (C + c)v.$$

Cette quantité q est l'accroissement normal qu'aurait pris la charge du condensateur C dans l'intervalle t.

Pour la décharge, après avoir laissé les deux condensateurs assez longtemps sur le circuit de la pile, on remplace la pile par un conducteur s'; le condensateur C se décharge en grande partie. Au bout du temps θ, on coupe la dérivation s; le cir-

cuit est alors ouvert. A l'époque $\theta + t$, la charge résiduelle porte les deux condensateurs au même potentiel v' et la charge totale rendue libre est

$$q' = (C + c)v'.$$

M. Bouty a trouvé ainsi que : 1° les charges q et q' sont égales pour le même intervalle, compris entre les temps θ et $\theta + t$; 2° ces quantités sont proportionnelles à la force électromotrice E de la pile de charge; 3° on peut les représenter par la formule empirique

$$q = A[(t + \theta)^m - \theta^m].$$

Le phénomène conserve le même caractère jusqu'à la température de 200°. Au delà, l'égalité des résultats à la charge et à la décharge n'a plus lieu ; le mica paraît éprouver une altération superficielle qui le rend conducteur.

746. Pouvoir inducteur spécifique. — On a supposé jusqu'à présent, au moins d'une manière implicite, que les phénomènes électriques étaient mesurés dans l'air, mais l'influence des gaz est si faible (**99**) que l'on peut pratiquement considérer leur pouvoir inducteur spécifique par rapport au vide comme égal à l'unité. Le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique sera donc déterminé par le rapport des capacités d'un condensateur quand le milieu interposé est alternativement le diélectrique considéré et l'air (**83**).

La théorie électromagnétique de la lumière conduit à cette conséquence (**451**) que le pouvoir inducteur spécifique d'un milieu diélectrique doit être égal au carré de son indice de réfraction pour la lumière, mais cette théorie ne s'applique qu'à des phénomènes oscillatoires dont la période est comparable à celle des vibrations lumineuses. On ne peut donc rien conclure, à ce point de vue, des résultats *pratiques* obtenus dans la plupart des cas. Nous avons vu, au contraire, que les expériences de M. Blondlot (**452**) sur le phénomène de Hertz confirment la théorie de Maxwell.

Cavendish [1] avait trouvé déjà que la capacité d'un carreau

[1] CAVENDISH, *Electrical Researches*, publiées par Maxwell, p. 183.

de Franklin, comparée à celle d'un système de deux sphères concentriques séparées par de l'air, est toujours plus grande que si le verre était remplacé par une couche d'air. Ces expépériences conduisaient à des pouvoirs inducteurs spécifiques très élevés, de 3 à 10, à cause de l'influence du temps et des phénomènes d'absorption.

Dans une première série de recherches, par le partage des charges (740) entre deux condensateurs sphériques de mêmes dimensions, l'un à couche d'air et l'autre à diélectrique solide total ou partiel, Faraday [1] a trouvé les valeurs suivantes pour les pouvoirs inducteurs :

Spermaceti.	1,45	Gomme laque. . .	2,0
Verre	1,76	Soufre.	2,24

Par la comparaison des charges (741) de condensateurs à plateaux, Gaugain a démontré que la valeur apparente du pouvoir inducteur spécifique croît avec la durée de la charge. Les variations sont très inégales pour les différents corps, et l'ordre même des pouvoirs inducteurs peut être modifié ; nous citerons quelques exemples :

Charge d'une fraction de seconde.		Charge de deux secondes.	
Acide stéarique. . .	1,30	Soufre	1,71
Cire.	1,50	Acide stéarique . .	1,92
Soufre fondu. . . .	1,57	Cire.	2,21

Des traces de matières étrangères, telles qu'une couche de poussière ou d'humidité, rendent la surface des corps plus conductrice et ont pour effet d'augmenter la valeur apparente du pouvoir inducteur spécifique. L'altération spontanée de la surface produit le même résultat.

Afin d'éviter ces causes d'erreur, au moins en grande partie, M. Wullner (745) emploie des charges aussi faibles que possible, en observant la valeur initiale du potentiel sur l'armature isolée. Les nombres relatifs à une même lame restent à peu près constants, mais diffèrent pour des substances en apparence identiques.

[1] Faraday, *Exper. Researches*, série XI, § 1187; 1837.

MM. Gibson et Barclay ont étudié encore les condensateurs sphériques à paraffine par comparaison avec un platymètre et avec un condensateur glissant.

Dans ses expériences sur différentes sortes de verre d'optique, M. Hopkinson [1] se servait d'un condensateur avec anneau de garde et déterminait l'épaisseur de la couche d'air équivalente à la lame considérée. On ajustait le condensateur glissant de manière à lui donner la même capacité que l'appareil à lame de verre; puis, cette lame de verre enlevée, on rétablissait l'équilibre en rapprochant les plateaux, de sorte que le condensateur servait uniquement de tare.

En formant un condensateur, muni de son anneau de garde, avec une lame diélectrique (**735**), M. Curie compare la décharge instantanée avec celle que fournit un condensateur à air de mêmes dimensions; l'emploi du quartz piezoélectrique permet d'opérer sur des surfaces très faibles et d'appliquer la méthode aux cristaux.

Les pouvoirs inducteurs ainsi obtenus pour le *quartz* et le *spath* d'Islande n'ont aucun rapport avec les carrés des indices n de réfraction correspondants, relatifs à la raie D :

	K.	n^2.
Quartz suivant l'axe.	4,55	2,41
— perpendiculaire à l'axe.	4,49	2,38
Spath suivant l'axe	8,03	2,21
— perpendiculaire à l'axe.	8,48	2,75

747. Inductomètre différentiel. — Le rôle du diélectrique a été encore mis en évidence par Faraday [2] à l'aide d'une disposition ingénieuse qu'il désigne sous le nom de balance d'induction ou *inductomètre différentiel*. Entre les deux plateaux A et B (fig. 225), qui sont reliés respectivement avec deux feuilles d'or a et b, on interpose à égales distances un plateau isolé C de mêmes dimensions. Les plateaux A et B communiquant avec le sol, on électrise C positivement et on supprime les communications; les feuilles a et b sont alors au même potentiel et n'ont pas d'action l'une sur l'autre. Il

(1) Hopkinson, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1878, p. 17.
(2) Faraday, *Exper. Researches*, série XI, § 1307; 1838

est clair que si on rapproche B, l'influence sera augmentée de ce côté, la feuille b deviendra positive, la feuille a négative, et on constatera une attraction.

Remettant les plateaux en place, on intercale entre C et B une plaque diélectrique d'épaisseur e; si la distance des plateaux est très petite par rapport à leurs dimensions, la lame introduite équivaut (91) à une couche d'air K fois moindre. Les feuilles d'or sont électrisées comme si on avait rapproché l'armature B, elles s'attirent et on détermine la quantité e'

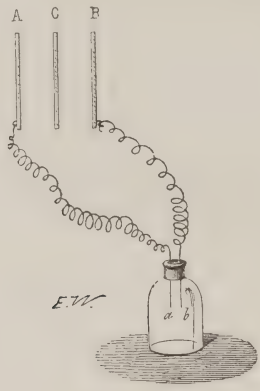


Fig. 225.

dont il faut alors éloigner l'armature B pour rétablir l'équilibre primitif; on a alors

$$e = e' + \frac{e}{K}, \qquad K = \frac{e}{e - e'}.$$

Cette disposition présente l'inconvénient que le défaut d'équilibre, de quelque côté qu'il ait lieu, produit toujours une attraction des feuilles d'or. Si on relie les plateaux A et B aux quadrants d'un électromètre dont l'aiguille communique avec le plateau C, il n'est plus nécessaire de relier d'abord ces plateaux avec le sol; l'aiguille reste au zéro si l'influence est la même de part et d'autre et, quel que soit le signe de l'électrisation, le sens de la déviation indique le côté vers lequel a lieu le maximum d'influence.

Afin d'éliminer l'influence des corps extérieurs sur les plateaux A et B de Faraday et de réaliser, autant que pos-

sible, le cas de surfaces parallèles indéfinies, lord Kelvin et Maxwell ont donné l'idée générale d'une balance dont les indications sont plus correctes. Les plateaux A et B, qui communiquent avec les quadrants d'un électromètre E (fig. 226), sont placés dans les intervalles de trois plateaux C, A_1 et B_1 de dimensions plus grandes ; les plateaux extérieurs A_1 et B_1 sont réunis entre eux et le plateau intermédiaire communique avec l'aiguille de l'électromètre [1].

Une fois l'équilibre établi, l'aiguille doit rester immobile, quelle que soit la différence de potentiel établie entre les conducteurs C et A_1B_1, si le système est entièrement symétrique.

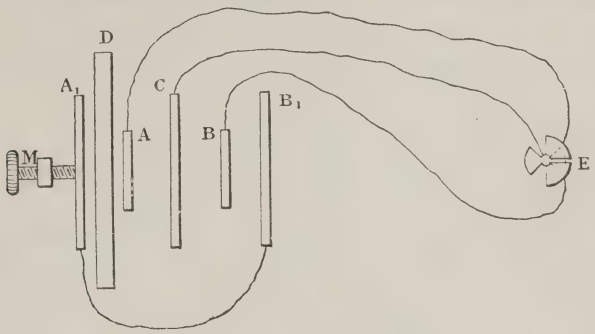


Fig. 226.

L'un des plateaux extrêmes A_1 est muni d'une vis de rappel M qui permet de le déplacer parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que la condition soit réalisée.

On introduit entre A_1 et A une plaque diélectrique D d'épaisseur e, et on mesure avec la vis micrométrique M le déplacement e' du plateau A_1 nécessaire pour rétablir l'équilibre, ce qui donne le pouvoir inducteur spécifique.

Comme ce pouvoir inducteur est une fonction du temps de charge, on met les conducteurs C et A_1B_1 en communication avec les pôles d'une bobine d'induction dont le courant inducteur est interrompu par une lame vibrante ou par un appareil électromagnétique à rotation qui peut donner jusqu'à 12 000 interruptions par seconde.

[1] J. E. H. Gordon, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1879, p. 417. — *Traité exp. d'Élect. et de Magn.* Traduction française, t. I, p. 171.

M. Gordon a constaté que pour les verres, en particulier, la manière dont on nettoie les surfaces joue un rôle important et que leur altération spontanée se manifeste par un accroissement notable du pouvoir inducteur.

Pour le mica, M. Bouty place en cascade sur le circuit d'une pile E un condensateur de faible capacité C avec un microfarad F. Le courant étant fermé pendant un temps très court t, le microfarad prend une différence de potentiel v et le condensateur $E - v$, ce qui donne $C(E - v) = Fv$. On en déduit le pouvoir inducteur par surface et l'épaisseur du mica.

Ces expériences d'équilibre électrostatique conduisent presque toujours à des valeurs de beaucoup supérieures aux carrés des indices de réfraction.

M. Pellat [1] utilise le changement qu'éprouve l'attraction des plateaux par l'introduction du diélectrique.

Deux électromètres absolus sont disposés l'un au-dessus de l'autre, en sens inverse, les plaques mobiles a et a' étant portées par un fléau de balance; on équilibre le système de manière que ces plaques occupent chacune leur position normale dans le plan des anneaux de garde. Le plateau attractif B′ de l'électromètre inférieur est fixe et à une distance constante d' de sa plaque mobile. Le plateau supérieur B peut être déplacé par une vis micrométrique.

Les plaques a et a', avec les anneaux de garde, sont reliées au sol; les plateaux attractifs B et B′ sont aussi reliés entr'eux et peuvent être électrisés au même potentiel. L'action exercée sur chacune des plaques est proportionnelle à leur surface et au carré du champ.

Quand on électrise l'appareil, on ramène les plaques dans leur position primitive par l'ajustement de la distance d de l'électromètre supérieur. Si alors on introduit entre les armatures une lame diélectrique d'épaisseur e, l'équilibre n'existe plus; on le rétablit en éloignant le plateau B d'une quantité $e' = e - \frac{e}{K}$; c'est une variante de l'expérience qui précède.

On peut ici éliminer l'influence du temps et de l'électricité libre qui pourrait se trouver sur le diélectrique en donnant au

[1] Pellat, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 501; 1895.

potentiel des valeurs égales et contraires ; il suffit, pour cela, de relier les armatures au fil induit d'une bobine dont le fil primaire est parcouru par un courant alternatif.

748. Décharges oscillantes. — M. Schiller [1] a recours aux décharges oscillantes produites dans le fil secondaire d'une bobine d'induction par la rupture du circuit primaire.

Les armatures du condensateur communiquent, d'une part avec les extrémités du fil, de l'autre avec les quadrants d'un électromètre, l'un de ces quadrants étant au sol. Le mouvement d'un pendule (**650**) rompt d'abord le circuit primaire, puis la communication de l'armature isolée avec le fil induit. L'électromètre donne la différence de potentiel des armatures au moment de cette seconde interruption. Une vis micrométrique permet de régler l'intervalle des opérations du pendule jusqu'à 10^{-6} seconde.

On dispose l'expérience de manière que l'électromètre reste au zéro pour deux intervalles successifs, dont la différence est la moitié de la période des oscillations.

En désignant par r et L les constantes du circuit et par C la capacité totale, la période T est donnée par la relation

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2},$$

et il est facile de choisir des conditions expérimentales telles que le second terme soit négligeable.

On fait trois séries d'expériences : l'une avec le fil induit seul, les deux autres avec un condensateur à plateaux comprenant un diélectrique ou une couche d'air.

Désignant par t, T et T′ les trois périodes obtenues, par c, $c + KC$ et $c + C$ les capacités correspondantes du système, on en déduit

$$\frac{c}{t^2} = \frac{c + KC}{T^2} = \frac{c + C}{T'^2}, \qquad K = \frac{T^2 - t^2}{T'^2 - t^2}.$$

Le pouvoir inducteur correspond à une durée très courte, les périodes étant de l'ordre de $0^s,00005$.

[1] Schiller, *Pogg. Ann.*, t. CLII, p. 535; 1874.

749. Action sur une sphère diélectrique. — Si l'on considère une sphère diélectrique de volume v située dans un champ non uniforme (**129**), elle subit une action dont la composante parallèle à l'axe des x a pour expression

$$X = \frac{Hv}{2}\frac{\partial F^2}{\partial x} = \frac{v}{2}\frac{3}{4\pi}\frac{K-1}{K+2}\frac{\partial F^2}{\partial x}.$$

L'action X_0 qui s'exercerait sur une sphère conductrice d'égal volume s'obtiendra en faisant $K = \infty$; il en résulte

$$\frac{X}{X_0} = \frac{K-1}{K+2}, \qquad K = \frac{X_0 + 2X}{X_0 - X}.$$

M. Boltzmann [1] applique cette méthode par deux dispositions expérimentales différentes.

Dans l'une d'elles, le rapport des actions X et X_0 est déterminé par les déviations de la verticale. Deux balles sphériques de soufre, par exemple, l'une rendue conductrice par une feuille d'or, avaient $0^c,7$ de diamètre et étaient suspendues à la distance de 9 centimètres à deux fils de 2 mètres situés en face d'une échelle divisée. Quand on introduit entre elles une boule métallique électrisée de $2^c,6$ de diamètre, les balles sont attirées inégalement; si on règle l'expérience de façon que la boule active reste au milieu de l'intervalle des balles mobiles, le rapport des attractions est égal au rapport des déviations, qu'on observe au microscope, ou, plus généralement, au produit du rapport des déviations par le rapport des poids des balles. Il est difficile, dans ce cas, d'assurer l'égalité des distances et d'éviter l'action des courants d'air.

Dans d'autres expériences, la balle mobile B est attachée par deux fils à l'extrémité d'une tige métallique (fig. 227), portée elle-même par une suspension bifilaire F, de manière à constituer une petite balance de torsion; un miroir M sert à mesurer les déviations; l'aiguille de cette balance est protégée par une enveloppe contre les courants d'air. La boule active communique avec une bouteille de Leyde à laquelle on donne une charge déterminée au moyen d'un électromètre

[1] Boltzmann, *Wiener Sitz. berichte*, t. LXVIII, part. II, p. 81; 1873 et t. LXX, part. II, p. 342; 1874.

à décharges (612); on vérifie d'ailleurs par une balance de torsion conductrice et communiquant au sol, analogue à la première, que le potentiel de la bouteille de Leyde reprend la même valeur dans les expériences successives.

Si la balle mobile est formée alternativement d'un diélectrique et d'un conducteur, le rapport des déviations est égal au rapport des attractions correspondantes. Toutefois il reste à faire de petites corrections qui tiennent, soit à la différence

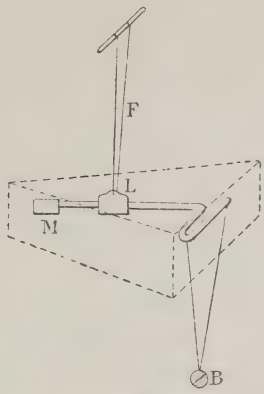


Fig. 227.

de volume des balles, soit au changement de distance produit par les attractions inégales.

Comme les actions qu'on observe sont toujours attractives, quel que soit l'état électrique de la bouteille de Leyde, on peut répéter l'expérience en opérant à la main un certain nombre de charges et de décharges successives, ou même en alternant les signes par le jeu d'une lame qui vibre entre les armatures de deux batteries électrisées en sens contraires. On détermine ainsi l'influence de la durée de charge sur le pouvoir inducteur spécifique.

Dans ces expériences d'attraction, le phénomène dépend de la masse entière du corps électrisé par influence, et non pas seulement de la surface, comme pour les conducteurs; MM. Romich et Fajdiga [1] l'ont vérifié sur des balles de soufre recouvertes de paraffine ou de gomme laque.

[1] Romich et Fajdiga, *Wiener Sitz. berichte*, t. LXX, part. II, p. 367; 1874.

La méthode présente surtout l'avantage de n'exiger qu'un très petit volume du corps soumis à l'expérience et de pouvoir être appliquée aux cristaux (**497**).

En mesurant l'attraction exercée sur des sphères de soufre cristallisé, suivant des directions parallèles aux axes principaux, M. Boltzmann a obtenu trois valeurs très différentes du pouvoir inducteur spécifique, qui se rapprochent beaucoup des carrés des indices de réfraction correspondants, relatifs à la raie D :

$$K_1 = 3{,}811, \qquad K_2 = 3{,}970, \qquad K_3 = 4{,}773.$$
$$n_1^2 = 3{,}834, \qquad n_2^2 = 4{,}153, \qquad n_3^2 = 5{,}018.$$

En appliquant la même méthode à plusieurs corps isotropes ou cristallisés, MM. Romich et Nowak [1] ont fait varier la durée de la charge entre des limites très étendues. Les matières imparfaitement isolantes ne tardent pas à se comporter comme des conducteurs; même pour des durées très courtes, il devient alors difficile de constater une inégalité des pouvoirs inducteurs spécifiques suivant différentes directions.

Par une disposition analogue, M. Borel [2] a déterminé les constantes diélectriques principales de divers cristaux orthorhombiques ou clinorhombiques. Dans ce dernier cas, deux des axes principaux ne sont pas définis par la symétrie cristalline et ne peuvent avoir qu'une relation éloignée avec ceux des phénomènes optiques.

750. Liquides. — L'expérience présente ici des difficultés spéciales à cause des mouvements du liquide qui transportent l'électricité par convection d'une armature sur l'autre. On sait, par exemple, qu'il est impossible de maintenir chargé un condensateur à diélectrique liquide.

Sous cette réserve, les méthodes précédentes peuvent être appliquées aux liquides; il suffit de placer le liquide dans une cuve à faces parallèles et d'étudier séparément l'influence de la cuve vide ou pleine.

Si les appareils sont placés dans le liquide même, leur action réciproque est proportionnelle (**96**) au carré du champ

[1] Romich et Nowak, *Wiener Sitz. berichte*, t. LXX, part. II, p. 380; 1874.
[2] Ch. Borel, *Arch. de Genève*, [3], t. XXX, p. 131; 1893.

et en raison inverse du pouvoir inducteur, c'est-à-dire finalement proportionnelle au pouvoir inducteur lorsque la différence de potentiel est constante.

M. Silow [1] s'est servi d'un électromètre de forme particulière. Une lame d'étain, collée à l'intérieur d'un cylindre de verre, est divisée en quatre segments qui jouent le rôle des quadrants; l'aiguille est remplacée par deux secteurs cylindriques de même axe. L'aiguille est en communication avec le sol et les deux systèmes de quadrants opposés avec les pôles d'une pile isolée dont le milieu est au sol. On mesure la déviation quand l'appareil est plein d'air, puis quand il est rempli d'un liquide, d'essence de térébenthine par exemple; pour une même différence de potentiel, la déviation est proportionnelle au pouvoir inducteur spécifique; on évite la lecture du zéro en renversant les communications des pôles avec les quadrants et mesurant la double déviation.

M. Pérot [2] emploie deux électromètres à quadrants superposés, dont les quadrants sont réduits à des secteurs plans au lieu d'appartenir à une boîte fermée. Les deux aiguilles sont solidaires, portées par la même suspension, et l'on fait en sorte que les deux couples auxquels elles sont soumises soient de sens contraires. La distance de l'aiguille inférieure à ses quadrants restant invariable, on équilibre les couples en modifiant la distance des quadrants de l'électromètre supérieur à l'aiguille correspondante. Supposons que l'appareil soit équilibré pour une distance d à l'électromètre supérieur, quand les aiguilles et deux des paires de quadrants sont électrisés, les autres quadrants étant au sol. Si on plonge l'électromètre inférieur dans un liquide, l'équilibre est troublé; on le rétablit en portant les quadrants supérieurs à la distance d'.

Pour déterminer le changement produit par le liquide, on charge seulement l'électromètre supérieur à un même potentiel et on mesure les déviations δ et δ' qui correspondent aux distances d et d'. Comme ces déviations sont respectivement proportionnelles aux couples électriques de l'électromètre et, par suite, à ceux qu'éprouvait l'électromètre inférieur, à distance constante, avant et après l'introduction du liquide, il

(1) Silow, *Pogg. Ann.*, t. CLVI, p. 389; 1875.
(2) A. Pérot, *Journ. de Phys.* [2], t. X, p. 149; 1891.

en résulte $K = \frac{\delta'}{\delta}$. Pour la benzine et l'essence de pétrole, les pouvoirs inducteurs ainsi déterminés ont été très voisins du carré des indices de réfraction relatifs à la raie D :

	K.	n^2.
Benzine.	2,235	2,25
Essence de pétrole.	2,170	2,11

La même disposition permet d'étudier la variation du pouvoir inducteur spécifique avec le temps.

L'appareil de M. Pellat (747), qui repose sur le même principe, convient également aux liquides. On noie d'abord l'électromètre inférieur dans le liquide et on l'équilibre quand tout est à l'état neutre. La différence de potentiel étant établie, l'attraction sur le disque a' est devenue K fois plus grande; on compense cet effet en diminuant de x la distance primitive d de l'électromètre supérieur. Il en résulte

$$\frac{a'}{d'^2}(K-1) = \frac{a}{(d-x)^2} - \frac{a}{d^2}.$$

Si l'on fait $a' = a$ et $d' = d$, il reste simplement

$$K = \left(\frac{d}{d-x}\right)^2.$$

Il est nécessaire de dégager le rôle que joue la conductibilité propre du liquide. M. Bouty, par exemple, met sur le circuit d'une pile E un microfarad F et un condensateur à liquide de capacité C beaucoup plus faible, dont la résistance r est très grande par rapport à celle du circuit. Pendant un temps t très court, réglé par un interrupteur à pendule, le débit d'électricité est $Q = CE + \frac{E}{r}t$.

Si on remplace le liquide par de l'air, la charge totale est $q = \frac{C}{K}E$. Le rapport des charges Q et q étant déterminé par les différences de potentiel du microfarad, il en résulte

$$\frac{Q}{q} = K\left(1 + \frac{t}{Cr}\right) = K + \frac{Kt}{Cr}.$$

En appelant S la surface du condensateur, e son épaisseur et ρ la résistivité du liquide, on a

$$C = K\frac{S}{4\pi e}, \qquad r = \rho\frac{e}{S};$$

$$\frac{Q}{q} = K + \frac{4\pi}{\rho}t.$$

Pour que l'expérience soit capable de donner en même temps les valeurs de K et de ρ avec une exactitude suffisante, il faut que le rapport $\frac{K\rho}{4\pi}$ soit de l'ordre de l'intervalle de temps t, lequel était compris entre $0^s,0001$ et $0^s,03$.

On a ainsi obtenu, pour différents liquides, en évaluant la résistivité ρ en ohms,

	K.	ρ.
Sulfure de carbone.....	2,715	$>1,5.10^{13}$
Essence de thérébentine. .	2,314	$=1,75.10^{12}$
Benzine (à 20°).....	2,21	$=1,56.10^{12}$

Avec les mélanges de liquides, la résistivité diminue beaucoup et le pouvoir inducteur augmente.

751. Gaz. — L'objection relative au transport de l'électricité par les molécules n'a plus ici la même importance, puisque la charge d'un condensateur à gaz se conserve longtemps. Faraday, malgré de nombreux essais, ne put constater aucune différence entre les pouvoirs inducteurs spécifiques des gaz; M. Boltzmann et, plus tard, MM. Ayrton et Perry [1] y ont réussi de la manière suivante.

Le condensateur de M. Boltzmann est formé de deux plateaux métalliques parallèles A et B, placés sous une cloche, et garantis par des plateaux plus larges contre toute influence extérieure. Le plateau A est relié d'une manière permanente au pôle positif d'une pile de 300 couples; le pôle négatif communique au sol et à une des paires de quadrants d'un électromètre dont l'aiguille est électrisée; le plateau B est relié à l'autre paire de quadrants.

L'aiguille est ramenée d'abord au zéro par la mise au sol du

[1] Ayrton et Perry, *Mém. lu à Soc. As. du Japon*, Yokohama; 1877.

plateau B pendant un instant ; quand on fait ensuite le vide dans la cloche ou qu'on remplace l'air par un autre gaz, il se produit une déviation.

Si V est la force électromotrice de la pile, K et K′ les pouvoirs inducteurs spécifiques des deux gaz, la différence de potentiel entre les plateaux, qui était d'abord égale à V dans la première expérience, devient dans le second cas $V\frac{K}{K'}$ (91), puisque la charge du plateau B reste sensiblement la même. En désignant par ∂V la variation de potentiel qui correspond à la déviation de l'aiguille, on peut écrire

$$\partial V = V\left(1 - \frac{K}{K'}\right), \qquad \frac{K}{K'} = 1 - \frac{\partial V}{V}.$$

Comme l'électromètre doit être très sensible pour ce genre d'observations, on détermine le potentiel V par la déviation que produit un seul couple.

Par rapport au vide, tous les gaz ont un pouvoir inducteur spécifique plus grand que l'unité, moindre pour l'hydrogène que pour l'air. La variation de potentiel ∂V est donc négative quand on fait le vide sur un gaz ou qu'on remplace l'air par l'hydrogène.

MM. Ayrton et Perry comparent, au moyen de la balance des capacités (fig. 217), un étalon à air avec un condensateur lamellaire formé de douze plaques entre lesquelles on pouvait introduire un gaz quelconque ou faire le vide.

752. **Capacité de polarisation.** — La charge d'un condensateur et la polarisation des électrodes présentent une analogie très étroite (182). Toute quantité q d'électricité qui traverse un voltamètre, sans y provoquer aucun dégagement apparent de gaz, détermine entre les électrodes une différence de potentiel e; si on pose $q = ce$, le facteur c peut être défini la capacité de polarisation de l'électrode. Le procédé le plus simple pour mesurer cette grandeur serait de mettre le voltamètre en relation avec une pile de force électromotrice connue, inférieure au maximum de polarisation, puis de mesurer la décharge obtenue en fermant le voltamètre par un galvanomètre [1]. Toutefois,

[1] Varley, *Phil. Trans. R. S. L.*, t. CLXI, p. 129 ; 1871.

l'expérience est complexe, parce que l'équilibre n'est pas instantané, à la charge ou à la décharge, et il y a une perte notable due à la dépolarisation par diffusion.

M. Blondlot [1] évite cette cause d'erreur en commençant par étudier comment s'établit la polarisation en fonction de la durée de la charge. Au moyen d'un interrupteur à pendule, il met le voltamètre en communication avec une force électromotrice donnée, pendant un temps très court, puis ferme le voltamètre sur lui-même par une résistance très faible, pour le dépolariser. La quantité d'électricité correspondant au courant de charge est mesurée par un galvanomètre balistique. En faisant varier la durée du contact, on peut construire la courbe des charges en fonction du temps. Cette courbe s'élève rapidement et, sans la déperdition, deviendrait bientôt horizontale ; en réalité elle tend à se confondre avec une droite inclinée AL (fig. 228) dont l'inclinaison sur l'axe des abscisses

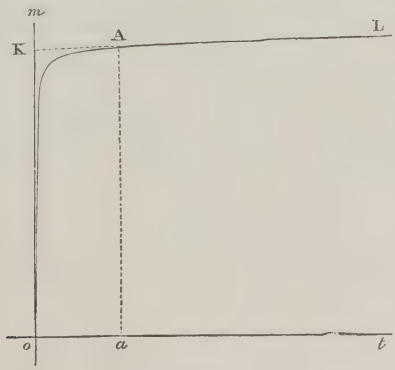


Fig. 228.

représente la déperdition ; l'ordonnée OK à l'origine mesure la charge vraie capable de donner aux électrodes une différence de potentiel égale à celle de la pile.

L'expérience étant répétée avec des forces électromotrices variables, on peut construire la courbe représentative des charges en fonction de la force électromotrice. Si la capacité était constante, cette courbe se réduirait à une droite passant par l'origine ; en réalité elle tourne sa convexité vers l'axe des

[1] Blondlot, *Journal de Physique*, t. X, p. 277, 333, 434; 1881.

abscisses, autrement dit les charges croissent plus vite que les forces électromotrices. Le coefficient angulaire de la tangente représente en chaque point la capacité vraie ; on peut considérer comme *capacité initiale* la valeur limite de ce coefficient quand la force électromotrice tend vers zéro.

La différence de potentiel des deux électrodes représente l'écart que la polarisation établit entre les forces électromotrices de contact, originairement égales, des deux électrodes avec le liquide. Si la surface d'une des électrodes est très grande et comme infinie par rapport à l'autre, on peut admettre que la surface de la première et, par suite, sa force électromotrice de contact n'est pas modifiée; la différence observée représente alors la variation de la force électromotrice de contact de la seconde. En prenant cette dernière alternativement comme anode ou cathode, c'est-à-dire en la chargeant d'oxygène ou d'hydrogène, l'expérience donne la même valeur pour la capacité initiale; celle-ci est donc indépendante du sens de la polarisation. Si on compte les forces électromotrices et les charges correspondantes comme positives ou négatives suivant que l'électrode active est elle-même anode ou cathode, on obtient deux courbes qui se raccordent à l'origine, comme on le voit dans la figure 229.

L'expérience montre que la capacité d'une électrode déter-

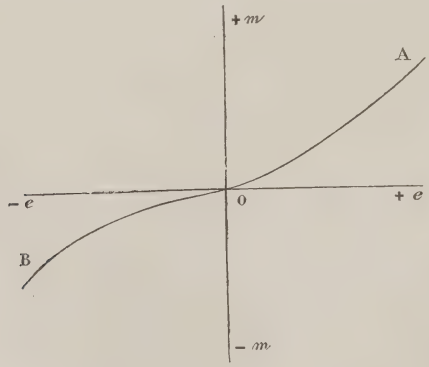


Fig. 229.

minée ne dépend que de la différence de potentiel qui existe entre cette électrode et le liquide en contact et non de la

nature du liquide : c'est l'extension à une surface solide en contact avec un liquide de la loi signalée plus haut (196) pour le mercure. La courbe de la figure 229, relative à l'eau acidulée par l'acide sulfurique, convient donc pour tout électrolyte donnant de l'hydrogène et de l'oxygène.

Pour démontrer cette loi, M. Blondlot place les deux électrodes dans des liquides différents, séparés par une cloison poreuse. Les forces électromotrices de contact étant inégales, le système constitue un couple ; mais quand on ferme le circuit jusqu'à ce que le courant devienne nul, la polarisation a précisément pour effet de ramener à l'égalité les chutes de potentiel de part et d'autre. Si l'une des électrodes est très grande et reste sans altération sensible, la capacité initiale de la petite est alors la même que lorsqu'elle est plongée dans le même liquide que la grande. Si les électrodes ont des surfaces égales, M. Blondlot démontre que leurs capacités sont égales en s'appuyant sur la remarque suivante.

Soit e, à un instant donné, la différence de potentiel entre l'électrode et le liquide en contact; pendant le temps dt, cette différence éprouve une variation totale

$$de = \frac{\partial e}{\partial t}\,dt + \frac{\partial e}{\partial q}\,dq = \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dt}\right)dt.$$

Le premier terme correspond à la dépolarisation spontanée par diffusion, le second au passage d'une quantité dq d'électricité à travers l'électrode. Si on remarque que la dérivée partielle $\frac{\partial e}{\partial q}$ représente l'inverse de la capacité et $\frac{dq}{dt}$ le courant i qui traverse l'électrode, on peut écrire

$$(1) \qquad de = \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{i}{c}\right)dt.$$

Quand on ferme le couple sur lui-même, il se produit un courant très faible et qui finit par devenir constant ; on a alors $de = 0$ et on peut écrire, pour chaque électrode,

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{i}{c} = 0, \qquad \frac{\partial e'}{\partial t} - \frac{i}{c'} = 0$$

Si les capacités c et c' sont égales, comme le veut la loi, il résulte des équations précédentes

$$\frac{\partial(e+e')}{\partial t}=0.$$

Quand on interrompt le circuit, la somme algébrique des deux forces électromotrices doit donc rester constante; en d'autres termes, ces forces électromotrices varient de quantités égales et de signes contraires.

On peut s'en assurer par une expérience directe, en reliant chacune des électrodes respectivement à l'armature intérieure de deux condensateurs identiques réunis par leurs armatures extérieures. La communication étant établie entre l'armature extérieure commune et le liquide qui entoure les électrodes, par l'intermédiaire d'un galvanomètre ou mieux d'un électromètre, on rompt le circuit dans lequel le couple était intercalé. Si les deux électrodes sont égales, l'aiguille reste immobile, d'où résulte que les armatures éprouvent des variations de potentiel égales et de signes contraires ; l'aiguille est déviée dans un sens ou dans l'autre dès qu'il existe une différence sensible entre les surfaces des deux électrodes.

Remarquons, en passant, que l'équation (1) fournirait un procédé pour mesurer la capacité c de polarisation. Le voltamètre étant relié à une pile de force électromotrice inférieure au maximum, on mesurerait le courant i de dépolarisation et, après avoir rompu la communication, la déperdition $\frac{\partial e}{\partial t}$ de la force électromotrice par un électromètre.

Les expériences de M. Bouty [1] ont été faites par une méthode différente. Un voltamètre de résistance r est intercalé dans un circuit renfermant une force électromotrice E très grande par rapport au maximum de polarisation et dont la résistance R est telle que le courant reste très faible et sensiblement uniforme. A la fermeture de ce circuit, le courant est I_0 et la différence de potentiel des électrodes du voltamètre a pour expression

$$V_0 = I_0 r = E\frac{r}{R+r}.$$

[1] E. Bouty, *Ann. de Ch. et de Phys.* [7], t. III, p. 145; 1894.

Au bout du temps t, la polarisation est devenue e et la différence de potentiel des électrodes V; on a alors

$$V = e + Ir = e + r\frac{E - e}{R + r} = V_0 + e\frac{R}{R + r},$$

$$e = (V - V_0)\frac{R + r}{R}.$$

Par un mouvement de pendule, on ferme d'abord le circuit principal; aussitôt après, le pendule relie les électrodes aux armatures d'un condensateur, pendant un temps de quelques centièmes de seconde suffisant pour établir l'équilibre, et répète le même contact un certain nombre de fois, à des intervalles τ, par chacune de ses oscillations. La capacité γ du condensateur peut être négligée par rapport à celle du voltamètre; on détermine la différence de potentiel initiale V_0 et sa valeur V au bout de temps $t = n\tau$, soit par compensation, soit par un électromètre.

Le courant de décharge se mesure d'une manière analogue. Le voltamètre étant fermé par une résistance R, on détermine les différences de potentiel décroissantes V_0, V_1, ..., V_n aux époques o, τ, ..., $n\tau$, d'où l'on déduit les polarisations correspondantes e_0, e_1, ..., e_n. Si c'_n désigne la capacité pendant un des intervalles τ, où la polarisation moyenne est $\frac{e_{n-1} + e_n}{2}$, et q' la décharge qui en résulte, on a

$$q' = c'_n(e_n - e_{n-1}) = \frac{e_{n-1} + e_{n+1}}{2R}\tau,$$

$$c'_n = \frac{\tau}{R} \cdot \frac{e_{n-1} + e_{n+1}}{2(e_n - e_{n-1})} = \frac{1}{Rp_n}.$$

Le rapport p_n représente la vitesse moyenne de dépolarisation relative dans cet intervalle.

La décharge totale est

$$Q' = \Sigma q' = \left(\frac{e_0}{2} + e_1 + e_2 + \ldots\right)\frac{\tau}{R}.$$

Pour un certain nombre de dissolutions d'acides, de bases, ou des sels en fusion, quelles que soient la distance et la forme

des électrodes, la polarisation varie avec le temps suivant une loi hyperbolique et on peut écrire

$$e = \frac{At}{1+Bt} = \frac{I_0 t}{c(1+Bt)} = \frac{Q}{c(1+Bt)}.$$

La quantité Q est le débit du courant initial pendant le temps t et le facteur c représente la capacité initiale du voltamètre. On voit ainsi que la capacité apparente $c(1+Bt)$ croît avec le temps; le facteur B est d'ailleurs une fonction linéaire du courant initial I_0.

Si l'on désigne par S_1 et S_2 les surfaces des électrodes, par K_1 et K_2 leurs capacités respectives par unité de surface, la capacité du système, considéré comme un condensateur en cascade, a pour expression

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{K_1 S_1} + \frac{1}{K_2 S_2}.$$

On peut déterminer séparément les valeurs de K_1 et de K_2 en faisant l'une des surfaces très grande par rapport à l'autre. Ces deux quantités sont d'ailleurs égales, comme l'avait observé M. Blondlot, et conservent la même valeur K quel que soit le rapport des surfaces S_1 et S_2.

Si les durées de charge et de décharge sont très petites, le débit est le même de part et d'autre; les capacités c et c' ont donc des valeurs égales. Si le temps de charge a une durée notable, la décharge devient plus lente et la capacité efficace des électrodes augmente avec le temps. Toutefois, pour des électrodes de platine, à moins que le liquide ne renferme des traces d'un sel de platine, la quantité totale Q′ d'électricité restituée reste sensiblement égale à la charge primitive Q; il n'en est plus de même dans le cas où les électrodes sont situées dans un liquide qui peut les altérer.

Pour le *mercure*, la capacité a été déterminée avec un électromètre capillaire, soit par le quartz piezoélectrique, soit par la variation de potentiel produite en reliant l'électromètre à un condensateur; on a ainsi étudié les lois de variation du phénomène (**613**). Dans l'eau acidulée au dixième, la capacité à surface constante serait d'environ 28 microfarads par

centimètre carré et la capacité initiale de 140 microfarads.

La polarisation des électrodes en platine varie beaucoup avec la richesse de la solution et les traces de matières étrangères qui existent dans le liquide ou à la surface du métal ; il est donc difficile d'obtenir des nombres bien définis.

La capacité croît généralement avec la température. Pour des solutions d'*azotate de soude* renfermant de 0,02 à 2 équivalents de sel par litre, la capacité initiale d'électrodes de platine, rappportée au centimètre carré, serait

$$K = 14^{mf},3(1 + 0,01\,t).$$

753. Accumulateurs. — Le courant secondaire produit par la réunion de deux électrodes polarisées est en général assez faible et diminue rapidement, à moins que la polarisation ne soit entretenue par une cause étrangère, comme dans le couple de Grove, où les lames de platine sont placées respectivement dans l'oxygène et dans l'hydrogène.

La capacité de polarisation peut devenir très grande avec certains métaux, quand les réactions chimiques, au lieu d'être limitées à une mince couche superficielle, pénètrent davantage et mettent en jeu des masses importantes.

Planté [1] a étudié la plupart des métaux, à ce point de vue, et construit une pile secondaire capable de produire un grand débit d'électricité. Ces travaux importants ont été l'origine des appareils aujourd'hui très répandus dans l'industrie sous le nom d'*accumulateurs électriques*.

La disposition qui convient le mieux consiste à employer deux lames de plomb parallèles et très rapprochées plongeant dans une dissolution d'acide sulfurique ; la force électromotrice maximum de polarisation est supérieure à 2 volts. Une propriété importante est que la capacité de polarisation augmente de plus en plus à mesure qu'on *forme* les accumulateurs, c'est-à-dire qu'on les charge et qu'on les décharge un plus grand nombre de fois, de manière à faire pénétrer plus profondément l'action oxydante du courant primaire, en raison de la porosité exceptionnelle des dépôts galvaniques.

On peut accélérer beaucoup la formation des couples en

[1] G. Planté, *C. R. de l'Acad. des Sciences*, t. LXXIV, p. 592 ; 1872 et t. XCV, p. 418 ; 1882. — *Recherches sur l'électricité ;* Paris, 1879.

couvrant les lames de plomb, ou remplissant des cavités ménagées dans le métal, par une couche de minium. Cette idée paraît due à M. Faure; on est arrivé par différentes dispositions à résoudre la difficulté d'établir l'adhérence entre les lames de plomb et le métal qui provient de l'oxyde réduit.

Planté a reconnu aussi qu'une élévation de température active la formation des couples, mais il obtient encore plus rapidement le même résultat en plongeant d'abord les lames de plomb pendant un ou deux jours dans l'acide azotique très étendu. Une perte de poids très faible suffit pour que le métal éprouve une sorte de décapage, qui doit augmenter sans doute sa porosité et facilite la pénétration ultérieure de l'oxydation produite par le courant primaire.

Dans d'autres cas, comme pour les accumulateurs Laurent-Cély, la lame de plomb forme une sorte de grillage dont les cavités sont remplies par des pastilles de chlorure de plomb. En réunissant ces plaques avec une lame de zinc dans une liqueur acide, le chlorure est réduit et laisse un plomb spongieux très propre à une oxydation ultérieure. On a trouvé aussi avantage à remplacer le plomb pur par un alliage renfermant d'autres métaux, tels que l'antimoine.

Quel que soit le mode primitif de construction, lorsqu'un accumulateur formé est polarisé à refus, l'électrode qui devient positive dans la décharge porte une certaine quantité de plomb peroxydé et l'électrode négative une couche équivalente de plomb poreux. Le couple étant fermé, l'électrode positive se réduit, l'autre s'oxyde; la force électromotrice du couple secondaire conserve une valeur constante pendant la plus grande partie de la décharge et diminue ensuite jusqu'à ce que la dépolarisation soit complète.

Il y a intérêt, dans la pratique, à n'utiliser que la première partie de l'opération, celle qui correspond à une force électromotrice constante; on procède alors à une nouvelle charge de l'accumulateur. La force électromotrice nécessaire à la charge est plus faible quand on groupe les accumulateurs en batterie, pour les réunir ensuite en série, mais la manœuvre des connexions est alors compliquée, sans aucun profit sur le travail dépensé; les électromoteurs mécaniques permettent de supprimer ces manipulations.

754. Réactions chimiques. — L'analyse des réactions qui ont lieu dans un accumulateur est assez délicate. Pour la décharge, l'idée la plus simple est d'admettre ce qu'on appelle la double sulfatation, c'est-à-dire que l'électrode positive renferme du bioxyde de plomb PbO^2 et qu'il se forme simplement du sulfate sur les deux électrodes, conformément à l'équation

$$(2) \qquad Pb + PbO^2 + 2SO^4H^2 = 2.SO^4Pb + 2H^2O.$$

La somme des quantités de chaleur dégagées par cette réaction correspond, en effet, à $1^v,93$ et représente sensiblement la force électromotrice de l'accumulateur [1]. La petite différence peut tenir à ce que le couple se refroidit (**732**).

Le passage d'un coulomb (**653**) enlève $8^{gr}.1,036.10^{-5}$ d'oxygène au péroxyde et fait intervenir sur chaque électrode une masse de plomb égale à

$$103^{gr},5.1,036.10^{-5} = 1^{gr},0712.10^{-3}.$$

Il en résulte que la quantité d'électricité correspondant à 1 kilogramme de plomb total serait

$$\frac{1000}{2,1424.10^{-3}} = 467\,000 \text{ coulombs}, \quad \text{ou} \quad 129,2 \text{ ampères-heure}.$$

Si la force électromotrice est de 2,1 volts, l'énergie disponible par kilogramme de plomb engagé est de

$$467\,000.2,1 = 981\,000 \text{ joules}.$$

Le travail d'un watt-heure exige donc que la réaction ait lieu sur 3,67 kilogrammes de plomb.

Dans une pile qui consomme du zinc, la quantité d'électricité par kilogramme de métal est augmentée dans le rapport de 2.103,5 à 33. Si la force électromotrice est de 1,8 volts, comme celle du couple Bunsen, le rapport de l'énergie disponible à celle des accumulateurs, pour une même quantité de métal dans les deux cas, serait

$$\frac{207}{33} \cdot \frac{1,8}{2,1} = 5,38.$$

[1] Tschelzow, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. C, p. 1458; 1885.

Il faut tenir compte évidemment des acides et des vases qui sont toujours nécessaires et du charbon qui forme le pôle positif des couples Bunsen.

Il ne semble pas cependant que le phénomène chimique soit aussi simple et plusieurs explications différentes ont été proposées. D'après M. Frankland [1], par exemple, l'action de l'acide sulfurique sur la litharge produit le sel puce de plomb :

$$(3) \qquad 5PbO + 2.SO^4H^2 = 5PbO, 2SO^3 + 2H^2O.$$

D'autre part, l'acide sulfurique dilué donne avec le minium un sel rouge particulier:

$$(4) \qquad Pb^3O^4 + 2SO^4H^2 = Pb^3O^4, 2SO^3 + 2H^2O.$$

Si le sel actif est celui de l'équation (3), la décomposition de l'eau, pendant la charge, produit du péroxyde sur la plaque positive et du plomb sur la plaque négative :

$$5PbO, 2SO^3 + 2H^2O + 5O = 5PbO^2 + 2SO^4H^2,$$
$$5PbO, 2SO^3 + 5H^2 = 2SO^4H^2 + 3H^2O + 5Pb.$$

On reproduirait le sel primitif sur chacune des électrodes pendant la décharge; les réactions s'expriment alors en retranchant $5O$ aux deux membres de la première équation et $5H^2$ à ceux de la seconde.

Pour le sel de l'équation (4) on aurait aussi, à la charge,

$$Pb^3O^4, 2SO^3 + 2H^2O + 2O = 3PbO^2 + 2SO^4H^2,$$
$$\frac{1}{2}Pb^3O^4, 2SO^3 + 2H^2 = SO^4H^2 + H^2O + Pb\frac{3}{2}.$$

Les mêmes équations, prises en sens contraire, représentent le phénomène inverse à la décharge.

Il est probable que la réaction principale correspond à une double sulfatation et que d'autres effets assez complexes interviennent à titre secondaire.

755. Capacités et rendements. — Les qualités d'un accumulateur s'altèrent rapidement quand le courant de décharge est

[1] E. Frankland, *Proc. of the L. R. S.*, t. XLVI, p. 304; 1889.

trop intense, ou qu'on épuise trop loin la charge, ou encore qu'on abandonne les appareils pendant quelque temps sans les mettre en service.

A part cette question de durée, qui est la plus importante, il faut aussi que la capacité soit assez grande. Dans les expériences faites par la Commission [1] de l'Exposition de 1881, 35 accumulateurs du système Faure disposés en série et pesant chacun $43^k,7$ ont donné 619600 coulombs, comme débit utile d'électricité, avec une force électromotrice de 2,1 volts par couple. Le débit par kilogramme du couple est donc

$$\frac{619600}{43,7} = 14\,179 \text{ coulombs} \quad \text{ou} \quad 3,94 \text{ ampères-heure},$$

et l'énergie disponible $14\,179 . 2,1 = 29\,776$ joules.

D'après l'équation (2), le poids de plomb engagé dans la réaction serait environ 0,03 du poids total.

Si on admet que le plomb entre pour les deux tiers dans le poids du couple, la capacité serait de 21 269 coulombs par kilogramme de plomb, ou de 5,91 ampères-heure, c'est-à-dire environ 0,045 de la valeur théorique.

Planté a obtenu dans certaines expériences jusqu'à 17,16 ampères-heure par kilogramme de plomb. Pour le même rapport entre le poids du métal et celui de l'appareil, ce dernier nombre correspondrait à 11,44 ampères-heure par kilogramme d'accumulateur. Un poids total de 41,6 kilogrammes serait alors capable de produire un kilowatt-heure. On arrive pratiquement à des résultats encore plus avantageux avec les accumulateurs industriels.

On n'a guère de renseignements sur le travail que les piles peuvent produire utilement. Duboscq, qui en avait une grande expérience, estimait qu'avec 100 couples Bunsen, on obtient un bel arc pendant 15 heures, à la condition d'employer 50 couples pendant le premier tiers du temps, 50 autres pendant le second tiers et les 100 couples par deux séries de 50 en batterie pendant le dernier tiers.

Comme le courant est d'environ 15 ampères, l'énergie totale fournie par la pile est

$$50 . 1^v,8 . 15^a . 15^h = 2,025 \text{ kilowatts-heure}.$$

[1] Allard, Joubert, Potier et Tresca, *C. R. de l'Acad.*, t. XCIV, p. 603; 1882.

Chacun des couples pèse environ 6 kg., soit un poids total de 600 kilogrammes ; il faut donc 300 kilogrammes de pile par kilowatt-heure. A ce point de vue, les accumulateurs auraient une grande supériorité sur les piles.

Enfin l'accumulateur ne restitue qu'en partie, pendant la décharge en service régulier, l'électricité et l'énergie qu'il a reçues pendant la charge. Les accumulateurs étudiés par la Commission avaient absorbé 694 500 coulombs, pour en restituer seulement 619 600, de sorte que le rendement en électricité était 0,89.

Da'utre part, si E, I, R désignent la force électromotrice, le courant et la résistance d'une batterie pendant la charge Q, et E′, I′, R′ les mêmes quantités relatives à la décharge Q′, l'énergie dépensée dans le premier cas est $W = Q(E + IR)$ et l'énergie restituée $W' = Q'(E' - I'R')$. En faisant abstraction des pertes qui correspondent à l'échauffement des résistances très faibles R et R′, le rendement en énergie est

$$\frac{W'}{W} = \frac{Q'}{Q} \cdot \frac{E'}{E}.$$

On doit remarquer encore que la différence de potentiel entre les électrodes est plus grande à la charge qu'à la décharge ; si l'on fait $E = 2^{v},20$ et $E' = 1^{v},85$, le rapport des forces électromotrices est 0,84. Dans le cas précédent, le rendement en énergie serait donc

$$0,89 . 0,84 = 0,75.$$

Dans la pratique industrielle, le rendement en électricité peut atteindre 0,97 et même 0,98. Le taux de ce rendement présente le plus grand intérêt ; toutes les pertes d'électricité correspondent, en effet, à des actions locales et à une destruction continue de l'accumulateur.

Quant au rapport des forces électromotrices, il varie avec les conditions de l'expérience. Si la charge est lente et le courant de décharge assez faible pour que la résistance de l'accumulateur lui-même ne joue pas de rôle important, ce rapport peut être de 0,90. Il en résulterait que la valeur maximum du rendement en énergie ne dépasse pas $0,98 . 0,90 = 0,88$.

MM. Cailletet et Collardeau [1] ont employé, pour former les électrodes polarisées, de la *mousse de platine* enfermée dans des pochettes de soie. Le courant secondaire est alors plus intense qu'avec des lames métalliques et la force électromotrice initiale est égale à $1^{v},8$; toutefois la capacité n'est pas très grande et la décharge s'arrête assez rapidement.

Si le voltamètre est soumis à une pression croissante, la chute du courant est moins rapide, et le débit total augmente. A partir de 25 atmosphères, le courant présente même un ressaut après la première chute et se maintient uniforme pendant quelque temps. A la pression de 580 atmosphères, la force électromotrice de régime régulier est d'environ 1^{v} et la durée du courant uniforme peut atteindre une vingtaine de minutes. Dans ces conditions, la capacité du platine est de 56 ampères-heure par kilogramme et la décharge immédiate donne un rendement électrique de 95 à 98 pour 100. On pourrait ainsi réaliser des accumulateurs à *gaz condensés*, mais la charge se conserve mal à circuit ouvert.

Le *palladium* métallique n'a également qu'une capacité très faible, sans doute parce que l'anode n'absorbe pas d'oxygène. Quand on l'emploie à l'état de mousse, il présente le même caractère que le platine, à part le ressaut du courant; à la pression de 600 atmosphères, la capacité atteint 176 ampères-heure par kilogramme. La mousse d'*iridium* ainsi que l'*or* précipité jouissent de propriétés analogues, à un moindre degré; les phénomènes présentent la même marche.

Les autres métaux sont attaqués; il se produit alors des phénomènes chimiques, comme pour le plomb, et l'accumulation d'électricité n'est pas influencée par la pression.

Les propriétés du platine et du palladium correspondent d'ailleurs, comme l'a montré M. Berthelot, à de véritables combinaisons définies de ces métaux avec l'oxygène et surtout avec l'hydrogène.

[1] Cailletet et Collardeau, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXIX, p. 830; 1894.

CHAPITRE SIXIÈME

CONSTANTES DES CIRCUITS

756. Bobines étalons. — On a vu, dans les chapitres II et III de la première Partie, comment les propriétés des bobines à enroulement cylindrique et circulaire, à part la résistance, peuvent être déduites des seules données géométriques de la construction ; mais ces calculs supposent une régularité d'enroulement difficile à réaliser. En particulier, on doit prendre les précautions les plus minutieuses pour que toutes les spires de chaque couche aient le même rayon et gardent entre elles la même distance.

Une première condition est que le noyau sur lequel on enroule le fil soit bien cylindrique : on s'en assure à l'aide d'un compas d'épaisseur ou d'un comparateur de construction convenable. Le cadre est ordinairement en bois ou en métal. Les cadres en métal peuvent être le siège de courants induits qui nuisent beaucoup dans les expériences à courants variables ; on atténue les effets d'induction en interrompant la continuité de la masse métallique par une section faite suivant un plan diamétral et dans laquelle on intercale une lame isolante d'ivoire ou d'ébonite. Les cadres en bois ont l'inconvénient de pouvoir se déformer avec le temps ; mais si on emploie un bois sec et dur, comme l'acajou imprégné de paraffine à chaud, surtout si l'on a soin de tourner le cadre dans un bloc formé par l'assemblage d'un grand nombre de morceaux collés ensemble et différemment orientés par rapport aux fibres, on obtient des cadres dans lesquels les déformations sont tout à fait négligeables.

Si le fil, avec son enveloppe isolante, a un diamètre bien constant, un enroulement fait avec soin donne facilement des spires équidistantes. Les couches successives sont habituellement séparées par une lame isolante, telle qu'une ou plusieurs feuilles de papier paraffiné. L'emploi d'un compte-tours permet de connaître le nombre des spires pendant l'enroulement, et il est bon de vérifier ce nombre avant que la couche ne soit recouverte. Comme les spires des couches successives ont des inclinaisons de sens contraires, on compense cette irrégularité par un nombre pair de couches.

On détermine la longueur du fil, soit directement, soit par la mesure du diamètre de la bobine avant et après l'enroulement de la couche, soit par les deux circonférences correspondantes. Un ruban en métal, enroulé sur la bobine, permet aussi de mesurer la circonférence avec une grande approximation; on peut admettre, en effet, que la ligne moyenne du ruban conserve la même longueur, malgré la courbure, de sorte que la longueur observée correspond au rayon du cylindre, augmenté de la demi-épaisseur du ruban.

Toutefois, si la bobine renferme plusieurs couches séparées par une matière isolante, les mesures faites avant et après l'enroulement d'une couche ne donnent pas une valeur exacte du diamètre moyen, parce que la pression des fils produit un écrasement de la matière isolante.

D'un autre côté, on ne peut pas, sans précautions spéciales, déduire la longueur du fil d'une mesure faite avant l'enroulement sur une base rectiligne, parce que le fil s'allonge d'une manière variable pendant l'enroulement, surtout à cause de la tension qu'on est obligé de lui faire subir pour obtenir des couches régulières. L'allongement des fils de cuivre un peu fins peut aller jusqu'à 5 ou 6 p. 100; il est moindre pour les fils plus gros. Si on veut mesurer le fil avant l'enroulement, il est donc nécessaire de lui donner la tension qu'il aura pendant l'opération : le changement de longueur dû au fait même de l'enroulement est négligeable si le rayon de courbure est très grand par rapport au diamètre du fil.

Toutes les formules relatives aux bobines supposent que le courant est réparti d'une manière uniforme dans chaque section des conducteurs ou, ce qui revient au même, que le

courant peut être considéré comme concentré sur l'axe même du fil. Cette hypothèse n'est pas toujours suffisante, surtout avec les courants variables (**462**); le calcul ne donnera donc qu'une première approximation et l'erreur n'est pas négligeable avec des fils un peu gros.

Enfin une condition évidente, mais que l'expérience montre souvent en défaut, est que les différentes spires soient parfaitement isolées les unes des autres. Pour vérifier l'isolation d'une bobine, lord Rayleigh [1] l'interpose avec ses deux bouts isolés entre les deux bobines d'une balance d'induction (**687**). Le silence est rompu dès qu'il existe quelque communication entre les spires.

757. **Comparaison des champs.** — Sans avoir recours aux méthodes générales sur lesquelles on reviendra plus loin, les expériences de comparaison exigent des procédés rapides, sans qu'il soit nécessaire d'employer des courants constants ni de connaître leurs intensités.

Certains phénomènes, comme la rotation du plan de polarisation dans un milieu, ne dépendent que de la différence des potentiels magnétiques aux extrémités du chemin suivi par le rayon. Dans le cas d'une bobine, cette différence se déterminera par les couches magnétiques des deux bases (**565**). Pour éviter les calculs de correction, M. Lippmann [2] propose d'employer trois bobines identiques A, B et C, disposées de la même manière suivant les côtés d'un triangle B′C′A′. Les bobines ayant N spires, l'intégrale des actions magnétiques de l'une d'elles sur un circuit fermé qui la traverse, en particulier sur le contour du triangle A′B′C′, est $4\pi NI$; le total est $3.4\pi NI$ et l'intégrale relative à l'un des côtés, c'est-à-dire la différence des potentiels aux extrémités, est $4\pi NI$. Il n'est même pas nécessaire que l'enroulement soit régulier, pourvu qu'il soit le même sur les trois bobines. La propriété s'étend évidemment au cas d'un polygone régulier.

La direction du champ en un point P s'obtiendra en y plaçant une aiguille aimantée de dimensions très petites, soumise en même temps à l'action d'un champ extérieur tel que le champ terrestre, et en faisant tourner la bobine autour de ce

(1) Lord Rayleigh et Mrs Sidgwick, *Phil. Tr. R. S. L.*; 1884, p. 119.
(2) G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. C, p. 553; 1885.

point P jusqu'à ce que le passage d'un courant dans la bobine ou son inversion ne produise aucun effet. L'axe magnétique de l'aiguille donne alors la direction cherchée.

Les spectres magnétiques fournissent souvent des indications précieuses; les éléments successifs de la limaille de fer dessinent les lignes de force et donnent une idée immédiate de la forme et de l'intensité du champ.

Le rapport des champs G et G′ par unité de courant, pour deux bobines B et B′, s'obtiendra comme dans la comparaison de deux galvanomètres (639). Les bobines sont placées de manière que les directions de G et G′, aux points correspondants P et P′, soient sensiblement perpendiculaires aux champs extérieurs, ou du moins que leurs projections X et X′ sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation des aiguilles soient perpendiculaires aux projections H et H′ des champs extérieurs, et on place en ces points des aiguilles de dimensions très petites.

Les déviations δ et δ', corrigées de la graduation, produites par un même courant qui traverse successivement les deux bobines, donnent

$$\frac{X}{X'} = \frac{H}{H'}\frac{\delta}{\delta'}.$$

Les valeurs de H et de H′ sont égales si la même aiguille est employée dans les deux cas.

Supposons, d'une manière plus générale, que l'on fasse agir en même temps sur une aiguille les deux bobines, parcourues respectivement par les courants I et I′. Si les déviations réduites sont δ et δ_1, suivant que les actions des courants sont de même sens ou de sens contraires, on en déduit

$$H\delta = XI + X'I', \qquad H\delta_1 = XI - X'I';$$

$$\frac{X'}{X} = \frac{I}{I'}\cdot\frac{\delta - \delta_1}{\delta + \delta_1}.$$

Il est clair que l'on peut utiliser le même courant $I = I'$ dans les deux circuits.

Si les bobines sont montées en dérivation, les courants I

et I′ sont en raison inverse des résistances g et g' des branches correspondantes, et l'on a

$$\frac{X'}{X} = \frac{g'}{g} \cdot \frac{\delta - \delta_1}{\delta + \delta_1}.$$

On peut alors modifier ces résistances de manière que la déviation δ_1 soit nulle, auquel cas les champs X et X′ sont proportionnels aux résistances g et g'.

Si la bobine de comparaison B est une boussole des tangentes de dimensions connues, qui permette de calculer X, on en déduira la valeur de X′.

Lorsque l'aiguille n'est pas infiniment petite par rapport à sa distance aux spires que traverse le courant, les valeurs des composantes X et X′, dont le rapport est déterminé par l'expérience, ne sont pas exactement celles qui correspondent au centre de l'aiguille. On doit alors leur faire subir une correction particulière (**574**).

Sur l'axe d'une bobine cylindrique de n spires par unité de longueur, la valeur du champ en un point P peut s'écrire

$$X = 4\pi n(1 + \alpha).$$

Le terme de correction α serait nul pour une bobine indéfinie ; une série d'observations convenablement dirigées permet encore de le déterminer par expérience (**707**).

On mesure d'abord la déviation δ produite par un courant I sur une aiguille située au point P ; on amène ensuite la bobine sur le prolongement de sa première position et la déviation produite par le même courant est δ_1. La même opération est encore répétée successivement des deux côtés, jusqu'à ce que l'action soit inappréciable ; on obtiendra ainsi une série de valeurs $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \ldots$. La somme des déviations est la même que si la bobine avait une longueur indéfinie, et le champ serait alors proportionnel à $\delta + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta'_1 + \delta'_2 + \ldots$. Il en résulte que la valeur α du terme de correction relatif à la première expérience a pour expression

$$\alpha = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta'_1 + \delta'_2 + \ldots}{\delta}.$$

758. Rapport des surfaces. — La surface électrodynamique S d'une bobine de N spires, ou son moment magnétique pour l'unité de courant, a pour valeur, dans le cas d'une bobine à gorge rectangulaire de rayon moyen a (**558**),

$$S = N\pi a_1^2 = N\pi a^2\left(1 + \frac{c^2}{3a^2} - \frac{1}{12n_2^2a^2}\right) = N\pi a^2(1+\varepsilon).$$

D'autre part, la composante X du champ en un point P de l'axe, à une grande distance x par rapport au rayon moyen, peut se mettre sous la forme (**571**, 2°)

$$X = \frac{2N\pi a^2}{x^3}(1+\xi) = \frac{2S}{x^3}\cdot\frac{1+\xi}{1+\varepsilon},$$

la quantité ξ étant un terme de correction qui dépend de la distance x et des dimensions de la gorge.

Pour un cercle unique, de rayon a', parallèle au plan moyen de la bobine et dont le centre est au point P, on a

$$X' = \frac{2\pi}{a'}.$$

La comparaison des champs X et X' [1] donnera la surface S par la relation

$$S = \frac{X}{X'}\cdot\frac{\pi x^3}{a'}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\xi}.$$

Cette méthode présente l'inconvénient d'exiger une mesure très exacte de la distance x, qui entre au cube dans le facteur principal. On pourrait éviter la difficulté par deux observations faites à des distances différentes x et x', anquel cas le déplacement $x'-x$ de la bobine peut être déterminé avec une grande exactitude, mais les erreurs expérimentales prennent alors beaucoup plus d'importance.

Si on porte l'aiguille de l'autre côté du cadre, à peu près à la même distance du milieu, la moyenne des résultats ob-

[1] F. Kohlrausch, *Nachr. von der K. G. der W. zu Göt.*, n° 20, p. 654; 1882.

tenus de part et d'autre correspond sensiblement à la demi-distance des deux positions de l'aiguille, mais l'expérience est alors très compliquée, parce qu'on doit aussi déplacer la lunette et l'échelle qui servent aux lectures.

Il vaut mieux éliminer toutes ces mesures de distance. Si les deux bobines dont on veut comparer les surfaces S et S′ peuvent être disposées concentriquement, les axes en coïncidence, le rapport des champs X et X′ déterminés par la même aiguille donne alors

$$\frac{X}{X'} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{1+\xi}{1+\xi'} \cdot \frac{1+\varepsilon'}{1+\varepsilon}.$$

La distance de l'aiguille au centre des bobines n'intervient alors que dans les termes de correction et peut être facilement déterminée avec une approximation suffisante. La méthode est particulièrement précise lorsque les surfaces à comparer sont voisines l'une de l'autre.

Pour éliminer le défaut de centrage des bobines, il suffit de les monter ensemble sur un châssis qui puisse tourner autour d'un axe vertical et de répéter plusieurs séries d'expériences en tournant le système de 180°.

Dans ce cas, il n'est même plus nécessaire que les bobines aient des rayons différents, de manière à être introduites l'une dans l'autre; si la distance de l'aiguille est assez grande, on peut les placer de part et d'autre de l'axe : la moyenne des résultats obtenus pour les deux positions donne très sensiblement le rapport exact des surfaces.

Le rapport des surfaces de deux bobines s'obtiendra aussi par le rapport des décharges induites sous l'action d'un même champ extérieur.

Pour utiliser le champ terrestre, on monte les deux bobines sur un même axe, leurs surfaces étant parallèles, et on fait tourner brusquement le système d'un angle déterminé entre deux butoirs, par exemple de 180° autour d'un axe vertical à partir d'une position perpendiculaire au méridien, ou autour d'un axe horizontal à partir du plan horizontal.

Les variations φ et φ' des flux de force qui traversent les deux circuits sont, dans tous les cas, proportionnelles à leurs surfaces S et S′.

Au lieu de faire tourner le système des bobines, on peut le laisser immobile et changer la direction du champ. Il suffit, pour cela, que le champ soit produit par un courant extérieur dont on renverse le sens. Le rapport des flux de force est alors égal au rapport des surfaces multiplié par le rapport des champs moyens. Si les bobines ont des diamètres différents, les corrections relatives au calcul des champs moyens sont assez complexes, même dans le cas où les bobines induites seraient situées dans le plan du courant inducteur. Il vaut mieux alors employer comme circuit inducteur un système à plusieurs cadres de grandes dimensions (576 à 578), de manière à constituer un champ sensiblement uniforme.

Quel que soit le mode d'opérer, le problème se trouve ainsi ramené à la comparaison de deux flux de force φ et φ'.

Une première méthode consiste à réunir les deux bobines de manière que les surfaces s'ajoutent, puis agissent en sens contraires, en déterminant les impulsions réduites correspondantes α et α' d'un galvanomètre balistique. La résistance du circuit étant invariable, on a alors

$$\frac{\varphi+\varphi'}{\alpha}=\frac{\varphi-\varphi'}{\alpha'}=\frac{2\varphi}{\alpha+\alpha'}=\frac{2\varphi'}{\alpha-\alpha'};$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{\varphi}{\varphi'}=\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha-\alpha'}.$$

L'exactitude des mesures ne serait pas très grande, en général, surtout avec les cadres mobiles, à moins que la seconde impulsion α' ne soit très petite par rapport à la première ; ce serait le cas de surfaces presque égales.

On réalise cette condition par l'emploi de bobines auxiliaires à surfaces graduées. Les bobines B et B′ étant placées dans le même circuit, de façon que leurs flux de force soient de sens contraires, on ajoute à la bobine B, par exemple, des surfaces s_1 et s_2, telles que les impulsions correspondantes α_1 et α_2 du galvanomètre balistique aient les moindres valeurs en sens opposés ; il en résulte

$$\frac{S'-S-s_1}{S+s_2-S'}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \qquad S'=S+\frac{s_1\alpha_2+s_2\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Cette méthode d'opposition rend l'expérience beaucoup plus précise, parce qu'il est facile de multiplier les impulsions, en permutant d'une manière convenable les courants induits, et de mettre ainsi en évidence des déviations trop faibles pour être observées directement.

Enfin le galvanomètre différentiel donnerait, par la mesure des résistances, une méthode d'équilibre. Les bobines B et B′ étant reliées séparément aux deux cadres, on règle les résistances totales R et R′ des circuits correspondants de manière que l'aiguille reste au zéro par l'opposition des effets dus aux deux décharges q et q'. Lorsque le galvanomètre est réglé, ces décharges sont égales et l'on a

$$\frac{S}{S'} = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{qR}{q'R'} = \frac{R}{R'}.$$

Si le défaut de réglage du galvanomètre est très faible, on l'éliminera d'une manière suffisante en permutant la liaison des bobines aux cadres; l'équilibre ayant lieu pour des résistances R_1 et R'_1, on aura sensiblement

$$\frac{S}{S'} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R'} + \frac{R'_1}{R_1}\right).$$

L'emploi du galvanomètre différentiel n'est tout à fait satisfaisant qu'avec les bobines presque identiques par leurs formes et leurs dimensions; il n'en est plus de même si les modes d'enroulement ou les diamètres diffèrent beaucoup. Dans ce cas, les deux décharges n'ayant pas la même durée, l'aiguille reçoit des impulsions distinctes de natures différentes, de même sens ou de sens contraires, et il est impossible d'obtenir un état d'équilibre; si elle reste finalement au repos, elle n'a pas été immobile pendant l'opération.

759. **Coefficients d'induction mutuelle.** — Considérons deux bobines A et a dont le coefficient d'induction mutuelle est M. La première est placée sur le trajet d'un courant inducteur I, la seconde sur un circuit de résistance r qui renferme le galvanomètre balistique. Pour chaque établissement ou suppression du courant inducteur, la décharge induite q est

$$rq = MI.$$

Les mesures de I et q donneront la valeur de M en fonction de la résistance r.

M. Abraham [1] équilibre au galvanomètre différentiel une dérivation du courant primaire et le courant moyen obtenu par une série de décharges induites.

Les deux pôles de la pile sont reliés, d'une part à la bobine inductrice A et, d'autre part, à l'un des cadres B′ du galvanomètre. Si R et R′ sont les résistances totales des deux circuits, les valeurs correspondantes I et I′ des courants permanents satisfont à la relation

$$E = IR = I'R'.$$

La bobine induite a est reliée au second cadre B par un circuit de résistance r.

Un commutateur tournant exécute une série d'opérations dans l'ordre suivant : fermeture de l'induit, puis de l'inducteur; ouverture de l'induit, puis de l'inducteur. De cette manière, le cadre B ne reçoit que le courant induit de fermeture ; il est bon de mettre ce cadre en court circuit pendant le courant induit direct, pour éliminer l'influence des effets thermoélectriques presque inévitables.

Les contacts se reproduisant n fois par seconde, le courant moyen d'induction est

$$i = nq = n\frac{MI}{r} = n\frac{M}{r}\cdot\frac{R'}{R}I'.$$

Lorsque l'équilibre est établi, avec un galvanomètre réglé, les courants i et I′ sont égaux ; il en résulte

$$M = \frac{1}{n}\frac{Rr}{R'}.$$

On peut craindre qu'à la fermeture du circuit, l'induction ne modifie le courant I′, mais il est facile d'éviter cette cause d'erreur en donnant à la résistance R′ une valeur considérable par rapport à celle de la pile ; la dérivation de l'extra-courant est alors négligeable.

[1] H. Abraham, *Journ. de Phys.* [3], t. III, p. 145; 1894.

Le commutateur était commandé par une machine Gramme et la période comparée par un procédé stroboscopique à celle d'un diapason. La méthode paraît fournir des résultats concordants à moins de $\frac{1}{2000}$ et l'expérience montre que les coefficients d'induction mutuelle ne changent pas, pour des bobines de mêmes dimensions, quand on remplace le fil de cuivre par un fil de fer.

760. Mesure par les capacités. — On a vu déjà (744) que les décharges induites simples ou répétées permettent d'évaluer un coefficient d'induction mutuelle par une combinaison de résistances et de capacités.

Supposons qu'on installe en dérivation, sur la résistance R d'un circuit parcouru par le courant I_1, un condensateur de capacité C dans le trajet duquel se trouve un galvanomètre balistique. La charge ou la décharge du condensateur est $q_1 = CRI_1$. En comparant cette quantité par le même galvanomètre avec celle que donne l'induction du courant I entre les bobines A et a_1 il en résulte

$$\frac{q_1}{q} = \frac{CRrI_1}{MI}, \qquad M = \frac{q}{q_1} \cdot \frac{I_1}{I} \cdot CRr.$$

Si la résistance R est réglée de manière que les impulsions soient égales dans les deux cas, avec le même courant primaire, il reste simplement $M = CRr$.

Les deux opérations pourraient être faites simultanément par un galvanomètre différentiel, où les décharges q_1 et q seraient équilibrées, mais les courants temporaires n'ont pas exactement la même forme et il serait difficile d'obtenir le repos absolu de l'aiguille.

M. Foster [1] établit une compensation entre les décharges. Soient P et P′ les extrémités de la résistance R. Le point P est relié à l'une des armatures B du condensateur, l'autre armature B′ communiquant au point P par le galvanomètre ; le fil secondaire de résistance r, qui comprend la bobine a, est en dérivation sur les points B′ et P′.

Quand le régime permanent est établi, la charge du con-

[1] C. G. Foster, *Phil. Mag.* [5], t. XXIII, p. 121; 1887.

densateur est $q = \mathrm{CRI}$. Si le courant moyen du galvanomètre est nul pendant la période variable, le condensateur ne reçoit finalement que la décharge induite, pour laquelle l'induction propre du circuit n'intervient pas ; il en résulte

$$rq = M\mathrm{I}, \qquad M = \mathrm{CR}\,r.$$

Lorsque l'appareil n'est pas réglé, une partie q' de la charge du condensateur passe par le galvanomètre et une autre q par le fil secondaire :

$$q' + q = \mathrm{CRI}.$$

En appelant E la force électromotrice de la pile, $\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}$ la résistance du circuit primaire et g celle de la branche galvanométrique, l'induction totale dans le circuit formé par le galvanomètre et le fil secondaire donne

$$rq - gq' = M\mathrm{I} = M\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}},$$

$$(r+g)\,q' = (\mathrm{CR}\,r - M)\mathrm{I} = (\mathrm{CR}\,r - M)\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}}.$$

La méthode est d'autant plus sensible que, pour une valeur donnée de l'erreur de réglage $\mathrm{CR}\,r - M$, la décharge q' est plus grande, c'est-à-dire que la quantité $(r+g)(\mathrm{R}_0 + \mathrm{R})$ doit être minimum. Comme le produit $\mathrm{R}\,r$ est constant et que les résistances R_0 et g sont pratiquement déterminées par construction, il en résulte

$$\mathrm{R}\,dr + r\,d\mathrm{R} = 0, \qquad (\mathrm{R}_0 + \mathrm{R})\,dr + (r+g)\,d\mathrm{R} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}}{g + r} = \frac{\mathrm{R}_0}{g}.$$

L'erreur relative des mesures du coefficient M peut alors être inférieure à un millième.

On doit remarquer toutefois que, pour un appareil réglé, le courant i' du galvanomètre n'est pas nul à chaque instant, de sorte que l'aiguille ne reste pas absolument immobile.

Soient, pendant la période variable, I le courant inducteur,

I′ et i ceux qui traversent la résistance R et le fil secondaire. Si l'équilibre a lieu à chaque instant, on a $i = \mathrm{I} - \mathrm{I}'$ et l'équation différentielle relative au circuit formé par le galvanomètre et le fil secondaire se réduit à

$$ri = M\frac{d\mathrm{I}}{dt} - L\frac{di}{dt} = (M - L)\frac{d\mathrm{I}}{dt} + L\frac{d\mathrm{I}'}{dt}.$$

La charge du condensateur est égale, d'une part, à CRI′, puisque les points B′ et P′ restent au même potentiel, et d'autre part à l'intégrale de idt; il en résulte

$$\mathrm{CR}\,r\,\mathrm{I}' = r\int i\,dt = (M - L)\mathrm{I} + L\mathrm{I}',$$

ou, en remplaçant CRr par sa valeur M,

$$(M - L)\mathrm{I}' = (M - L)\mathrm{I}.$$

Cette condition n'est satisfaite pour le régime variable que si $M = L$. Dans ce cas particulier, le courant i' serait toujours nul pour l'établissement ou la rupture du courant primaire; on peut alors faire les opérations par une lame vibrante et remplacer le galvanomètre par un téléphone.

761. Coefficients de self-induction. — Quand on représente par $L\mathrm{I}$ le flux d'induction du courant I dans son circuit, on suppose implicitement que le coefficient L est une constante; mais l'expérience donne en réalité le produit $L\mathrm{I}$ et la valeur de L peut être, comme dans le cas des électro-aimants, une fonction du courant I correspondant.

L'expérience de Faraday (386) relative aux extra-courants permet déjà d'obtenir des résultats très approchés. Le courant d'une pile est partagé par dérivation entre deux conducteurs, l'un de résistance r' sans induction propre, l'autre de résistance r et de coefficient L, qui renferme le galvanomètre. A la rupture du circuit principal, la décharge induite est

$$q(r + r') = Li.$$

Si le rapport des résistances r et r' est assez grand pour

que la déviation δ relative au courant i soit très faible, l'impulsion nouvelle α due à la décharge q reste à peu près la même que si l'aiguille partait du repos ; la mesure des angles δ et α donne alors

$$L = \frac{1}{r+r'} \cdot \frac{q}{i} = \frac{\tau}{\pi(r+r')} \cdot \frac{\alpha}{\delta}.$$

Supposons encore que les résistances r' et r soient situées, dans un même circuit, sur le trajet d'un courant alternatif [1] ; les carrés de leurs impédances r'^2 et $r^2 + L^2\omega^2$ sont proportionnels aux carrés correspondants des forces électromotrices efficaces. Si donc on fait communiquer successivement les extrémités de ces résistances r et r' avec un électromètre disposé de manière à mesurer la moyenne des carrés des différences de potentiel (637), les déviations θ et θ' de l'aiguille donnent

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{r^2 + L^2\omega^2}{r'^2}, \qquad L^2\omega^2 = r'^2\frac{\theta}{\theta'} - r^2.$$

La formule des oscillations électriques (399), réduite à son terme principal $T^2 = 4\pi^2 CL$, fournit encore, entre les différentes quantités T, C et L, une relation qui peut être utilisée et sur laquelle nous reviendrons plus loin.

762. Emploi du pont de Wheatstone. — Les résistances du pont étant équilibrées par les courants permanents, supposons que les branches a, b et b' soient sans induction propre, que la branche a' renferme une bobine de coefficient L, et qu'on installe un condensateur F (fig. 230) de capacité C en dérivation sur les extrémités de la branche b. L'aiguille du galvanomètre ne peut rester au zéro, quand on ouvre ou ferme le circuit de la pile par la clef K, que si les extrémités de la diagonale CD sont toujours au même potentiel.

Lorsque cette condition est remplie, si on désigne par V la différence de potentiel des armatures du condensateur pendant la période variable, on a d'abord

$$a\alpha = a'\alpha' + L\frac{d\alpha'}{dt}, \qquad b\beta = b'\beta' = V.$$

[1] J. Joubert, *Ann. de l'Éc. Norm.*, *Sup.* [2], t. X, p. 531; 1881.

Puisque aucune partie du courant ne traverse la diagonale du galvanomètre, on a aussi

$$\alpha' = \beta' \qquad \text{et} \qquad C\frac{dV}{dt} = \alpha - \beta.$$

L'élimination des quantités α, β, β' et V entre ces équations donne, en tenant compte de l'équilibre des résistances,

$$\left(Cb' - \frac{L}{a}\right)\frac{d\alpha'}{dt} = \alpha'\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right) = 0,$$

$$L = Cb'a.$$

Le réglage ne peut se faire que par tâtonnements; il exige

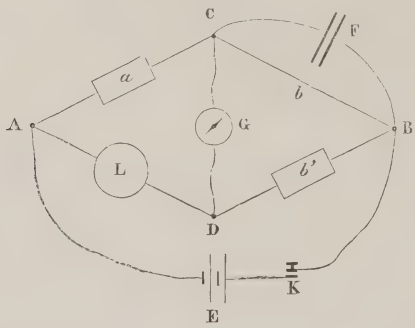


Fig. 230.

que l'on modifie trois résistances, dont deux a et b' seront à déterminer par des boîtes étalonnées.

Une autre méthode consiste à mesurer la décharge q induite dans le galvanomètre (674) par l'établissement du courant principal. Si la branche b est la seule qui renferme un coefficient L d'induction propre, on a

$$Mq = a\int\frac{d(L\beta)}{dt}\,dt = aL\beta_0,$$

$$M = b(a+a') + r(a+b) = a(b+b') + r(a+b),$$

$$L = \frac{Mq}{a\beta_0} = \frac{q}{\beta_0}\left[b + b' + r\left(\frac{b}{a}\right) + 1\right].$$

La décharge q et le courant β_0 n'étant pas mesurés par le même galvanomètre, il sera nécessaire de comparer les deux instruments ; la valeur de q peut encore être déterminée par comparaison avec celle que produit la rotation d'un cadre dans le champ terrestre.

On remplacerait aussi la mesure du courant β_0 par celle du courant principal I_0, en utilisant la relation

$$\beta_0 = E\frac{a'}{N} = I_0\frac{a'}{a+a'}.$$

Au lieu d'établir ou de rompre le courant principal, il est préférable de le renverser par un commutateur à bascule. La décharge est alors doublée ; en outre, la pile restant fermée, sauf pendant le temps très court de l'inversion, on est mieux assuré que la force électromotrice E ne change pas. Les plus grandes difficultés de la méthode tiennent, en effet, aux variations du courant principal.

Une modification de l'expérience permet de faire toutes les mesures par le galvanomètre du pont [1]. Si l'on ajoute à la résistance b une petite quantité ε, le courant permanent dans le galvanomètre devient (673)

$$i = E\frac{a'(b+\varepsilon) - ab'}{\Delta} = E\frac{a'\varepsilon}{\Delta}.$$

Comme le rapport des résistances n'est pas sensiblement modifié, on peut remplacer Δ par sa valeur approchée $\frac{MN}{a}$ qui correspond à l'équilibre du pont et écrire cette équation sous la forme plus simple

$$i = E\frac{aa'}{MN}\varepsilon = \frac{a}{M}\beta_0\varepsilon.$$

Si α est l'impulsion produite par la décharge q et δ la déviation due au courant i, on a donc

$$L = \varepsilon\frac{q}{i} = \frac{\tau}{\pi}\frac{\alpha}{\delta}\varepsilon.$$

[1] Lord Rayleigh, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1882, p. 677.

Dans ce cas, M. Abraham équilibre encore le courant moyen d'une série de décharges par le galvanomètre différentiel.

L'un des cadres est situé sur la diagonale r du pont; l'autre cadre est relié à la pile par une résistance R′ et reçoit un courant I′. Le commutateur tournant fonctionne de la même manière que précédemment (759) sur le circuit principal et sur la diagonale r; on règle alors la résistance R′ de manière que l'aiguille du galvanomètre reste immobile. Le commutateur est ensuite arrêté et on détermine la résistance x qu'il faut ajouter à la branche b pour reproduire à l'état permanent le même courant d'équilibre $i = \mathrm{I}'$.

On a d'abord

$$i = nq = nL\frac{a}{\mathrm{M}}\beta_0 = nL\mathrm{E}\frac{aa}{\mathrm{MN}}.$$

D'autre part, le courant permanent produit par la variation de résistance x est $i' = \mathrm{E}\frac{a'x}{\Delta}$, le dénominateur Δ étant une fonction de $b + x$; il en résulte

$$nL = \frac{\mathrm{MN}}{a\Delta}x.$$

Lorsque le pont est symétrique, $a = a'$ et $b = b'$, les différents facteurs deviennent

$$\mathrm{M} = 2ab + r(a+b), \qquad \mathrm{N} = a(2\mathrm{R} + a + b),$$

$$\Delta = \Delta_0 + x[2ab + r(a+b) + \mathrm{R}r + a(2\mathrm{R} + a)];$$

$$\frac{a\Delta}{\mathrm{MN}} = 1 + x\frac{2ab + r(a+b) + \mathrm{R}r + a(2\mathrm{R}+a)}{[2ab + r(a+b)](2\mathrm{R} + a + b)}.$$

Le dernier terme est très petit si les résistances R et a sont très grandes, de l'ordre de 1000 ohms par exemple, la résistance b de 50 à 200 ohms, et la valeur de x voisine d'un ohm. On a donc, d'une manière approchée, $nL = x$.

Il est nécessaire que les conditions d'équilibre soient réglées avec une grande précision et on doit se mettre en garde contre les effets thermoélectriques, ce qui oblige à opérer très

rapidement. Avec un pont à corde sensible au dix-millième d'ohm, on arrive à une approximation de même ordre que pour les coefficients d'induction mutuelle.

763. Comparaison des coefficients M. — Considérons deux groupes de bobines A et a, A′ et a', dont les coefficients d'induction mutuelle sont M et M', ces groupes étant assez éloignés l'un de l'autre pour que leur influence mutuelle soit négligeable. Les bobines A et A′ sont placées en dérivation sur deux points réunis aux pôles de la pile; les résistances des circuits respectifs étant R et R′, les courants permanents I et I′ satisfont à la relation $IR = I'R'$. Les bobines a et a' sont situées sur le trajet d'un circuit qui renferme un galvanomètre et les jonctions établies de manière que les deux courants induits soient de signes contraires.

Si les résistances sont réglées de manière que le galvanomètre reste au zéro, quand on ouvre ou ferme la pile, il en résulte $MI = M'I'$ et, par suite,

$$\frac{M}{M'} = \frac{R}{R'}.$$

L'aiguille n'est encore absolument immobile que si les deux décharges q et q', relatives aux bobines a et a', sont simultanées et de même forme.

Un commutateur tournant permettrait aussi de répéter les décharges induites d'ouverture ou de fermeture; dans ce cas, le courant moyen ne serait nul que si la somme algébrique des décharges était rigoureusement nulle.

On peut enfin réunir séparément les bobines a et a', par des résistances totales r et r', aux deux cadres d'un galvanomètre différentiel. Les décharges q et q' sont alors

$$qr = MI, \qquad q'r' = M'I'.$$

Si l'équilibre est établi, soit pour les ruptures et fermetures du courant principal, soit pour les courants moyens produits par un commutateur tournant, il en résulte $q = q'$ et

$$\frac{M}{M'} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{I'}{I} = \frac{Rr}{R'r'}.$$

Une autre disposition consiste à mettre les deux bobines A et A′ sur le trajet du courant principal; les circuits a et a' sont réunis par un galvanomètre et les communications établies de manière que les décharges q et q' soient successivement de même sens ou de sens contraire. La résistance totale $r + r'$ du circuit secondaire étant invariable, les impulsions α et α' relatives aux deux modes de jonction donnent

$$\frac{M + M'}{\alpha} = \frac{M - M'}{\alpha'}, \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha - \alpha'}.$$

En joignant les bobines a et a' aux deux cadres d'un galvanomètre différentiel et réglant les résistances r et r' de manière à annuler l'impulsion d'une décharge unique, ou l'action résultante due aux courants moyens réglés par un commutateur tournant, on aura aussi

$$\frac{M}{M'} = \frac{qr}{q'r'} = \frac{r}{r'}.$$

Il est toujours préférable d'avoir recours à des expériences de compensation. Dans la méthode indiquée par Maxwell [1], le circuit inducteur comprend les bobines A et A′ (fig. 231);

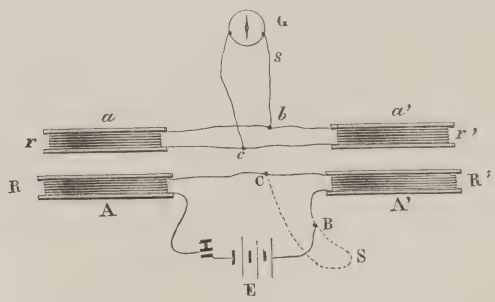


Fig. 231.

les bobines a et a' sont réunies de manière que les courants induits de part et d'autre s'ajoutent, et on intercale le galvanomètre entre deux points b et c du circuit induit, par une

[1] Maxwell, *Electr. and Magn.*, t. II, p. 355.

dérivation de résistance s. Les décharges induites q et q' dans les deux bobines, par l'établissement ou la suppression du courant I, se partagent en dérivation comme les courants continus (385). La quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre est alors $q' - q$ et l'on a

$$M'\mathrm{I} = r'q' + s(q' - q), \qquad M\mathrm{I} = rq - s(q' - q).$$

Si on ajuste les résistances r et r' des bobines a et a', comptées jusqu'à la dérivation, de manière que l'aiguille reste immobile au moment de la fermeture ou de l'ouverture du circuit inducteur, il en résulte $q' = q$ et, par suite,

$$\frac{M}{M'} = \frac{r}{r'}.$$

M. Brillouin [1] réunit les bobines a et a', de manière que les courants induits soient opposés, et place une dérivation de résistance s entre deux points b et c du circuit secondaire; le galvanomètre, de résistance g, est intercalé sur le circuit d'une des bobines induites, par exemple a'. Dans ce cas, les décharges sont déterminées par les équations

$$M\mathrm{I} = qr + (q + q')s, \qquad M'\mathrm{I} = q'(r' + g) + (q + q')s.$$

La résistance étant réglée de façon que la décharge q' dans le galvanomètre soit nulle, il reste

$$\frac{M}{M'} = \frac{r + s}{s}.$$

Comme le cofficient M doit être plus grand que M', il faut que le galvanomètre soit dans le circuit de la bobine pour laquelle l'induction est plus faible.

Les bobines a et a' étant toujours réunies de manière que leurs courants soient opposés et le galvanomètre intercalé dans le circuit secondaire, on peut enfin placer une dérivation S entre deux points B et C du circuit inducteur (fig. 231), par

[1] M. Brillouin, *Ann. de l'Écol. Norm. Sup.* [2], t. XI, p. 352; 1882.

exemple du côté de la bobine A'. On a alors, en appelant I et I' les courants dans les bobines A et A',

$$(r+r'+g)q = M'\mathrm{I}' - M\mathrm{I}.$$

On règle la résistance S de manière que la décharge q dans le galvanomètre soit nulle. En tenant compte de la relation $\mathrm{S}(\mathrm{I}-\mathrm{I}') = \mathrm{R}'\mathrm{I}'$ des courants permanents, on en déduit

$$\frac{M}{M'} = \frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}'+\mathrm{S}}.$$

Dans ce cas, il faut que la dérivation soit placée du côté de la bobine dont l'induction est la plus grande.

Ces différentes méthodes ramènent la comparaison des coefficients d'induction à celle des résistances. On remédie aux défauts de sensibilité soit en multipliant les décharges réglées en concordance avec les oscillations de l'aiguille, soit par un commutateur tournant.

Quand on introduit dans le calcul les résistances du circuit inducteur, il est plus difficile de les connaître exactement, à cause de l'échauffement produit par le courant.

On peut encore remarquer, à propos de la dernière méthode, que, pendant tout le temps de l'établissement ou de la cessation du courant inducteur, le courant induit conserve le même sens ; les éléments de la décharge q sont tous de même signe. Si la décharge est nulle, il faut que chacun de ces éléments soit nul; les courants induits sont donc, à chaque instant, égaux et de signes contraires et on pourrait avec avantage se servir du téléphone pour constater l'équilibre.

764. **Comparaison des coefficients** L. — L'emploi du pont de Wheatstone permet encore d'opérer par compensation [1].

Lorsque les quatre branches n'ont pas d'induction mutuelle, l'équilibre relatif aux courants variables exige que l'on ait, outre la condition des courants permanents (674),

$$\frac{L_a}{a} - \frac{L_b}{b} = \frac{L_{a'}}{a'} - \frac{L_{b'}}{b'}.$$

[1] Maxwell, *Electr. and Mag.*, t. II, p. 317 et 356.

Pour utiliser cette propriété, on place les deux bobines à comparer dans les branches a et a', par exemple, les autres branches étant supposées sans induction propre. L'équilibre complet donne alors

$$\frac{L_a}{L_{a'}} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Deux boîtes de résistance sans induction sont nécessaires ; l'une est placée sur les branches a ou a', l'autre sur b ou b'. L'expérience est longue, parce qu'on doit réaliser d'abord l'équilibre des courants permanents et chercher ensuite l'effet des interruptions du courant principal ; comme les deux espèces de conditions sont indépendantes, le résultat final ne peut être atteint qu'après une série de tâtonnements.

M. Abraham a montré aussi que le téléphone donne d'excellents résultats dans le cas actuel, surtout si les coefficients ont des valeurs très faibles.

La condition qui définit le minimum de bruit par rapport à la branche b' se réduit alors à

$$a(ba' - ab') = \omega^2 L_a(b' L_a - b L_{a'}).$$

La résistance b' étant ainsi réglée, on détermine la valeur $b' + x$ qui correspond à l'équilibre des courants continus. En appelant $b' + y$ celle qui annulerait le second membre de l'équation précédente, il en résulte

$$ba' - ab' = ba' - a(b' + x) + ax = ax,$$
$$b' L_a - b L_{a'} = (b' + y) L_a - b L_{a'} - y L_a = - y L_a,$$
$$a^2 x = - \omega^2 L_a^2 y.$$

Le terme de correction y est d'autant plus petit que la fréquence des courants alternatifs utilisés est plus grande. Connaissant cette fréquence ou la hauteur du son et une valeur approchée de L_a, on en déduit y avec une exactitude suffisante pour déterminer le rapport des coefficients de self-induction par l'équation

$$\frac{L'_a}{L_a} = \frac{b' + y}{b} = \frac{b'}{b} - \frac{a^2}{\omega^2 L_a^2} \cdot \frac{x}{b}.$$

765. Rapport des coefficients L et M. — On intercale dans la branche a du pont de Wheatstone l'une des bobines dont le coefficient est L (fig. 232), et la seconde bobine est placée dans le circuit de la pile; soit M leur coefficient d'induction mutuelle. La branche AC renferme ainsi deux forces électromotrices d'induction, qu'il suffira de rendre égales et contraires pour que l'équilibre du pont relatif à l'état permanent

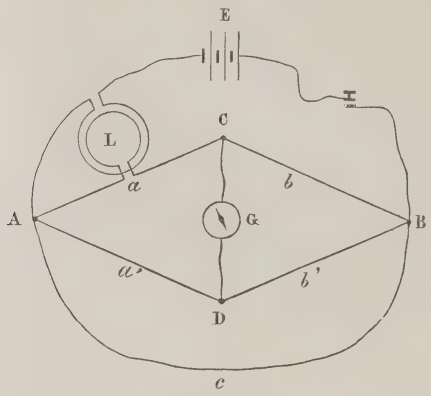


Fig. 232.

convienne également pour l'état variable, puisque les branches du galvanomètre et de la pile sont conjuguées.

Dans l'état variable, la différence de potentiel est $a'\alpha'$ entre les sommets A et D et, entre les sommets A et C,

$$a\alpha + L\frac{d\alpha}{dt} + M\frac{dI}{dt}.$$

L'équilibre complet correspond aux deux conditions

$$a\alpha = a'\alpha', \qquad L\frac{d\alpha}{dt} + M\frac{dI}{dt} = 0.$$

Comme on a $I = \alpha + \alpha'$, il en résulte

$$\frac{L}{M} = -\left(1 + \frac{a}{a'}\right).$$

Cette relation exige que M soit négatif, c'est-à-dire que les

courants soient de sens contraires dans les deux bobines. En outre, on doit avoir $L > -M$.

Les branches du pont étant dénuées d'induction propre et réglées d'abord pour le régime permanent, on peut ajuster les effets d'induction de plusieurs manières :

1° On fait varier le coefficient M en changeant la position relative des deux bobines, jusqu'à ce que l'équilibre ait lieu pour les courants variables.

2° La valeur de M étant supposée constante, on modifie dans le même rapport les deux résistances a' et b', jusqu'à ce que l'équilibre soit obtenu.

3° On introduit entre les points A et B auxquels aboutit la pile une dérivation de résistance c sans induction propre.

Dans ce cas, l'intensité γ du courant qui traverse la dérivation satisfait aux équations

$$I = \alpha + \alpha' + \gamma,$$

$$c\gamma = \alpha'(a' + b') = \alpha(a + b).$$

La condition d'équilibre relative à l'état variable reste la même et donne

$$\alpha'(L + M) + \alpha\left(1 + \frac{a' + b'}{c}\right)M = 0,$$

$$\frac{L}{M} = -\left(1 + \frac{a}{a'} + \frac{a + b}{c}\right).$$

La discussion des équations montre que l'erreur relative sur le rapport des coefficients L et M est environ 100 fois supérieure à celle que l'on commet dans le réglage des résistances; pour obtenir toute la précision dont la méthode est susceptible, le galvanomètre devrait être beaucoup plus sensible pour les courants instantanés que pour les courants permanents. On a tout avantage à produire un régime régulier au moyen d'un commutateur tournant.

766. Appareil à induction variable. — Il est utile dans certaines circonstances d'avoir des appareils dont le coefficient d'induction puisse être gradué comme les boîtes de résistances ou de capacités. Avec les courants alternatifs (**393**), la réactance

d'un conducteur soustrait à toute induction mutuelle est ωL, ce qui fournit une sorte de coefficient de self-induction proportionnel à la fréquence. Pour l'induction mutuelle, M. Brillouin a employé les deux dispositions suivantes :

Le premier appareil comprend deux bobines de même axe, l'une intérieure à fil gros, l'autre extérieure, sur laquelle est enroulé un toron formé de vingt fils isolés, légèrement tordus ensemble : entre la bobine intérieure et l'un quelconque des vingt fils le coefficient d'induction mutuelle M a la même valeur. Au moyen d'un commutateur, on établit les communications de manière que le courant induit dans la bobine extérieure traverse $20 - p$ des fils dans un sens et p fils en sens inverse. Le coefficient d'induction mutuelle entre les deux bobines est alors égal à $2(10 - p)M$ et la résistance du circuit secondaire reste constante.

Le second appareil est formé d'une bobine cylindrique à gros fil, au centre de laquelle est placée une bobine à fil fin pouvant tourner autour d'un de ses diamètres. Si le champ de la bobine extérieure était uniforme, le coefficient d'inducduction mutuelle serait rigoureusement proportionnel au cosinus de l'angle des deux axes. Le terme de correction est facile à évaluer; il suffit d'ailleurs que la longueur de la grande bobine soit dix fois celle de la petite pour que l'erreur du calcul approché soit négligeable.

La même condition serait encore réalisée d'une manière approximative en plaçant le centre de la bobine induite dans le plan moyen d'une bobine à gorge quelconque et de rayon beaucoup plus grand. Enfin on obtiendrait un champ intérieur pratiquement uniforme avec une combinaison convenable de bobines à plusieurs cadres (**577** et **578**).

Lord Rayleigh [1] a fait usage également de deux bobines à angle variable dont on graduait empiriquement l'induction mutuelle par des expériences de comparaison.

[1] L. Rayleigh, *Ph Mag.* [5], t. XXII, p. 469; 1886.

CHAPITRE SEPTIÈME

RAPPORT DES UNITÉS

767. Nature du problème. — Nous pouvons maintenant passer en revue les méthodes employées pour déterminer le rapport **v** des unités d'électricité en mesures électromagnétiques et en mesures électrostatiques (**419**). Ce rapport est de même nature qu'une vitesse; sa valeur absolue est indépendante du choix des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps. La détermination expérimentale de cette constante se ramène donc à la mesure d'une longueur et d'un temps; en particulier, on pourra l'exprimer par la résistance électromagnétique d'un circuit conducteur, laquelle a aussi les mêmes dimensions.

Il est évident d'ailleurs, par la suite d'égalités

$$\mathbf{v} = \frac{q}{\mathrm{Q}} = \frac{i}{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}}{e} = \sqrt{\frac{c}{\mathrm{C}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{r}},$$

qu'il existe en principe autant de méthodes, pour déterminer la constante **v**, que de quantités susceptibles d'être mesurées à la fois dans les deux systèmes d'unités.

On peut réduire ces méthodes à trois principales, correspondant aux seules quantités dont la mesure directe en unités électrostatiques soit réellement abordable, c'est-à-dire une charge électrique, une différence de potentiel ou une capacité. Toutefois, il faut ajouter qu'une pareille division est encore un peu arbitraire, car les expériences ne sont pas aussi nettement distinctes et elles aboutissent souvent aux mêmes déterminations finales.

768. Mesure des quantités d'électricité. — Les premières recherches sont dues à Weber et Kohlrausch [1]; nous les décrirons avec détail à cause de leur importance historique.

Après avoir chargé une bouteille de Leyde dont l'armature extérieure est au sol, on touche le bouton avec une sphère conductrice isolée de rayon R, qu'on enlève ensuite pour servir aux mesures électrostatiques, et on décharge par un galvanomètre balistique l'électricité qui reste sur la bouteille.

Il faut d'abord déterminer, par une expérience préalable, le partage des charges au moment du contact, ou le rapport de la capacité C de la bouteille à la capacité C′ de la sphère dans les conditions où elle est placée. Si V_0 est le potentiel primitif de la bouteille seule et V_1 le potentiel commun du système au moment du contact, la capacité propre de la bouteille n'étant pas modifiée d'une manière sensible par le voisinage de la sphère, on a ainsi, pour la même charge totale,

$$CV_0 = (C + C')V_1, \qquad \frac{C'}{C} = \frac{V_0}{V_1} - 1.$$

Les potentiels de la bouteille avant et après le contact peuvent être déterminés par un électromètre, en tenant compte au besoin de la capacité de l'instrument. On doit remarquer toutefois que le second potentiel est inférieur à V_1, si on le mesure après avoir enlevé la sphère qui a une certaine charge; c'est là une cause d'erreur dont il serait nécessaire de tenir compte et que l'on peut d'abord négliger.

Comme la chute de potentiel $V_0 - V_1$ est très faible, on rend les mesures plus faciles en multipliant les contacts. La sphère étant ramenée à l'état neutre, on répète l'opération un certain nombre de fois. Si $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont les potentiels de la bouteille après 1, 2, ..., n contacts avec la sphère, il en résulte

$$\frac{C + C'}{C} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{V_1}{V_2} \cdots\cdots = \frac{V_{n-1}}{V_n} = \left(\frac{V_0}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\frac{C'}{C} = \left(\frac{V_0}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

[1] Weber et Kohlrausch, *Électrodyn. Maasbestim.*, — *Abh. der K. S. Gesel. der Wiss.*, t. V, p. 219; 1856.

Avec un électromètre à sinus, les mesures du potentiel après quatre contacts ont donné

$$\frac{C'}{C} = 0{,}03276.$$

Ce nombre doit être considéré comme trop élevé, par suite de la remarque précédente, et aussi parce que la capacité de l'électromètre intervient dans les observations.

Pour l'expérience primitive, la charge q' prise par la sphère et la charge correspondante q_0 qui reste sur la bouteille sont respectivement proportionnelles aux capacités C' et C.

On touche ensuite cette sphère par une balle conductrice isolée de rayon r, qui sera utilisée comme boule fixe dans la balance de Coulomb ; le nouveau partage se fait sensiblement de la même manière que si le système était soustrait à toute influence extérieure.

Le rapport p de ces deux charges est une fonction du rapport des rayons correspondants ; on en trouvera la valeur dans les Tables que Plana a calculées en partant des formules de Poisson [1]. Les rayons étaient $R = 7^c{,}973$, $r = 0^c{,}5768$, et l'on déduit des Tables $p = 0{,}007937$. En appelant q_1 la quantité d'électricité que prend la petite balle, on a donc

$$\frac{q_1}{q' - q_1} = p, \qquad \frac{q_1}{q'} = \frac{p}{1+p} = 0{,}007875;$$

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{q_1}{q'} \cdot \frac{q'}{q_0} = \frac{q_1}{q} \cdot \frac{C'}{C} = 0{,}258.10^{-3} = \frac{1}{3876}.$$

La boule mobile de la balance ayant à peu près le même rayon $0^c{,}5798$ que la première, chacune d'elles conserve après le contact la moitié de la charge, c'est-à-dire

$$q = \frac{q_1}{2} = \frac{q_0}{7752}.$$

Ces boules étaient creuses, tournées avec soin, dorées et polies. On cherchait la torsion nécessaire pour les maintenir

[1] Voir Mascart, *Traité d'Électricité statique* ; t. I, p. 281.

à la distance angulaire de 90° ou, plus exactement, après avoir donné au fil une torsion un peu trop faible, on notait l'époque à laquelle l'écart passait par 90°, à cause des déperditions, sauf à faire ensuite les corrections nécessaires.

La distance de la boule fixe à l'axe était de $9^c,353$ et celle de la boule mobile $6^c,17$; la distance des centres pour un écart de 90° est alors $11^c,205$. Cette distance a été augmentée de $0^c,0124$ pour réduire l'action f des boules à celle de leurs centres ; les formules très approchées (21) du n° **115** montrent que cette correction devrait être diminuée de moitié, mais l'erreur n'a pas grande importance.

D'après ces données, la distance h de l'axe à la ligne des centres est égale à $5^c,1502$ et le couple de la répulsion électrique a pour expression

$$fh = 5,1502\left(\frac{q}{11,2174}\right)^2 = \left(\frac{q}{4,9429}\right)^2.$$

Le couple de torsion du fil, déterminé par la méthode des oscillations, était de 0,0050615 pour une minute d'angle.

En appelant T le nombre des minutes observé, correction faite de la déperdition, on avait donc

$$\frac{q^2}{24,43} = 0,0050615\,\mathrm{T}, \qquad q = 0,35165\sqrt{\mathrm{T}};$$

$$q_0 = 7752\,q = 2726\sqrt{\mathrm{T}}.$$

Pendant qu'un premier observateur exécute ces différentes opérations, un autre fait l'épreuve du galvanomètre balistique et détermine l'impulsion α produite par la décharge de la quantité d'électricité q_0 restée sur la bouteille.

Les dimensions du cadre étaient

$$a = 13^c,324, \qquad 2c = 4^c,080, \qquad 2b = 7^c,204.$$

Le nombre total des spires étant $\mathrm{N} = 5635$, on en déduit la constante galvanométrique : $\mathrm{G} = 2621$.

L'aiguille n'avait que 2^c de longueur, ce qui n'exige aucune correction ; l'étude des oscillations a donné :

$$\tau = 9^s,244, \qquad \lambda\tau = 0,070.$$

En prenant $H = 0,17983$ pour la composante horizontale du champ terrestre et tenant compte d'une correction de 0,0014 relative à la torsion du fil, la charge Q_0 de la bouteille en unités électromagnétiques devient

$$Q_0 = \frac{H}{G} \cdot \frac{1,0014}{1,0024} \cdot \frac{\tau\alpha}{\pi} = \frac{\alpha}{4937}.$$

On obtient finalement, pour le rapport des unités,

$$v = \frac{q_0}{Q_0} = 13,46.10^6 \frac{\sqrt{T}}{\alpha}.$$

Les moyennes des cinq séries d'expériences ont fourni les nombres suivants :

Q_0	q_0	v.
$1,194.10^{-6}$	$36,06.10^3$	$30,20.10^9$
1,300	41,94	32,26
1,568	49,70	31,70
1,480	44,45	29,96
1,586	49,66	31,25
	Moy.	$31,07.10^9$

Aux remarques signalées dans le cours de cet exposé, on peut en ajouter encore quelques autres pour montrer combien l'expérience présente de difficultés.

L'emploi d'une cage en verre (604) pour la balance de Coulomb peut toujours faire craindre que des traces d'électricité étrangère sur les parois ne troublent la répulsion des balles. La cage, de forme rectangulaire, avait 144^c de hauteur sur 116^c de longueur et 87^c de largeur. Ces dimensions sont assez grandes pour qu'il n'y ait pas lieu, surtout pour une mesure de charges, de tenir compte de l'influence des parois. D'autre part, la déperdition correspond en réalité à l'électricité qui se propage sur les tiges isolantes, et il est à peu près impossible d'apprécier le rôle de cette distribution irrégulière.

La plus grande cause d'erreur tient peut-être aux phénomènes d'absorption et aux résidus de la bouteille de Leyde

Kohlrausch [1], dans une étude préalable, avait cherché à déterminer la loi du résidu et la déperdition par l'air relatives à la bouteille même qui servait aux expériences. Pour une charge q_0 de la bouteille, la charge q disponible au bout d'un temps t est égale à l'excès de la charge primitive sur la perte par l'air a et le résidu b; Kohlrausch avait trouvé pour la quantité b l'expression

$$b = p\left(q_0 - a - q_0 e^{-\frac{k}{m+1} t^{m+1}}\right),$$

avec $p = 0{,}04494$, $k = 0{,}1834$, $m = 0{,}4255$, le coefficient m ne dépendant que des dimensions de la bouteille.

On pouvait ainsi tenir compte des variations de charge dues à la déperdition et au résidu, d'abord pendant un premier intervalle de 40^s, qui s'écoulait entre les deux mesures électrométriques et qui était employé aux quatre contacts avec la grosse sphère, ensuite pendant un second intervalle de 3^s entre l'instant de la dernière observation électrométrique et la décharge de la bouteille par le galvanomètre. Cette dernière correction était d'ailleurs insignifiante.

D'ailleurs, Kohlrausch et Weber ne considéraient pas leurs expériences comme exactes à moins de 2 p. 100. La différence entre les valeurs extrêmes s'élève environ à 7 p. 100.

769. Forces électromotrices. — Cette méthode a été d'abord employée par Lord Kelvin [2]. Considérons deux points A et B, séparés par la résistance R, d'un conducteur traversé par un courant permanent I. Leur différence de potentiel électromagnétique E est égale au produit IR, évalué dans le même système, et sa valeur électrostatique e peut être déterminée par un électromètre absolu (**605**) dont les plateaux sont en relation avec les deux points A et B.

Pour éviter la mesure du champ terrestre, l'intensité du courant était déterminée par un électrodynamomètre à suspension unifilaire (**633**) qui donne, pour une déviation θ,

$$I^2 = \frac{C}{GS'}\theta, \qquad E = RI = R\sqrt{\frac{C\theta}{GS'}}.$$

[1] R. Kohlrausch, *Pogg. Ann.* t. XCI, p. 56, 1854.
[2] Sir W. Thomson, *Brit. Ass. Rep.*; 1869.

En même temps, on relie alternativement au plateau de l'électromètre chacun des points A et B, l'autre point communiquant avec la cage de l'appareil. Si F est la force nécessaire pour amener le disque mobile à la position de repère, D et D′ les deux lectures relatives à la distance des plateaux, a la surface de la plaque mobile corrigée, on a

$$e = V - V' = (D - D')\sqrt{\frac{8\pi F}{a}},$$

$$v = \frac{E}{e} = \frac{R}{D - D'}\sqrt{\frac{C\theta}{GS'} \cdot \frac{a}{8\pi F}}.$$

La bobine fixe de l'électrodynamomètre est formée par deux cadres distincts. Le courant est amené par le fil de suspension de la bobine mobile et sort ensuite par un fil très léger contourné en spirale, suspendu à la bobine et plongeant dans un godet plein de mercure.

Des aimants convenablement disposés annulaient presque entièrement l'action du champ terrestre. Comme la compensation ainsi obtenue n'est jamais complète, on faisait passer le courant alternativement en sens contraires et on prenait comme déviation finale la moyenne des deux lectures, lesquelles différaient très peu l'une de l'autre.

La bobine mobile avait 3000 tours d'un fil très fin; à cause de ses petites dimensions, on en déterminait la surface S′ par comparaison avec une surface étalonnée. La résistance de l'électrodynamomètre était d'environ 15 600 ohms.

Pour avoir des différences de potentiel plus grandes à mesurer par l'électromètre, on introduisait une résistance supplémentaire de 10 000 ohms entre les points A et B, et on faisait varier en conséquence le nombre des couples de la pile. On ne fermait d'ailleurs le circuit que pendant le temps des observations, afin d'éviter l'échauffement des fils.

Les premières expériences ont été faites par M. King [1] en 1869 sous la direction de Lord Kelvin; elles ont été reprises de 1870 à 1872 par M. Dugald M'Kichan [2].

[1] King, *Report of the committee on electr. stand.*; 1869. *Reprint*, p. 186.
[2] Dugald M'Kichan, *Phil. Tr. L. R. S.*; 1879, p. 409, 427.

La même méthode a été appliquée par M. Shida [1] avec quelques modifications.

On ne cherchait pas à ramener la charge de l'électromètre à une valeur fixe par l'emploi du *replenisher* et de la *jauge* ; mais, mettant alternativement le plateau et la cage en communication avec les points A et B séparés par la résistance R, on obtenait, en opérant à une suite d'intervalles de temps égaux, des lectures successives D_1, D'_1 ; D_2, D'_2 ; D_3, D'_3.... On prenait alors, pour la moyenne des différences, les valeurs suivantes qui doivent être sensiblement égales entre elles, aux erreurs de lecture près :

$$\frac{D_1 + D_2}{2} - D'_1, \qquad \frac{D'_1 + D'_2}{2} - D_2 \ldots$$

L'intensité du courant était déterminée par une boussole des tangentes disposée comme celle de Joule (**618**). Si on observait la déviation Δ de la boussole au moment de la mesure électrostatique, on aurait

$$E = IR = \frac{H}{G} R \operatorname{tang} \Delta.$$

Au lieu d'opérer de cette manière, M. Shida détermine ensuite la déviation δ que l'on obtient en fermant la pile, dont la résistance est ρ et la force électromotrice E_0, par une résistance auxiliaire r. L'intensité i du courant donne

$$E_0 = i(\rho + r) = \frac{H}{G} (\rho + r) \operatorname{tang} \delta.$$

Si la pile reste invariable, le produit $(\rho + r) \operatorname{tang} \delta$ conserve une valeur constante C quand on fait varier la résistance extérieure et on peut choisir des conditions telles que la déviation soit voisine de 45°, ce qui correspond au maximum de sensibilité. On a alors

$$E = \frac{H}{G} \frac{R}{\rho + R} (\rho + R) \operatorname{tang} \Delta = \frac{H}{G} \frac{R}{\rho + R} C.$$

[1] Shida, *Phil. mag.*, [5] t. X, p. 401; 1880.

Cette manière de diriger les expériences ne paraît pas très avantageuse, parce que les observations relatives aux deux systèmes de mesures ne sont pas simultanées et qu'on fait intervenir dans les calculs la résistance de la pile, dont la détermination présente toujours quelques difficultés.

M. Pellat [1] mesure, avec un électromètre absolu, la différence de potentiel e des extrémités d'une très grande résistance R parcourue par un courant uniforme; en même temps on compense, par opposition avec des couples Latimer Clark, celle qui correspond à la m^e partie de cette résistance. La force électromotrice E_0 de ces couples est déterminée, pour plusieurs d'entre eux, en mesurant à l'électrodynamomètre balance le courant i qu'ils produisent dans une résistance r. On a ainsi $E = mE_0$ et, par suite,

$$\mathbf{v} = \frac{E}{e} = m\frac{E_0}{e}.$$

Au lieu de mesurer séparément l'attraction qui s'exerce entre les deux plateaux de l'électromètre et l'action mutuelle des deux bobines de l'électrodynamomètre, Maxwell [2] dispose l'expérience de manière à les équilibrer l'une par l'autre. Deux systèmes sont mis en présence, composés chacun d'un disque conducteur et d'une bobine juxtaposés; l'un des systèmes est fixe et l'autre mobile.

Les deux plateaux, étant chargés d'électricités de signes contraires avec une différence de potentiel constante, s'attirent; les deux bobines, qui sont parcourues par des courants de sens contraires, se repoussent. La première force est sensiblement en raison inverse du carré de la distance des plateaux, tandis que la seconde varie suivant une loi moins rapide; il existe toujours une position des deux systèmes pour laquelle l'équilibre a lieu. L'équilibre est instable, ce qui rend les expériences un peu difficiles.

La figure 233 montre la disposition des deux systèmes : C et C′ sont les deux plateaux, B et B′ les deux bobines. Le plateau C′ est isolé et peut, avec la bobine correspondante B′, être déplacé parallèlement à lui-même au moyen d'une vis

(1) H. Pellat, *Journ. de Phys.* [2], t. X, p. 389; 1891.
(2) Cl. Maxwell, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1868, p. 643.

micrométrique V. Le plateau C, en communication avec le sol, est placé à l'extrémité d'un fléau mobile autour du point O. Il passe exactement dans l'ouverture d'une boîte S, également en communication avec le sol, laquelle renferme le plateau C′ et sert d'anneau de garde pour le plateau C.

Au moment de l'observation, le plateau C doit être maintenu dans le plan de l'anneau de garde, la distance des deux systèmes étant modifiée par le jeu de la vis micrométrique V. Cette position est déterminée au moyen de deux petits miroirs argentés placés l'un sur la partie postérieure du plateau C et l'autre sur l'anneau lui-même ; le disque et l'anneau sont dans le même plan lorsque les portions de l'image d'une même droite données par les deux miroirs paraissent exactement dans le prolongement l'une de l'autre ; cette position est repé-

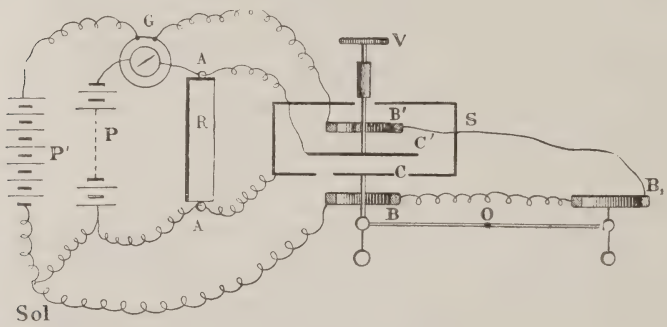


Fig. 233.

rée sur une plaque divisée portée par le système mobile et qu'on observe avec un microscope. Quant à la distance des deux plateaux C et C′, elle se déduit de mesures de comparaison faites sur le micromètre et sur l'échelle divisée, pendant qu'on déplace simultanément les deux disques C et C′ après les avoir mis en contact.

Pour compenser l'action de la terre sur la bobine B, quand elle est traversée par le courant, le fléau porte à l'autre extrémité une bobine identique B_1 dans laquelle le courant circule dans le même sens. Le système constitué par ces deux bobines est parfaitement astatique.

Le fléau est suspendu à un fil de cuivre qui sert à amener

le courant aux bobines ; celui-ci s'échappe ensuite par un fil plongeant dans un godet à mercure. La durée d'une oscillation simple du système était de 7 secondes ; ces oscillations s'éteignent très rapidement à cause des variations de pression qu'elles déterminent dans la boîte S. Il n'y a pas d'ailleurs à tenir compte de la torsion du fil, la position d'équilibre correspondant à une torsion nulle.

La différence de potentiel établie entre les deux plateaux C et C′ est celle de deux points A et A′ d'un circuit traversé par le courant d'une pile P de 2600 couples au bichlorure de mercure. La résistance R qui sépare les deux points A et A′ est formée par une bobine étalonnée valant un million d'ohms environ, et le courant est déterminé par un galvanomètre G.

Une seconde pile P′ fournit le courant des bobines B, B′ et B_1. Ce courant traverse dans le galvanomètre G un second cadre formé d'un petit nombre de spires et superposé au premier, de manière à constituer un galvanomètre différentiel. Une partie du courant est dérivée dans un shunt dont on modifie la résistance de manière que l'aiguille reste au zéro.

On établit les deux courants pendant un temps très court, au moment où l'oscillation du fléau l'amène dans la position d'équilibre ; alors on fait varier la distance des deux plateaux, de manière que le plateau mobile ne soit ni attiré ni repoussé et, d'autre part, on modifie le shunt jusqu'à ce que l'aiguille du galvanomètre reste au zéro.

Deux circonstances contribuent à la difficulté des observations : d'abord l'instabilité de l'équilibre du fléau, puis la variation rapide de la force électromotrice de la pile P, à partir du moment où le circuit est fermé.

L'attraction des deux disques, pour la distance D et une différence de potentiel électrostatique égale à e, est $\frac{a}{8\pi}\frac{e^2}{D^2}$; la répulsion des deux bobines, en appelant M leur coefficient d'induction mutuelle à la distance x et I' l'intensité du courant qui les traverse (592), a pour expression $-I'^2\frac{\partial M}{\partial x} = I'^2 X$. Comme ces deux forces sont égales, il en résulte

$$\frac{a}{8\pi}\frac{e^2}{D^2} = -I'^2 X.$$

L'intensité I du courant fourni par la pile P donne la différence de potentiel électromagnétique $E = IR$ des deux plateaux. L'aiguille du galvanomètre est maintenue au zéro en plaçant sur le fil de résistance g un shunt s; on a alors, en appelant G et G′ les constantes des deux cadres,

$$\frac{s}{s+g} IG = I'G', \qquad E = IR = RI' \frac{G'}{G} \frac{s+g}{s}.$$

Il en résulte, pour le rapport des unités,

$$v = \frac{E}{e} = \frac{R}{D} \frac{G'}{G} \frac{s+g}{s} \sqrt{\frac{a}{8\pi X}}.$$

Le rapport des constantes G et G′ se détermine à la manière ordinaire en faisant passer un même courant dans les deux cadres, avec un shunt convenable sur le cadre à fil fin, de manière à ramener l'aiguille au zéro.

Quant au facteur X, qui représente la répulsion pour deux courants égaux à l'unité, on le calculera par les fonctions elliptiques (**593**) appliquées aux cercles moyens, en utilisant ensuite la méthode de Lord Rayleigh (**586**) pour les deux bobines, ou par tout autre procédé (**594** et **595**).

M. Hurmuzescu [1] oppose également les actions électrostatiques et électrodynamiques. Dans le centre d'une bobine cylindrique perpendiculaire au méridien et ayant n spires par unité de longueur, on suspend un cadre de surface S, qui est en équilibre dans une direction perpendiculaire, c'est-à-dire quand son axe est parallèle au méridien. Si ce système, qui constitue un électrodynamomètre, est parcouru par un courant I, le champ intérieur est $4\pi n I$ et le couple qui agit sur le cadre $4\pi n I . SI = 4\pi n SI^2$.

Un électromètre est formé de cylindres concentriques (**71**) et la partie mobile est liée au cadre précédent par un levier de longueur l. Lorsque le cylindre central est relié à l'un des inducteurs, l'action produite par une différence de potentiel e est égale à $c \frac{e^2}{2}$ et le couple correspondant à $cl \frac{e^2}{2}$,

[1] Hurmuzescu, *Société de Phys.*, 15 mai 1896.

le facteur c désignant la capacité électrostatique de l'électromètre par unité de longueur. L'équilibre du système a lieu pour la condition

$$4\pi n \mathrm{SI}^2 = cl\frac{e^2}{2}.$$

Les deux instruments étant placés en dérivation sur une résistance R, la force électromotrice commune E a pour expression RI ou $e\mathbf{v}$, ce qui donne

$$\mathbf{v}^2 = \frac{cl\mathrm{R}^2}{8\pi n \mathrm{S}}.$$

En appelant a et a' le rayon des surfaces cylindriques de l'électromètre (57), on a finalement

$$\frac{1}{c} = 2\mathfrak{L}.\frac{a'}{a}, \qquad \mathbf{v}^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{16}.\frac{l}{\pi n \mathrm{S}\mathfrak{L}.\frac{a'}{a}}.$$

770. **Capacités.** — La disposition la plus simple et la plus sûre pour déterminer une capacité en unités électrostatiques consiste à employer deux plateaux parallèles dont l'un est entouré d'un anneau de garde.

La mesure électromagnétique, par les méthodes indiquées au chap. V, se ramène à celles d'une résistance et d'un temps. Supposons qu'un condensateur de capacité C soit porté à la différence de potentiel $\mathrm{E} = \mathrm{IR}$, qui existe entre deux points d'un circuit; si l'on désigne par α l'impulsion que produit la décharge $\mathrm{Q} = \mathrm{CE}$ et par Δ la déviation réduite correspondant au courant I dans le même galvanomètre, on a

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{IR}} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\tau}{\pi}\frac{\alpha}{\Delta}.$$

La capacité du même condensateur en unités électrostatiques étant c, il en résulte

$$\mathbf{v}^2 = \frac{c}{\mathrm{C}} = \frac{c\mathrm{R}}{\tau}\frac{\pi\Delta}{\alpha}.$$

Si la décharge est répétée régulièrement n fois par seconde, le courant moyen est

$$i = nQ = nCIR.$$

Les déviations réduites δ et Δ, relatives aux courants i et I dans un même galvanomètre, donnent alors

$$C = \frac{1}{nR}\frac{i}{I} = \frac{1}{nR}\frac{\delta}{\Delta}.$$

Dans ce cas, il n'est plus nécessaire d'employer un aussi grand nombre de couples pour produire la charge. La formule se réduit simplement à $nCR = 1$ quand on choisit les conditions de manière que $i = I$. On obtient encore une expression analogue si l'expérience est ramenée à la comparaison de courants égaux; l'emploi du galvanomètre différentiel est alors tout indiqué pour constater l'équilibre des courants.

La comparaison des deux mesures d'une capacité est la méthode qui a donné lieu au plus grand nombre d'expériences; nous citerons, en particulier, celles de MM. Ayrton et Perry (1), Stoletow (2), J. J. Thomson (3), Klemencic (4), Himstedt (5), Rowland et Rosa (6), Abraham (7), etc. Elle présente l'avantage que le rapport des unités est proportionnel au carré d'une résistance, de sorte que l'erreur relative commise sur cette dernière quantité n'a qu'une importance moitié moindre sur la valeur de **v**.

MM. Ayrton et Perry emploient un condensateur de forme carrée dont une des armatures, ayant $1325^{cq},14$ de surface, est entourée par un anneau de garde; la distance des plateaux est de $0^{c},7728$.

La pile P, composée de 382 couples Daniell, est fermée par une résistance AB (fig. 234) de 10 000 ohms environ, dont la différence de potentiel sert à charger le condensateur. A cet

(1) Ayrton et Perry, *Journ. of tel. Eng.*, t. VIII, p. 126; 1879.
(2) Stoletow, *Journ. de Phys.* [1], t. X, p. 468; 1881.
(3) J.-J. Thomson, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1883, p. 707. — J.-J. Thomson et Searle, *Proc. L. R. S.*, t. XLVII, p. 376; 1890.
(4) Klemencic, *Wiener Bericht.* [3], t. LXXXIII, p. 88; 1884.
(5) F. Himstedt, *Wied. Ann.*, t. XXIX, p. 560; 1886 et t. XXXIII, p. 1; 1888.
(6) Rowland, *Ph. Mag.* [5], t. XXVIII, p. 304; 1889. — Rosa, *ibid.* p. 315.
(7) H. Abraham, *Ann. de Ch. et de Phys.* [6], t. XXVII, p. 433; 1892.

effet, on abaisse la clef K et on fait basculer la fourchette isolée P Q, qui est mobile autour du point O, de manière à relier la branche P avec la tige F qui soutient le disque M. On fait ainsi communiquer, d'une part le point A avec le plateau N et, d'autre part, le point B avec le disque M et l'anneau de garde. Le condensateur étant ainsi chargé, on sépare P de F et on laisse la clef K se relever; le plateau N et la boîte S se trouvent alors en communication avec B et avec le sol. On fait toucher F par la branche Q de la fourchette ; la charge du disque M s'écoule au sol par le galvanomètre.

Reste à mesurer la différence de potentiel E des deux points A et B. On met sur le circuit du galvanomètre une très grande résistance r, dont les extrémités sont reliées l'une en A,

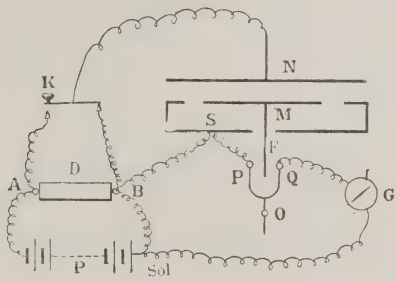


Fig. 234.

l'autre en un point D du conducteur AB, tel que la résistance AD soit une fraction m de la résistance AB, de sorte que la différence de potentiel entre les points A et D est égale à mE. En outre, le galvanomètre étant shunté, le courant i, mesuré par la déviation δ, est une fraction $\frac{s}{s+g}$ de celui que donnerait la force électromotrice mE dans une résistance $r+\frac{gs}{g+s}=\frac{r(g+s)+gs}{s+g}$; c'est donc le courant qui correspond à la force électromotrice E dans la résistance $\frac{r(g+s)+gs}{ms}$. Il en résulte

$$C=\frac{Q}{E}=m\,\frac{s}{r(s+g)+sg}\,\frac{\tau}{\pi}\,\frac{\alpha}{\delta}.$$

On fit usage d'un galvanomètre astatique de lord Kelvin dont les aiguilles avaient été remplacées, pour augmenter la durée de l'oscillation et diminuer l'amortissement, par deux systèmes de 20 barreaux chacun montés dans une espèce de chape en plomb, de manière à figurer une petite sphère. La période des oscillations simples atteignait $39^s,5$ et le décrément logarithmique était réduit à 0,1565.

Le condensateur de Stoletow, pour des expériences qui n'ont pas été terminées, était construit de la même manière, mais avec une précision mécanique qui permet de mesurer exactement la distance des surfaces, quand on les rapproche jusqu'à 1 ou 2 millimètres. A l'aide d'un commutateur tournant, on charge cette capacité par la pile de force électromotrice E et on la décharge n fois par seconde ; le courant moyen est $i = nQ = nCE$. La pile est ensuite fermée par une résistance r et un galvanomètre de résistance g avec un shunt s. Du nouveau courant observé i' on déduit alors

$$i' = I\frac{s}{g+s} = E\frac{s}{r(g+s)+gs},$$

$$nC = \frac{s}{r(g+s)+gs}\cdot\frac{i}{i'}.$$

M. J.-J. Thomson se sert de condensateurs cylindriques avec anneaux de garde et équilibre au pont de Wheatstone le courant moyen produit par une série de décharges obtenues à l'aide d'une lame vibrante (**743**).

M. Rowland emploie un condensateur sphérique et mesure l'impulsion d'une seule décharge. M. Rosa a fait usage du même condensateur en équilibrant un régime de décharges par le pont de Wheatstone.

M. Klemencic a recours au galvanomètre différentiel. L'un des cadres communique avec la pile par une résistance R. Le condensateur est chargé par la pile et se décharge n fois par seconde dans le second cadre. On règle la résistance R de manière que l'aiguille reste au zéro, ce qui a lieu pour la condition $nCR = 1$. Le condensateur est constitué par deux plateaux circulaires dont la distance est variable ; pour tenir compte des variations de densité sur les bords, on a calculé

la capacité par la formule suivante de Kirchhoff [1], dans laquelle a représente le rayon des plateaux, b leur épaisseur et e la distance qui les sépare.

$$c = \frac{a^2}{4e} + \frac{a}{4\pi}\left[\mathfrak{L}.\ \frac{16\pi a(e+b)}{e^2} + \frac{b}{e}\mathfrak{L}.\ \frac{e+b}{b} + 1\right].$$

M. Himstedt s'est servi également d'un condensateur à plateaux circulaires. En plaçant ce condensateur en dérivation sur une résistance R du courant principal, on le décharge n fois par seconde, au moyen d'un diapason, dans un des cadres du galvanomètre différentiel ; l'autre cadre, de résistance g, est mis en dérivation sur une résistance r du circuit principal. La condition d'équilibre est alors

$$n\mathrm{CR} = \frac{r}{g+r}.$$

Dans une autre série, M. Himstedt installe le condensateur en dérivation sur l'une des branches du pont de Wheatstone et équilibre le courant moyen produit par une succession régulière de décharges ; la capacité des fils de communication intervient alors pour une part dont il a été tenu compte.

M. Abraham équilibre aussi, au galvanomètre différentiel, un courant continu par le courant moyen des décharges. Le galvanomètre comprend deux cadres distincts avec des aiguilles différentes montées sur le même équipage ; le condensateur est formé de lames de verre argentées dont on mesure la distance par les images réfléchies d'une échelle et le courant constant est dérivé sur une dérivation du circuit principal utilisé pour la charge du condensateur.

On peut encore évaluer la capacité électromagnétique d'un condensateur par la période des décharges oscillantes (748) et en déduire le rapport des unités. C'est une expérience importante sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Enfin une dernière méthode consisterait à déterminer la capacité électromagnétique C par l'intervalle de temps t nécessaire pour que la différence de potentiel des deux armatures, reliées par une résistance R, passe d'une valeur V_0 à la

[1] Kirchhoff, *Mon. Ber. der Ak. zu Berlin*, 1877. — *Gesamm. Abh.*, p. 101.

valeur V. En mesurant le rapport de ces deux potentiels par un électromètre, on aurait alors

$$\frac{t}{CR} = \pounds . \frac{V}{V_0}, \qquad \mathbf{v}^2 = \frac{c}{C} = \frac{cR}{t} \pounds . \frac{V_0}{V}.$$

771. **Résumé des expériences.** — A part la méthode de Weber et Kohlrausch où le rapport **v** est emprunté seulement aux nombres fournis par l'expérience même, les autres méthodes font intervenir la valeur numérique d'une résistance. Si les résistances ont été mesurées en fonction d'une unité arbitraire dont la valeur en fonction de l'ohm international (**421**) est égale à U, et qu'on veuille ramener les résultats à l'ohm international, on doit multiplier le nombre obtenu pour le rapport **v** des unités par U ou $\sqrt{U}$, suivant que l'on a comparé des forces électromotrices ou des capacités.

Plusieurs des expériences, par exemple, ont été rapportées à l'Unité de l'Association Britannique, qui vaut 0,98617 ohm international (**709**) ; on corrigera les résultats en les multipliant par ce nombre ou par sa racine carrée 0,99306.

Cette grandeur **v** a une telle importance scientifique qu'il paraîtra sans doute utile d'indiquer toutes les valeurs obtenues, en les ramenant à l'ohm international.

Nous rappellerons d'abord que, depuis les expériences célèbres par lesquelles Fizeau a montré, en 1849, et Foucault, en 1850, que la vitesse de propagation de la lumière peut être mesurée directement par la méthode de la roue dentée ou par celle du miroir tournant, les principales déterminations de cette vitesse ont donné

Date.	Observateur.	Vitesse.
1862.	Foucault (Miroir tournant). .	$2,980.10^{10}$
1874.	Cornu (Roue dentée).	2,985
1879.	» id.	3,004
1879.	Michelson (Miroir tournant).	2,991
1882.	» id.	2,9985
1882.	Newcomb id.	2,9986
1882.	» id.	2,9981

D'autre part, le rapport v des unités d'électricité, dans les systèmes électromagnétique et électrostatique, serait

Date	Observateur.	Valeur de v. obtenue.	Valeur de v. corrigée.
1856.	Weber et Kohlrausch.	$3,107.10^{10}$	$3,107.10^{10}$
1868.	Maxwell.	2,880	2,840
1869.	Lord Kelvin et King. .	2,846	2,807
1872.	Dugald M'Kichan. . . .	2,935	2,894
1879.	Ayrton et Perry.	2,980	2,959
1880.	Shida.	2,995	2,954
1883.	J. J. Thomson.	2,963	2,963
1883.	Exner.	3,01	3,01
1884.	Klemencic.	3,019	3,019
1888.	Himstedt	3,007	3,007
1889.	Lord Kelvin.	3,004	3,004
1889.	Rowland	2,982	2,982
1890.	J. J. Thomson et Searle.	2,996	2,996
1889.	Rosa	3,000	3,000
1891.	Pellat.	3,009	3,009
1892.	Abraham.	2,992	2,991
1896.	Hurmuzescu.	3,001	3,001

Il est difficile de se prononcer sur l'exactitude relative des différentes expériences. En tout cas, la concordance est si grande, entre la vitesse de la lumière et le rapport des unités d'électricité, que ces deux grandeurs doivent être considérées comme identiques, au degré d'approximation que comportent les méthodes d'observation.

CHAPITRE HUITIÈME[1]

DÉCHARGES ÉLECTRIQUES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

772. Isolement par les gaz. — Abstraction faite de la déperdition qui tient au défaut d'isolement des supports, les expériences bien connues de Coulomb paraissaient avoir établi que l'électricité d'un corps se dissipe assez rapidement par l'air, surtout quand il est humide. La question est de savoir si les gaz ont une conductibilité sensible ou si les pertes ont lieu par *convection*, les molécules mêmes du gaz ou les poussières qu'il renferme ou encore les particules métalliques arrachées aux conducteurs emportant peu à peu l'électricité qu'elles prennent au contact.

Il semble maintenant établi que dans un gaz aux températures ordinaires, quel que soit son état hygrométrique, la déperdition d'électricité est absolument négligeable en l'absence de poussières qui agissent par convection; la vapeur qui se dégage d'un vase électrisé contenant de l'eau en ébullition n'emporterait même aucune trace d'électricité.

Le pouvoir isolant des gaz ne se maintient plus pour les températures élevées. Au rouge blanc, par exemple, deux conducteurs en présence ne peuvent conserver l'électricité sous

[1] Nous renverrons, pour plus de détails sur différents points de ce chapitre, à l'ouvrage remarquable de M. J.-J. Thomson (*Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism*; Oxford, 1893).

une différence de potentiel de quelques volts, ou même seulement d'un millième de volt [1].

D'après les expériences de M. J. J. Thomson, les gaz tels que l'air, l'azote ou l'hydrogène, qui ne subissent aucune modification chimique par la chaleur, sont très peu conducteurs et les pertes auraient lieu par convection. Pour ceux qui éprouvent une dissociation partielle, comme l'acide iodhydrique, la conductibilité est plus grande et semble dépendre de la nature des électrodes à un moindre degré.

Toutefois l'état des électrodes paraît jouer le rôle le plus important car, si elles restent froides, aucune trace d'électricité ne se transmet par le gaz, quelle que soit sa température, et il est nécessaire de porter les électrodes au rouge pour que la déperdition soit manifeste. Les parcelles métalliques qui s'en détachent doivent ainsi produire un effet de convection supérieur à l'influence propre du gaz.

Volta avait reconnu déjà que la *flamme* d'une bougie ou d'un fil soufré agit comme une pointe infiniment aiguë (**51**) et laisse échapper l'électricité, au moins pour les potentiels élevés. Lord Kelvin a utilisé cette propriété pour réaliser, par la combustion lente d'une mèche imprégnée de nitrate de plomb, un égaliseur de potentiel très propre à l'étude de l'électricité atmosphérique.

Les flammes sont surtout efficaces quand elles proviennent de liquides renfermant des sels en dissolution ; il est probable que la convection joue alors un rôle important.

En outre, les flammes ont des propriétés polaires et peuvent produire entre deux métaux de même nature une force électromotrice de 3 ou 4 volts.

773. Influence de l'éclairement. — Au cours de ses recherches sur les oscillations électriques, Hertz [2] a découvert ce fait remarquable que la production d'une étincelle entre deux conducteurs est facilitée par une étincelle voisine.

Les branches de l'excitateur d'une bobine d'induction étant écartées au point d'interrompre les décharges, si l'on provoque une autre étincelle à quelque distance, les premières

[1] Ed. Becquerel, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. XXXIX, p. 355; 1853. — Blondlot, *C. R. de l'Acad. des sc.* t. CIV, p. 283; 1887.

[2] H. Hertz, *Wied. Ann.*, t. XXXI, p. 983; 1887.

reparaissent. Cette influence n'est pas électrique, car l'action de la seconde étincelle est supprimée par l'interposition d'une lame de verre, qui n'empêche pas les effets d'induction, tandis qu'une lame de quartz n'a plus d'effet protecteur.

En réalité, la seconde étincelle agit par sa lumière et on obtient le même résultat en éclairant l'excitateur par une source lumineuse riche en rayons ultra-violets, comme celle de l'arc électrique.

Une méthode plus simple consiste à se servir d'un excitateur à branches bifurquées portant deux systèmes de boules opposées, a et b, a' et b'. On règle les distances de manière que la décharge passe de préférence dans l'un des intervalles, tel que $a'b'$; les étincelles prennent l'autre chemin ab quand on éclaire ce système par l'arc électrique, surtout si l'on concentre la lumière par une lentille de quartz.

M. Wiedemann et Ébert [1] ont reconnu que l'action a son siège sur l'électrode négative. L'excitateur est placé dans un tube de verre; l'une des branches est reliée à la machine de Holtz, l'autre branche au sol par l'intermédiaire d'un tube de Geissler et d'un téléphone; le tube est muni d'uue fenêtre en quartz au niveau des boules. Quand on éclaire la boule positive, rien n'est changé dans l'apparence du tube lumineux ou le son du téléphone. Si on éclaire la boule négative, le tube lumineux devient plus éclatant et le son s'élève, indiquant que le nombre de vibrations a augmenté, par exemple dans le rapport de 4 à 3. L'action de la lumière est très inégale sur différents métaux; elle est surtout marquée pour le *cuivre*, le *zinc*, le *platine* et s'observe même avec les liquides colorés. Cette action est aussi plus grande dans l'acide carbonique et l'hydrogène que dans l'air et semble passer par un maximum pour une pression voisine de 30^{c} de mercure.

On a vu déjà (**726**) que ces effets sont réciproques et que l'éclairement par les rayons ultra-violets est capable de produire des forces électromotrices notables.

Stoletow [2] réunit le plateau et le grillage de M. Righi aux deux pôles d'une pile de 100 couples dont le circuit renferme un galvanomètre. Le courant est nul quand l'appareil n'est

[1] E. Wiedemann et Ebert, *Wied. Ann.* t. XXXIII, p. 241; 1888.
[2] Stoletow, *C. R. de l'Acad. des sc.* t. CVI, p. 1149, 1593 et t. CVII, p. 91; 1890.

pas éclairé; il reste nul sous l'influence de la lumière si le plateau est positif et devient très notable si le plateau forme l'électrode négative.

Quelques-uns des résultats obtenus par divers observateurs présentent certaines contradictions, mais la conclusion générale paraît bien établie que le phénomène est provoqué par les rayons ultra-violets. On augmente beaucoup l'action de l'arc électrique en plaçant dans les charbons une âme en aluminium, tandis que la lumière solaire n'a qu'une action faible. En outre, les milieux solides, liquides ou gazeux que l'on interpose sur le trajet de la lumière d'un arc électrique diminuent son efficacité en raison de l'absorption qu'ils exercent sur l'extrémité la plus réfrangible du spectre.

MM. Bichat et Blondlot [1] ont cherché à montrer que c'est là un phénomène de convection. Un courant d'air sec et purgé de toute poussière n'enlève aucune trace sensible d'électricité à un conducteur isolé. Si l'on emploie un plateau et un grillage en laiton bien décapé, le plateau étant relié à l'un des quadrants de l'électromètre, le grillage et l'autre quadrant réunis au sol, et qu'on éclaire le plateau au travers du grillage, l'électromètre indique un potentiel positif de 3 à 4 volts. En dirigeant contre le plateau le courant d'air provenant d'un réservoir à 8 atmosphères, le potentiel devient 7 à 8 fois plus grand, tandis que l'effet de l'insufflation disparaît quand on supprime la lumière. Il semble donc, dans le cas actuel, que le mouvement du gaz enlève au plateau de l'électricité négative par convection, malgré l'existence antérieure d'une couche d'électricité positive.

774. Différentes formes de la décharge. — La production d'une étincelle (6) entre deux conducteurs a lieu quand leur différence de potentiel atteint une valeur déterminée, qu'on peut appeler *potentiel explosif*. Cette *décharge disruptive* prend des formes très différentes, suivant la capacité des conducteurs, la distance qui les sépare, la résistance du circuit, la nature et les conditions physiques du diélectrique.

L'*étincelle* proprement dite est un trait de feu brillant, plus ou moins irrégulier, qui se produit surtout lorsque la décharge

[1] E. Bichat, *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 245; 1889.

a un caractère oscillatoire (**399**). L'examen de la lumière au spectroscope montre qu'elle renferme en grande majorité des vapeurs métalliques arrachées aux deux électrodes.

Quand on diminue beaucoup la capacité du système, par exemple en enlevant dans une machine de Holtz les bouteilles de condensation, et que l'une des électrodes se termine en pointe, la décharge dans l'air prend la forme d'*aigrettes* violacées beaucoup plus pâles, présentant au pôle positif des houppes ramifiées et au pôle négatif une nappe lumineuse avec des points brillants; le spectre des aigrettes dépend de la nature du gaz traversé par la décharge.

Les apparences sont d'ailleurs très variables avec les conditions de l'expérience. Ces aigrettes sont accompagnées d'un bruissement de tonalité déterminée, qui indique une succession de décharges, et peuvent se transformer en étincelles quand on augmente le débit de la machine.

Les étincelles et les aigrettes correspondent sensiblement au même potentiel explosif. Il existe toutefois une distinction marquée entre les deux phénomènes. L'étincelle entre deux conducteurs les amène brusquement au même potentiel, tandis que, si le débit de la source est continu, l'aigrette maintient entre eux une différence de potentiel constante.

On peut en profiter pour constituer une sorte de *trop-plein électrique* en joignant les pôles de la machine aux branches d'un excitateur dont l'une est terminée en pointe et l'autre par une boule ou un plateau. Quel que soit le débit de la machine, la différence de potentiel reste invariable tant qu'il ne se produit pas d'étincelles; l'expérience réussit beaucoup mieux si la pointe est négative.

Les décharges des bobines d'induction ont un aspect un peu différent parce que la force électromotrice induite dans le fil secondaire varie rapidement à chaque rupture ou fermeture du courant primaire. Si les électrodes sont très éloignées, le courant secondaire direct de rupture est seul capable de traverser le diélectrique et donne des étincelles correspondant au maximum de force électromotrice; pour une distance plus faible, il se produit un mélange d'étincelles et d'aigrettes, en même temps que l'énergie électrique augmente; enfin, quand on rapproche davantage les électrodes ou qu'on diminue la

résistance qui les sépare, les deux courants induits finissent par s'établir inégalement et chacune des électrodes présente les deux caractères positif et négatif.

Si les électrodes communiquent à deux plateaux parallèles très rapprochés, la décharge prend la forme de *pluie de feu*, ou d'*effluve électrique*. L'aigrette et l'effluve sont accompagnées d'actions chimiques; dans l'air, par exemple, il se produit des composés nitrés et une quantité notable d'ozone.

Quand on joint les électrodes aux armatures d'un condensateur, de manière à augmenter la capacité du circuit induit, la distance explosive est plus courte et l'énergie augmente. Avec une série de bouteilles en cascade, de dimensions convenables, la décharge induite peut être composée d'un faisceau d'étincelles très éclatantes à plus grande distance.

A mesure qu'on diminue la pression du gaz dans lequel se produit la décharge, les apparences se modifient d'une manière continue ; les étincelles proprement dites ne tardent pas à disparaître, le gaz s'illumine sur une grande étendue, avec des caractères très variés. Ce phénomène est d'autant plus intéressant à étudier qu'il laisse en chaque point une trace visible des effets électriques.

775. Energie électrique des batteries. — Dans la décharge des batteries (**398**) l'énergie totale se partage sur les différentes parties du circuit, en raison de leurs résistances [1].

Lorsque la résistance des conducteurs est très faible, l'étincelle absorbe la plus grande partie de l'énergie, que l'on peut évaluer, au moins d'une manière approximative, comme dans le thermomètre de Kinnersley, par l'accroissement brusque de pression qu'éprouve une masse de gaz limitée.

Si l'on réduit, au contraire, l'importance de l'étincelle en formant le circuit par un fil de résistance considérable, on peut admettre que l'étincelle n'intervient que pour une faible fraction dans le phénomène et que l'énergie est proportionnelle à l'échauffement du fil. Tel est le principe du thermomètre de Riess, où le fil est enfermé dans un ballon de verre communiquant avec un manomètre latéral. A part les corrections de refroidissement, l'énergie est proportionnelle à la

[1] Voir Mascart, *Traité d'Électricité statique*, t. II, p. 1 ; 1876.

différence de niveau maximum. On peut enregistrer le phénomène en plaçant le fil dans un tube de verre relié à l'un des tambours de M. Marey, qui trace les variations de pression sur un cylindre tournant couvert de noir de fumée.

Une autre méthode plus simple consiste à employer un fil d'épaisseur uniforme dont on modifie la longueur jusqu'à ce que la décharge le porte exactement à la température de fusion. L'expérience ne réussit bien qu'avec les fils de fer. Lorsque la charge est trop faible, le fil rougit ; quand elle est trop grande, le fil est en partie volatilisé avec projection de matière ; pour une charge convenable, le fil se courbe assez lentement et se partage en gouttelettes. Il est d'ailleurs nécessaire de remplacer un fil qui a été d'abord porté au rouge par une décharge insuffisante, sans doute parce que sa surface est oxydée et ses propriétés modifiées.

En évaluant la charge d'une batterie de jarres égales par le nombre des étincelles d'une bouteille de Lane (**612**), il est ainsi facile de vérifier que la longueur du fil fondu est proportionnelle au carré de la charge ou, pour une charge constante, proportionnelle à la capacité de la batterie. On peut, sans aucune autre mesure, considérer cette démonstration comme suffisante au point de vue expérimental.

776. Étude des décharges oscillantes. — La discontinuité des étincelles (**399**) a été constatée d'abord par Feddersen, à l'aide du miroir tournant, soit en les observant par réflexion, soit avec un miroir concave dont l'image réelle était reçue sur une plaque photographique; des communications étaient établies de manière que la décharge d'une batterie se fit pour une position déterminée du miroir. Les épreuves ainsi obtenues présentent trois caractères différents.

1° Si le circuit renferme une très grande résistance, comme une colonne d'eau, la décharge est *intermittente* ; elle s'effectue par fractions, à mesure que le débit d'électricité par le circuit est suffisant pour porter les électrodes au potentiel explosif; les premières étincelles sont d'abord équidistantes et s'espacent de plus en plus, sans loi bien déterminée.

2° Quand on diminue la résistance du circuit par substitution d'acide sulfurique à l'eau des colonnes liquides, la décharge ne tarde pas à paraître *continue* : l'image, au lieu d'être

formée par des traits successifs, présente deux bandes lumineuses d'intensité décroissante, qui correspondent aux deux électrodes, et la durée totale diminue avec la résistance jusqu'à une valeur minimum.

3° Pour des résistances moindres, la décharge devient *oscillante* ; l'image photographique présente, suivant les circonstances, soit une série de taches plus intenses qui alternent d'une électrode à l'autre, soit des nappes lumineuses alternes, dont la courbure montre que la lumière met un temps appréciable pour se propager entre les deux électrodes.

4° Les étincelles successives sont alors équidistantes. Pour un circuit dont la forme générale est invariable, le carré de la résistance limite R correspondant au début des décharges oscillantes est en raison inverse de la capacité C de la batterie. En désignant par L le coefficient de self-induction du circuit, la condition théorique est, en effet, $R^2C = 4L$.

$$(1) \qquad \omega^2 = \frac{1}{CL}, \qquad T = 2\pi\sqrt{CL}.$$

Les épreuves photographiques obtenues par Feddersen ne sont pas assez délimitées pour qu'il soit possible de déterminer la période et de suivre plus loin la vérification de la théorie.

Le fait même de l'existence des oscillations peut être mis en évidence par un appareil très simple, facile à réaliser dans un cours. On relie les électrodes du fil secondaire d'une bobine à un excitateur dont les branches terminées en pointe sont séparées par une distance de quelques millimètres. Une feuille de papier, montée sur un cadre en bois, peut se mouvoir verticalement entre les pointes. Ce cadre est porté par deux tubes de caoutchouc auxquels on donne une grande tension en attachant le cadre à un appareil à déclic.

Le cadre marche avec une grande vitesse quand on l'abandonne à lui-même et, par une disposition facile à imaginer, il brise en même temps le circuit du courant primaire. Les étincelles secondaires perforent le papier au passage et y laissent un grand nombre de trous à peu près équidistants. Il serait possible d'utiliser cette disposition pour des mesures exactes en faisant inscrire simultanément sur le papier les vibrations d'un diapason chronométrique.

777. **Détermination de la période.** — Si la capacité électrostatique du condensateur est c, la relation $c = C\mathbf{v}^2$ donne

$$\mathbf{v} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{cL}.$$

Le contrôle de la théorie se ramène donc à vérifier si la valeur du rapport $\mathbf{v}$ des unités ainsi déterminée est conforme à celle que donnent les méthodes plus directes.

M. Lodge [1] dispose l'expérience de manière que l'image de l'étincelle, produite par un objectif fixe, se forme sur une plaque photographique qui tourne dans son plan avec une grande vitesse; les épreuves successives se distribuent ainsi sur une circonférence et un petit déplacement de l'objectif permet d'obtenir sur la même plaque plusieurs séries d'images en cercles concentriques.

La vitesse de rotation se détermine par une méthode stroboscopique, en observant, au travers de deux fentes portées par les deux branches d'un diapason, des rayons tracés sur un disque tournant. L'arbre est commandé par une petite turbine à eau et on modifie la vitesse en appuyant à la main sur les cordes de transmission, de manière que le disque paraisse immobile au moment où l'on fait les épreuves d'étincelles.

Pour que l'induction propre du circuit soit facile à évaluer, on y intercale deux bobines plates parallèles, dont les coefficients respectifs sont L_1 et L_2 et le coefficient d'induction mutuelle M. Suivant le mode de jonction, les courants dans les bobines sont de même sens ou de sens contraires et le coefficient de self-induction final est $L = L_1 + L_2 \pm M$.

Les étincelles, peu nombreuses, présentaient au milieu de taches brillantes une sorte de trait de feu qui semble fournir un repère plus exact. Les expériences finales, avec des condensateurs à air, ont donné pour $\mathbf{v}.\ 10^{-10}$, toutes corrections faites, des nombres variant de 2,90 à 3,02.

M. Boys [2] laisse, au contraire, la plaque photographique immobile et monte l'objectif sur un disque tournant. En réalité, ce disque porte six objectifs disposés par paires suivant des diamètres également inclinés l'un sur l'autre, et à des dis-

[1] O. Lodge, *Phil. Mag.* [5], t. XXIX, p. 292; 1890.
[2] C. V. Boys, *Phil. mag.* [5], t. XXX, p. 253; 1890.

tances inégales du centre. Le sixième du disque seulement est découvert et on obtient, dans un secteur de 60°, des images distribuées sur trois circonférences concentriques.

L'épreuve montre, au début, un trait rectiligne qui correspond à une sorte d'étincelle *pilote*, puis une série de taches, alternativement plus intenses aux deux pôles, séparées par des minima ; on a pu ainsi, dans certaines expériences, observer jusqu'à 42 intervalles successifs. Avec des condensateurs en verre, la période des oscillations fut un peu supérieure, de 2 à 5 p. 100, à la valeur théorique.

Les expériences de MM. Trowbridge et Sabine (1), faites par la méthode du miroir tournant, paraissent indiquer que la durée propre des oscillations varie elle-même d'une manière périodique, mais ce résultat ne semble pas conforme à ceux qu'ont obtenu la plupart des observateurs.

On peut avoir recours à des procédés mécaniques, soit par un mouvement de rotation, soit par la chute libre d'une masse ou celle d'un pendule (650), pour établir deux contacts à un intervalle de temps très court et bien déterminé, afin d'observer les différentes phases de la décharge.

Von Helmholtz (2) se servait d'un lourd pendule qui peut, en agissant sur deux leviers, rompre d'abord le courant primaire, et fermer ensuite le circuit secondaire. Le nerf sciatique d'une grenouille, qui forme le plus délicat des électroscopes, étant intercalé sur le fil secondaire d'une bobine sans fer doux, on a pu ainsi écarter progressivement les leviers de contact de manière à constater jusqu'à 50 minima successifs, c'est-à-dire 50 oscillations ou 25 périodes de la décharge.

M. Schiller (3) relie les électrodes du fil induit aux armatures d'un condensateur et utilise le second levier pour briser l'une des communications. Un électromètre relié à ces armatures détermine la différence de potentiel qui correspond à l'époque de l'interruption.

Dans les expériences de Bernstein (4), un disque tournant horizontal porte quatre pointes réunies deux à deux sur un

(1) J. Trowbridge et W. C. Sabine, *Ph. mag.* [5], t. XXX. p. 323 ; 1890.

(2) Helmholtz, *Verh. der nat. med. Ver. zu Heidelberg*, Bd V, p. 27 ; 1869. — *Wiss. Abhandlungen*, t. I, p. 531.

(3) Schiller, *Pogg. Ann.*, t. CLII, p. 535 ; 1874.

(4) Bernstein, *Pogg. Ann.*, t. XVII, p. 54 ; 1871.

même diamètre. Les deux premières plongent dans une rigole incomplète à mercure ; elles ferment le circuit primaire et le rompent au bout d'un temps assez long pour que le régime permanent soit établi. Les électrodes du fil induit communiquent aux autres pointes, dont l'une plonge dans une rigole continue, et dont l'autre touche à chaque révolution un fil de fer tendu que l'on peut déplacer par une vis micrométrique. Ce contact ferme le circuit induit sur un galvanomètre. Une seule décharge imprime au galvanomètre une impulsion balistique correspondant à la force électromotrice instantanée et la répétition des effets donnerait une déviation permanente.

Mouton [1] se servait de trois roues A, B et C, montées sur un même arbre tournant. La première établit le courant primaire et le brise à chaque révolution. Après un intervalle très court t, que l'on peut régler à volonté, les deux autres roues B et C font communiquer par des couteaux, pendant un temps qui ne dépasse pas 25.10^{-6} seconde, les extrémités du fil induit avec un électromètre à quadrants, dont l'aiguille est maintenue à un potentiel constant. La répétition du phénomène donne à l'électromètre une déviation permanente qui définit la force électromotrice induite à l'époque t.

Toutes ces observations s'accordent à montrer que les oscillations, à partir de la seconde, sont isochrones, et que leur période ne dépend que de la bobine induite. L'intervalle des deux premières, qui est plus long, dépend du circuit primaire et augmente beaucoup quand la bobine contient une armature de fer doux.

M. Janet [2] place dans le circuit d'un condensateur deux résistances r_1 et r_2, dont la première a un coefficient L, la seconde étant sans induction propre, et détermine par le même disjoncteur à roues les différences de potentiel correspondantes V_1 et V_2 à différentes époques t à partir de la rupture du courant de charge. On a alors, pour la décharge,

$$V_1 = r_1 i + L\frac{di}{dt}, \qquad V_2 = r_2 i.$$

[1] Mouton, *Ann. sc. de l'Éc. norm. sup.* [2], t. VI, p. 207 ; 1877.
[2] P. Janet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXV, p. 875 et 1286 ; 1892.

La quantité V_2 reste positive et V_1 prend alternativement des valeurs de signes contraires avec amortissement; le courant est de la forme

$$i = i_0 \left[1 - e^{-\lambda t} \frac{\cos(\omega t - \alpha)}{\cos \alpha} \right].$$

Si les résistances r_1 et r_2 ont une même valeur r, l'expérience permet d'en déduire le coefficient L, car on a

$$V_1 - V_2 = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{r} \frac{dV_2}{dt},$$

$$\frac{r}{L} = \frac{1}{V_1 - V_2} \cdot \frac{dV_2}{dt}.$$

Les quantités $V_1 - V_2$ et $\frac{dV_2}{dt}$ passent en même temps par leurs valeurs maxima; il n'est donc pas nécessaire que les mesures soient simultanées et il suffit de déterminer le maximum de chacune d'elles. Les nombres obtenus pour L, avec des capacités différentes, s'accordent très bien avec ceux que donnent les autres méthodes (**761**).

Si les décharges induites traversent un galvanomètre, elles impriment à l'aiguille, grâce à son amortissement propre, un mouvement de même période (**534**). Pour appliquer cette méthode, M. Colley [1] observe dans un galvanomètre à miroir l'image d'un trou percé dans un disque tournant; ce disque est muni d'un butoir, de position variable par rapport au trou, pour briser le circuit primaire. Si le miroir était immobile, l'image du trou serait une circonférence; s'il est en vibration, la courbe paraît ondulée et l'amplitude des sinuosités permet d'évaluer la période de vibration. L'emploi d'une flamme manométrique, soumise à l'action d'un électro-aimant excité par le courant du circuit secondaire, donne des résultats analogues quand on l'observe au miroir tournant, mais l'expérience ne paraît pas comporter la même précision.

Avec des condensateurs à diélectrique solide, M. Colley a obtenu, pour $v.10^{-10}$, des nombres variant de 3,015 à 3,097 et il estime, d'après le sens des erreurs probables, que la valeur exacte doit être inférieure au premier nombre.

[1] R. Colley, *Wied. Ann.*, t. XXVI, p. 432; 1885 et t. XXVIII, p. 1; 1886.

Dans un travail plus récent, M. A. Webster utilise la chute d'un poids, soutenu par un électro-aimant, pour établir les contacts successifs qui font communiquer une pile avec un condensateur et relient ensuite les armatures de ce condensateur aux bornes de l'électromètre.

Le condensateur est formé par deux plateaux circulaires d'acier dont la distance e est maintenue uniforme à l'aide de cales cylindriques en verre. La capacité électrostatique c est déterminée par la formule de Kirchhoff (770); le terme de correction ne dépassait pas 0,001 dans les expériences.

Le circuit renfermait une bobine à gorge rectangulaire,

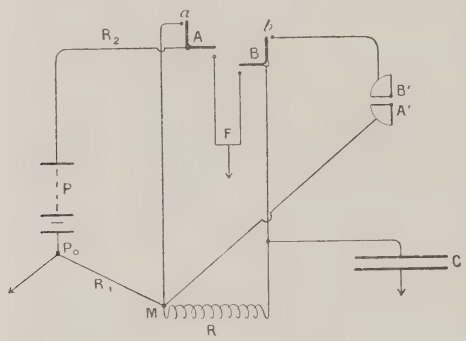


Fig. 235.

dont les dimensions ont été mesurées avec le plus grand soin; le fil était recouvert par une double couche de soie, et la valeur du coefficient de self-induction L a été calculée par la formule de Maxwell (589).

La pile P (fig. 235), dont le pôle P_0 communique au sol, est fermée par un circuit n'ayant pas de self-induction appréciable; nous désignerons par R_1 et R_2 les résistances des deux parties P_0M et MAP_0 de ce circuit. A' et B' représentent les deux paires de quadrants d'un électromètre dont l'aiguille, portée par un fil de quartz, est maintenue à potentiel constant; C est le condensateur, dont l'une des armatures communique au sol, et RL la bobine de self-induction. Des leviers en équerre A et B sont naturellement relevés par des ressorts et ferment les contacts a et b; leurs branches horizontales sont rabattues successivement par la chute du poids; les contacts établis avec

la fourchette F mettent d'abord au sol le second pôle de la pile, puis isolent le quadrant B′ et font communiquer au sol l'armature supérieure du condensateur.

Dans le régime permanent, les deux quadrants de l'électromètre et le condensateur sont au potentiel du point M qui est, en appelant E la force électromotrice de la pile,

$$V_0 = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

L'aiguille reste alors au zéro. Quand le premier contact a est brisé, les deux pôles de la pile sont au sol et le quadrant A se décharge en un temps inférieur à 4.10^{-8} seconde.

Le quadrant B′ et le condensateur se déchargent alors par la bobine; leur potentiel commun, au bout du temps t après la rupture de ce contact, peut s'écrire

$$V = \frac{V_0}{\cos\alpha} e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \alpha).$$

Les oscillations rapides de ce potentiel n'ont pas le temps d'agir sur l'électromètre et l'aiguille reste finalement au zéro si le contact b est brisé à l'une des époques t_n telles que

$$\omega t_n - \alpha = (2n + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Le réglage des leviers permet de faire varier l'intervalle de temps t qui sépare leur mise en mouvement successive par la chute du poids; la différence des époques relatives aux zéros d'ordre n et n' donne

$$\frac{t_{n'} - t_n}{n' - n} = \frac{\pi}{\omega} = \tau = \frac{\pi}{\mathbf{v}} \sqrt{cL}.$$

En réalité, il est encore nécessaire d'ajouter à la capacité c du condensateur un terme complémentaire γ correspondant à la bobine et aux quadrants de l'électromètre. On l'élimine en donnant au condensateur une autre capacité c' et déterminant la valeur nouvelle τ' de la demi-période; il en résulte

$$\frac{\mathbf{v}^2}{\pi^2 L} = \frac{c + \gamma}{\tau^2} = \frac{c' + \gamma}{\tau'^2} = \frac{c' - c}{\tau'^2 - \tau^2}.$$

Les moyennes de plusieurs expériences combinées entre elles de différentes manières ont donné, pour $\mathbf{v}.10^{-10}$, le nombre 3,036 qui paraît encore trop élevé.

Le calcul du coefficient de self-induction a été fait dans l'hypothèse des courants homogènes ; on doit donc en retrancher la demi-longueur du circuit (**411**) pour le cas actuel où la distribution est certainement superficielle, mais cette correction ne diminuerait la valeur de $\mathbf{v}$ que de 3 unités sur le quatrième chiffre significatif.

Remarquons enfin qu'on a supposé, dans l'établissement des formules, que le courant est le même à chaque instant sur toute la longueur du circuit ; il y a, sans doute, un effet de propagation qui n'est pas négligeable et qui suffirait, en dehors des autres causes d'erreur, pour expliquer le petit désaccord qui subsiste entre la théorie et les résultats des expériences.

DISTANCES EXPLOSIVES.

778. Dispositions des expériences. — Sur les surfaces en regard de deux conducteurs assez rapprochés pour provoquer une décharge électrique, les densités sont de signes contraires et l'idée la plus naturelle est de concevoir que la résistance du diélectrique est vaincue lorsque la pression électrostatique (**35**) acquiert une certaine valeur. L'expérience est loin de confirmer cette manière de voir, mais il est intéressant de déterminer dans chaque cas, soit la densité maximum σ, soit la pression correspondante $p = 2\pi\sigma^2$, soit le champ électrique au voisinage de ce point $F = 4\pi\sigma$, ou $F^2 = 8\pi p$.

Ces différentes quantités ont, en même temps, des valeurs constantes, lesquelles sont définies par les potentiels et la forme des conducteurs.

Les potentiels se déterminent en valeurs absolues ou relatives, soit par un électromètre, soit par la bouteille de Lane, quand les électrodes à décharge communiquent avec les armatures d'une batterie groupée en surface ou en cascade.

On obtient encore des mesures comparatives en terminant une des électrodes par deux conducteurs en dérivation A et A′, en face desquels se trouvent respectivement deux conducteurs

B et B′ reliés à la seconde électrode. Les systèmes A et B, A′ et B′, n'ayant pas les mêmes formes ou étant situés dans des conditions différentes, on déterminera les distances e et e' par lesquelles on doit les séparer pour que l'étincelle de décharge passe indifféremment de part ou d'autre. Ces distances sont *équivalentes* dans les deux cas; si la loi est établie pour l'un des systèmes AB, les conditions d'équivalence permettront de la déterminer pour l'autre système.

Il est alors avantageux, pour rendre la comparaison plus

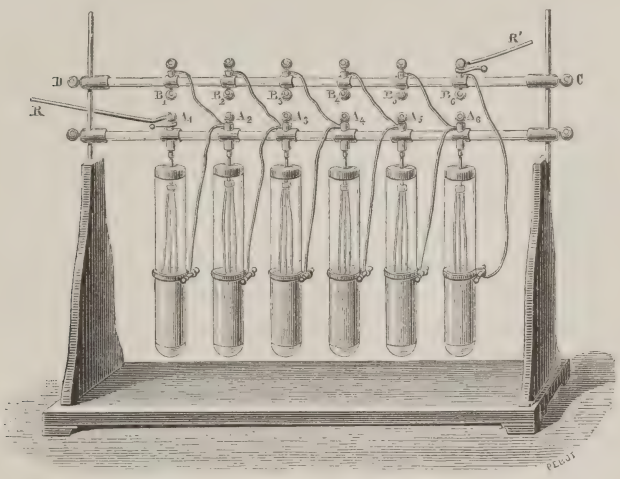


Fig. 236.

exacte, d'interrompre l'un des conducteurs principaux, de manière à obtenir une petite étincelle auxiliaire.

L'un des systèmes AB peut être formé par une série de de jarres en cascade (fig. 236) disposées de manière que les armatures intérieures de deux jarres consécutives communiquent avec deux boules, A_1B_1, A_2B_2 ..., séparées par une distance constante e. Si cette distance est assez petite pour que l'étincelle ne dépende que de la différence ∂V des potentiels et qu'il existe n jarres ainsi réunies, une étincelle se produit en même temps entre toutes les bouteilles au moment de la décharge et la différence de potentiel des électrodes R et R′ est égale à la somme $n\partial V$ des valeurs relatives à toutes les bouteilles. Cette méthode permettra d'équilibrer une grande

distance explosive e' entre les conducteurs A'B', par la somme ne de distances explosives beaucoup plus faibles.

Enfin, le système AB peut être un trop plein électrique (774), pour lequel on a déterminé la relation qui existe entre la distance e et la différence de potentiel qu'il est capable de maintenir. On connaîtra ainsi le potentiel explosif qui correspond à la distance équivalente e' du système A'B'.

Une dernière méthode beaucoup plus précise, mais moins facile à réaliser, consiste à employer une pile électrique ; la différence de potentiel est alors proportionnelle au nombre des couples. Il est vrai que la décharge directe entre les électrodes extrêmes ne fournirait qu'une quantité d'électricité très faible, mais on utilise la pile pour charger des condensateurs de grande capacité dont les armatures sont reliées aux électrodes. Warren de la Rue et H. Muller [1] disposaient d'une pile de 15 000 couples (argent, chlorure d'argent, chlorhydrate d'ammoniaque, zinc), dont la force électromotrice est d'environ $1^{v},03$, et d'une série de condensateurs formant une capacité totale de 42 microfarads. La différence de potentiel pouvait ainsi atteindre 15 450 volts, ou 51 unités électrostatiques, et la capacité 378.10^5 ou 0,06 du rayon terrestre.

779. **Plans parallèles.** — Entre deux plateaux parallèles, aux potentiels V_1 et V_2, le champ électrique est sensiblement uniforme et l'on a

$$F = \frac{V_1 - V_2}{c}, \qquad \sigma = \frac{F}{4\pi} = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

Dans ce cas, le potentiel explosif $V = V_1 - V_2$ est indépendant, pour chaque distance, de la valeur absolue des deux potentiels V_1 et V_2, de sorte que l'un ou l'autre des plateaux peut être mis en communication avec le sol. Pour donner plus de fixité aux étincelles, l'un des plateaux est légèrement sphérique, ce qui ne modifie pas les conditions du problème.

Lord Kelvin [2] a trouvé que, pour des distances explosives

[1] Warren de la Rue et H. Muller, *Phil. Tr. R. S. L.* t. CLXIX, p. 55 et 155 ; t. CLXXI, p. 65 ; t. CLXXIV, p. 447. — *Proc. R. S. L.*, t. XXXVI, p. 151 ; 1883. — *Ann. de Ch. et de Phys.* [5], t. XIII, p. 433 et XV, p. 287 ; 1878. — T. XX, p. 145 ; 1880. — T. XXIV, p. 433 ; 1881.

[2] Sir W. Thomson, *Reprint of papers*, p. 258.

de $0^c,01$ à $0^c,15$, si le potentiel explosif croît avec la distance, le champ électrique correspondant diminue à mesure que la distance augmente et semble tendre vers une valeur limite.

Les nombres obtenus par M. Baille [1], à l'aide d'un électromètre-balance, sont en général 10 p. 100 supérieurs à ceux de Lord Kelvin, mais la distance a varié entre des limites plus étendues, de $0^c,0015$ à 1^c. Quoique les quatre séries qui forment l'ensemble des observations ne se raccordent pas d'une manière absolue, on peut en déduire, comme valeurs approchées, les nombres suivants :

e.	$V = V_1 - V_2$.	$F = 4\pi\sigma$.	$5 + 100e$.	$\frac{\delta V}{\delta e}$.
0,0015	1,42	947	»	
20	1,62	810	»	440
25	1,90	760	»	560
50	2,51	502	»	244
75	2,81	375	»	120
0,010	3,16	316	»	140
20	4,51	225	»	135
30	6,22	207	8	170
50	8,70	174	10	124
70	11,20	160	12	125
0,10	14,67	147	15	116
12	16,84	140	17	108
15	20,22	135	20	113
20	25,51	128	25	106
25	30,47	121	30	99
30	35,35	114	35	98
40	44,75	112	45	94
50	54,42	109	55	96
80	84,86	106	85	101
1,0	105,5	105,5	105	103

Les expériences de M. Liebig [2] avec des sphères de $9^c,76$ de rayon donnent des résultats entièrement de même ordre.

(1) G.-B. Baille, *Ann. de Ch. et de Phys.* [5], t. XXV, p. 486 ; 1882 et t. XXIX, p. 181 ; 1883.

(2) Liebig, *Ph. Mag.* [5], t. XXIV, p. 106 ; 1887.

A part quelques irrégularités, dont il convient de faire abstraction, ce tableau conduit à plusieurs remarques :

1° Le potentiel explosif diminue avec la distance, mais, au lieu de tendre vers zéro, il semble avoir une limite voisine de 1,25 ou 1, c'est-à-dire qu'une différence de potentiel finie, voisine de 400 ou de 300 volts, serait nécessaire pour produire l'étincelle à une distance infiniment petite.

2° Il n'existe aucune relation directe entre le champ électrique (ou la densité) et la distance explosive; le champ diminue à mesure que la distance explosive augmente.

3° La dernière colonne montre que la dérivée du potentiel explosif par rapport à la distance est sensiblement constante et égale à 100 à partir de $e = 0^c,07$. La courbe des potentiels en fonction de la distance diffère alors très peu de la droite L, représentée par $V = 5 + 100e$; les différences de la seconde et de la quatrième colonne sont, en effet, de l'ordre des erreurs d'observation.

4° La dérivée du potentiel semble même passer par un maximum au voisinage de $e = 0,002$. La courbe V, devenue inférieure à la droite L, aurait un point d'inflexion et pourrait passer par un minimum V_0 pour une certaine distance e_0, au-dessous de laquelle la dérivée serait négative. Si la conclusion est exacte, il y aurait une distance critique e_0 au-dessous de laquelle l'accroissement de distance faciliterait la production des étincelles. Ce fait imprévu sera confirmé par les expériences à basse pression.

780. **Sphères égales.** — Dans l'intervalle de deux sphères de même rayon le champ n'est plus uniforme. Si l'une des sphères communique au sol, le maximum de densité aux points opposés du diamètre commun se trouve sur celle qui est électrisée et il est possible de calculer dans chaque cas la valeur correspondante F du champ électrique maximum.

Les expériences de M. Baille sont assez concordantes avec celles de M. Paschen [1]. Nous reproduirons quelques-uns des nombres obtenus par M. Baille dans deux séries qui présentent de légères différences aux distances communes, en y ajoutant, comme termes de comparaison, les valeurs relatives à deux plans parallèles :

[1] Paschen, *Wied. Ann.*, t. XXXVII, p. 79; 1889.

Distance des surfaces.	Plans parallèles.		Diamètre des sphères. 6c.		3c.		1c.		0c,35.	
e.	V.	F.	V.	F.	V.	F.	V.	F.	V.	F.
0c,05	8,94	179	8,96	180	9,18	186	9,18	190	9,30	206
10	14,70	147	14,78	149	14,99	153	15,25	163	16,04	198
20	25,42	127	25,59	131	25,95	137	26,78	154	27,13	219
30	35,35	118	36,12	124	36,59	130	37,32	156	36,29	253
40	45,28	113	46,34	122	46,77	129	47,62	164	41,77	272
40	44,80	112	45,00	118	45,00	124	45,50	157	41,07	268
50	54,35	109	55,06	117	54,96	125	54,66	166	47,21	296
60	63,82	106	60,23	116	65,23	125	65,23	181	53,75	327
70	74,09	106	75,40	117	73,79	126	72,28	188	56,47	339
80	84,83	106	87,98	123	84,76	130	77,61	191	58,79	349
1,00	105,5	105	112,94	128	104,69	133	83,05	194	59,49	349

Ce tableau donne lieu encore à plusieurs remarques :

1° Dans tous les cas, le potentiel explosif croît moins vite que la distance.

2° A partir des plans et pour une même distance, le potentiel explosif croît d'abord pour diminuer ensuite et prend une valeur maximum pour un certain diamètre des sphères. Ce diamètre *critique* diminue avec la longueur de l'étincelle ; les nombres correspondants ont été soulignés.

3° Le champ maximum croît toujours à mesure que le diamètre diminue.

4° Pour un même système de sphères, le champ ne diminue pas d'une manière continue, comme pour les plans, à mesure que la distance augmente, mais il passe par une valeur minimum pour des distances d'autant moindres que le diamètre est plus faible; les nombres relatifs à ce minimum ont été soulignés de deux traits.

La conséquence principale est que la longueur de l'étincelle dépend en même temps de la densité maximum et de la forme des surfaces. On peut rapprocher cette observation du résultat obtenu par Gaugain [1], que la densité explosive entre deux cylindres concentriques est indépendante du rayon du cylindre extérieur. Toutefois la question mérite d'être examinée de plus près.

[1] Gaugain, *Ann. de Ch. et de Phys.* [4], t. VIII, p. 75; 1866.

781. Problème des deux sphères. — Le champ produit par deux sphères voisines à des potentiels différents peut être déterminé par le principe des images (**114**). Considérons deux sphères A et A′ de rayons a et a', dont les centres sont O et O′. La première ayant reçu une charge primitive q et la seconde étant au sol, les charges des images successives sont $-q_1$, q_2, $-q_3$, q_4, ..., les images négatives d'ordre impair étant situées à l'intérieur de la sphère A′ et les autres dans la sphère A. Par la superposition des couches relatives à toutes ces images, le potenliel V_1 sur la première sphère est $q = aV_1$ et le potentiel est nul sur la seconde.

Désignant par $a'x_1$, $a'x_3$, ..., les distances des images q_1, q_3, ..., au centre O′, par ax_2, ax_4, ..,, celles des images q_2, q_4, ..., au centre O, et par $ca = c'a'$ la distance OO′ des centres, la condition des points conjugués (**111**) donne

$$(1)\qquad \begin{cases} cx_1 = (c - x_2)x_3 = \ldots = (c - x_{2n})\,x_{2n+1} = \dfrac{a'}{a}, \\[2ex] (c' - x_1)x_2 = \ldots = (c' - x_{2n-1})x_{2n} = \dfrac{a}{a'}, \end{cases}$$

ou d'une manière générale, en posant $a' = ba$, d'où $c = bc'$,

$$(1)'\qquad c - x_{2n} = \frac{b}{x_{2n+1}}, \qquad c - bx_{2n-1} = \frac{1}{x_{2n}}.$$

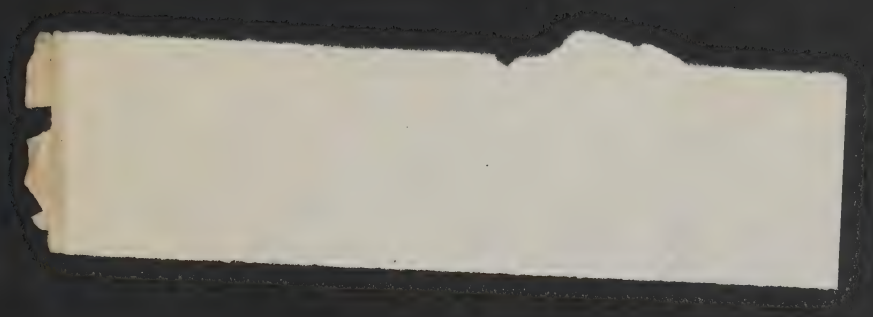
D'autre part, les charges successives sont

$$(2)\qquad q_1 = qx_1, \quad q_2 = q_1x_2 = qx_1x_2, \ldots, \quad q_n = qx_1x_2, \ldots. x_n.$$

Pour déterminer les valeurs F_1 et F'_1 du champ électrique au voisinage des points B et B′ où le diamètre commun rencontre les surfaces en regard, on remarquera que la distance du point B à l'image q_{2n} est égale à $a(1 - x_{2n})$ et sa distance à l'image $-q_{2n-1}$ peut s'écrire, d'après (1)′,

$$a'(c' - x_{2n-1}) - a = a(c - bx_{2n-1} - 1) = a\,\frac{1 - x_{2n}}{x_{2n}}.$$

De même, les distances du point opposé B′ aux deux



images $-q_{2n+1}$ et q_{2n} sont $a'(1-x_{2n+1}) = ab(1-x_{2n+1})$ et

$$a(c-x_{2n}) - a' = a(c-x_{2n}-b) = ab\,\frac{1-x_{2n+1}}{x_{2n+1}}.$$

On a ainsi, par l'ensemble de toutes ces masses,

$$F_1 = \frac{1}{a^2}\left[q + \ldots + \frac{q_{2n}}{(1-x_{2n})^2} + \frac{q_1 x_2}{(1-x_2)^2} + \ldots + \frac{q_{2n-1}x_{2n}}{(1-x_{2n})^2}\right],$$

$$F'_1 = \frac{1}{a^2 b^2}\left[\frac{q_1}{(1-x_1)^2} + \ldots + \frac{q_{2n+1}}{(1-x_{2n+1})^2} + \frac{q_1 x_1}{(1-x_1)^2} + \ldots + \frac{q_{2n+1}x_{2n+1}}{(1-x_{2n+1})^2}\right],$$

ou, en groupant les termes deux à deux et remplaçant les charges par leurs valeurs (2),

$$(3)\quad \begin{cases} F_1 = \dfrac{q}{a^2}\left[1 + x_1 x_2 \dfrac{1+x_2}{(1-x_2)^2} + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_{2n} \dfrac{1+x_{2n}}{(1-x_{2n})^2}\right] \\ F'_1 = \dfrac{q}{a^2 b^2}\left[x_1 \dfrac{1+x_1}{(1-x_1)^2} + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_{2n+1} \dfrac{1+x_{2n+1}}{(1-x_{2n+1})^2}\right]. \end{cases}$$

Désignant par y_1 et y'_1 les séries précédentes, on peut écrire

$$(3)'\qquad F_1 = \frac{V_1}{a}\,y_1, \qquad F'_1 = \frac{V_1}{ab^2}\,y'_1.$$

Un calcul analogue déterminerait les valeurs $-F'_2$ et $-F_2$ du champ aux mêmes points B′ et B lorsque la sphère A′ est au potentiel V_2 et l'autre au sol :

$$-F'_2 = \frac{V_2}{a'}\,y'_2, \qquad -F_2 = \frac{V_2}{a'}\,b^2 y_2 = \frac{V_2}{a}\,b y_2.$$

Enfin, la superposition des deux états correspond au cas où les potentiels sont respectivement V_1 et V_2 ; le champ F au point B est alors

$$(4)\qquad F = F_1 - F_2 = \frac{1}{a}(V_1 y_1 - b V_2 y_2).$$

Ces différentes séries ne sont pas sous une forme commode pour le calcul, parce que les facteurs $x_1, x_2, \ldots$ se déduisent

successivement les uns des autres. Leur convergence est lente pour des sphères très voisines, mais elles sont utilisables dès que cette distance est supérieure à la moitié du plus petit rayon. En effet, à partir d'un certain terme, les suivants peuvent être considérés comme une progression géométrique, en remplaçant le produit $x_n x_{n+1}$ par sa valeur limite.

Les valeurs limites x et x' de x_{2n} et x_{2n+1} correspondent aux points respectivement conjugués par rapport aux deux sphères. Pour la limite x, on déduit de la relation

$$\frac{b^2}{c - x_{2n}} = b x_{2n+1} = c - \frac{1}{x_{2n+2}},$$

$$(5) \qquad \begin{cases} (c - x)\left(c - \dfrac{1}{x}\right) = b^2, \\ x^2 - \dfrac{c^2 - b^2 + 1}{c} x + 1 = 0. \end{cases}$$

Les deux racines de cette équation sont positives, l'une inférieure et l'autre supérieure à l'unité, et l'on doit prendre la plus petite racine. La valeur de x' s'obtiendrait, de même, en remplaçant c par c' et b par son inverse.

Lorsque les sphères sont d'égal rayon, auquel cas $b = 1$ et $y_2 = y'_1$, on a plus simplement

$$(5)' \qquad x(c - x) = 1, \qquad 2x = c - \sqrt{c^2 - 4},$$

$$(6) \qquad F = \frac{1}{a}(V_1 y_1 - V_2 y_2).$$

En outre, si l'on suppose $V_1 + V_2 = 0$, il en résulte

$$(7) \quad F = \frac{V_1}{a}\left[1 + x_1 \frac{1 + x_1}{(1 - x_1)^2} + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_n \frac{1 + x_n}{(1 - x_n)^2}\right] = \frac{2V_1}{a} y.$$

Pour une même différence $V = V_1 - V_2$ de potentiel, les champs F et F_1 sont respectivement proportionnels à y ou y_1, suivant que les sphères sont à des potentiels égaux et de signes contraires ou que l'une d'elles est au sol. Il est manifeste que l'intensité du champ et, par suite, la densité élec-

trique sont moindres dans le premier cas que dans le second et que leur rapport tend vers la limite 0,5 à mesure que la distance augmente.

Poisson [1] a traité le problème de deux sphères d'une manière générale et donné l'expression de la densité en chaque point en dehors du diamètre commun. Par la même méthode, Kirchhoff [2] a développé les séries y_1 et by_2 de l'équation (4) en fonction de la valeur limite x.

Ces séries peuvent s'écrire, en posant

$$p^2 = \frac{bx}{c-x} = \frac{cx-1}{b}, \qquad \text{d'où} \qquad p^4 = \frac{x(cx-1)}{c-x},$$

$$(8)\quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{(1+x)^2}{1-x}\left[\dfrac{1-x}{(1+x)^2} + \ldots + p^{2n}\dfrac{1-p^{4n}x}{(1+p^{4n}x)^2}\right], \\ by_2 = \dfrac{(1+x)^2}{1-x}\,p^2\left[\dfrac{x-p^4}{(x+p^4)^2} + \ldots + p^{2n}\dfrac{x-p^{4n+4}}{(x+p^{4n+4})^2}\right]. \end{cases}$$

Pour des sphères égales on a, en tenant compte de (5)',

$$p^2 = \frac{x}{c-x} = x^2, \qquad p = x,$$

$$(8)'\quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{(1+x)^2}{1-x}\left[\dfrac{1-x}{(1+x)^2} + \ldots + x^{2n}\dfrac{1-x^{4n+1}}{(1+x^{4n+1})^2}\right], \\ y_2 = \dfrac{(1+x)^2}{1-x}\left[x\dfrac{1-x^3}{(1+x^3)^2} + \ldots + x^{2n+1}\dfrac{1-x^{4n+3}}{(1+x^{4n+3})^2}\right]; \end{cases}$$

$$2y = y_1 + y_2 = \frac{(1+x)^2}{1-x}\left[\frac{1-x}{(1+x)^2} + \ldots + x^n\frac{1-x^{2n+1}}{(1+x^{2n+1})^2}\right].$$

On remarquera que l'une quelconque des fractions comprises dans les parenthèses peut s'écrire

$$\frac{1-x^m}{(1+x^m)^2}\cdot\left(\frac{1-x^m}{1-x^m}\right)^2 = \frac{(1-x^m)^3}{(1-x^{2m})^2}.$$

M. Schuster [3] a calculé une Table de la fonction y_1 à partir

(1) Poisson, *Mem. de l'Institut*, pour 1811, p. 1 et 163.
(2) R. Kirchhoff, *Journal de Crelle*, t. LIX, p. 89; 1861.
(3) A. Schuster, *Phil. Mag.* [5], t. XXIX, p. 182; 1890.

de $c = 2,1$; c'est cette table qui a servi à déterminer le champ maximum F dans les expériences précédentes (780).

Lorsque la distance e des sphères est inférieure à cette limite, les séries ne sont plus assez convergentes; un autre calcul de Kirchhoff conduit à l'expression suivante, que l'on peut réduire à ses deux premiers termes :

$$F_1 = \frac{V_1}{e}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{e}{a} + \frac{1}{45}\frac{e^2}{a^2} + \cdots\right] = \frac{V}{e}u.$$

Le rapport des séries y et y_1 est égal à l'unité quand la différence $c - 2$ est très petite et varie d'abord très lentement. Nous avons calculé également les valeurs de y, qu'il est utile de considérer dans certains cas.

SPHÈRES ÉGALES.

c.	y_1.	y.	$\frac{y_1}{y}$.	u.
2,1	10,335	10,325	1,001	1,0335
2,2	5,342	5,331	1,002	1,0684
2,3	3,687	3,671	1,004	1,1061
2,4	2,875	2,840	1,012	1,1500
2,5	2,398	2,345	1,023	1,1990
2,7	1,876	1,782	1,053	1,3132
3,0	1,517	1,359	1,116	1,5170
3,5	1,273	1,040	1,224	1,9095
4	1,169	0,885	1,321	2,338
5	1,084	0,738	1,469	3,252
6	1,050	0,669	1,570	4,200
8	1,024	0,605	1,692	6,144
10	1,014	0,575	1,764	8,112
100	1,002	0,506	1,980	»

A une distance déterminée et pour une même valeur du champ maximum, les différences de potentiel dans les deux conditions considérées sont en rapport inverse des quantités correspondantes y et y_1. Si l'étincelle ne dépend que de la densité électrique et de la forme des conducteurs, le potentiel explosif tend donc à devenir double lorsque les sphères sont à des potentiels égaux et de signes contraires.

Ce calcul permettrait aussi de déterminer l'action réciproque de deux sphères dont l'une A′ communique au sol, puisque c'est la somme des attractions exercées par l'ensemble des masses positives q, q_2, ..., q_{2n} contenues dans la première A sur les masses négatives q_1, q_3, ..., q_{2n+1} de la seconde.

Si le rapport b des rayons est assez petit, on obtiendra une grande approximation en supposant : 1° que toute la charge $Q' = q_1 + q_3 + \ldots q_{2n+1}$ de la seconde sphère est à la même distance x' du centre, au point conjugué du centre O de la première; 2° que toutes les images $q_2 + \ldots, + q_{2n} = Q_2$ de la première se trouvent à la même distance x, au point conjugué du centre O′, la charge totale de cette sphère étant $q + Q_2 = Q$. On a alors

$$Q' = Q\frac{x'}{a'}, \qquad Q_2 = Q'\frac{x}{a} = Q\frac{xx'}{aa'};$$

$$Q = q + Q\frac{xx'}{aa'}, \qquad Q = \frac{q}{1 - \dfrac{xx'}{aa'}}.$$

En désignant par d la distance des centres, l'action réciproque f est alors

$$f = \left[\frac{q}{(d-x)^2} + \frac{Q_2}{(d-x-x')^2}\right] Q',$$

$$f = q^2 \frac{x'}{a'\left(1 - \dfrac{xx'}{aa'}\right)} \left[\frac{1}{(d-x)^2} + \frac{x}{a(d-x-x')^2}\right].$$

Comme on a $q = aV_1$, les distances x et x' étant déterminées par les relations

$$dx' = a'^2, \qquad (d - x')x = a^2,$$

on en déduira le potentiel V_1 par l'attraction f et les données de l'expérience; ce calcul pourra convenir pour l'électromètre à oscillations indiqué plus haut (**611**).

782. Longues étincelles. — Ces considérations théoriques étaient nécessaires pour discuter les expériences dans lesquelles on obtient des étincelles de grande longueur, ou plus

exactement, les décharges entre deux sphères égales, dont la distance des surfaces est supérieure à leur rayon commun.

L'expérience présente des difficultés sérieuses à cause des tiges de communication et des conducteurs extérieurs, de sorte que le phénomène ne se réduit plus uniquement à l'action des deux sphères. Sous cette réserve, je rapporterai les résultats de quelques observations.

Les boules d'un excitateur ont été reliées aux armatures extrêmes d'une batterie en cascade dont la charge était évaluée, pour une même distance explosive, par le nombre n ou n_1 des étincelles d'une bouteille de Lane, suivant que les électrodes étaient à des potentiels égaux et de signes contraires ou l'une d'elles réunie au sol.

En appelant d le diamètre des boules, la quantité $c = 2 + \frac{2e}{d}$ détermine les coefficients y et y_1 rélatifs aux deux cas. La différence de potentiel des électrodes est proportionnelle aux nombres n_1 ou n d'étincelles et le rapport des valeurs maxima correspondantes du champ électrique est $\rho = \frac{n_1 y_1}{n y}$. Les valeurs obtenues ρ et ρ' pour ce rapport, avec des boules ayant $1^c,9$ et $1^c,5$ de diamètre, ont été, par exemple :

DISTANCES EXPLOSIVES e.

	1c.	2c.	3c.	4c.	5c.	6c.	7c.	8c.
ρ	1,13	1,17	1,26	1,28	1,21	1,19	1,16	1,13
ρ'	1,16	1,37	1,47	1,53	1,56	1,52	»	»

La densité explosive est toujours plus grande lorsque l'une des électrodes communique au sol. La production des étincelles ne dépend donc pas seulement du champ maximum et de la forme des surfaces; l'état du milieu tout entier qui sépare les électrodes intervient dans le phénomène.

Avec cette disposition de potentiels égaux et de signes contraires, il est intéressant de voir comment varie le potentiel explosif pour les distances auxquelles on peut obtenir la décharge dans les machines électriques.

L'expérience suivante a été faite entre deux boules de 3^c de

diamètre [1], par une méthode d'équivalence avec une batterie de jarres en cascade à étincelles intermédiaires (778).

Les nombres inscrits dans les colonnes successives indiquent d'abord la longueur e des étincelles et les valeurs relatives A du potentiel explosif. En admettant que ce potentiel soit égal à 15 pour la distance d'un millimètre, comme dans les expériences de M. Baille, on aura en général $V = 15\,A$.

Les coefficients u ou y correspondant au rapport c déterminent ensuite le champ électrique maximum.

BOULES DE 3^c DE DIAMÈTRE.

e.	A.	V.	c.	F.
$0^c,1$	1	15	2,07	153
0,5	4,9	73	2,33	163
1,0	8,3	124	2,67	168
1,5	10,3	154	3,0	140
2	11,8	177	3,33	132
3	14,0	210	4,0	123
4	15,9	238	4,67	122
5	17,3	259	5,33	123
6	18,5	277	6,0	124
7	19,6	299	6,67	125
8	20,5	307	7,33	127
9	21,1	316	8,0	127
10	21,7	325	8,67	129
12	22,5	337	10,0	127
15	23,3	350	12	126

Quoique les expériences ne comportent qu'une approximation relative de $\frac{1}{20}$, il est manifeste que le champ passe par une valeur minimum pour une distance voisine de 4^c, c'est-à-dire dix fois moindre que si l'une des boules était au sol.

Le potentiel explosif croît notablement moins vite que la distance et paraît tendre vers une limite inférieure à 400, ce qui ferait 120 000 volts ; les très longues étincelles des machines

[1] MASCART, *Traité d'Électr. stat.* t. II, p. 87; 1876.

électrostatiques ou des appareils d'induction ne doivent pas correspondre à des potentiels beaucoup plus élevés.

On conçoit d'ailleurs que la décharge d'un corps électrisé finisse par être indépendante de la distance des conducteurs qui l'entourent. La longueur des éclairs, par exemple, n'implique pas que le potentiel des nuages soit hors de proportion avec ceux qu'on réalise dans les laboratoires.

783. Électrodes de formes différentes. — Entre deux sphères dont l'une n'est pas isolée, le potentiel explosif est sensiblement le même, pour des distances modérées, quel que soit le signe de celle qui communique au sol.

Toutefois, dès que les potentiels deviennent plus élevés, il est manifestement plus difficile de conserver les charges négatives et l'électricité ne tarde pas à s'échapper sous forme d'aigrettes avant de produire une véritable étincelle.

La loi des distances explosives est ainsi modifiée par le seul fait du changement de signe des électrodes.

Les différences deviennent encore plus grandes quand les électrodes ne sont plus symétriques. Entre une pointe et un plateau, par exemple, la distance est plus grande, pour des potentiels inférieurs à 10, quand la pointe est négative et, pour des potentiels plus élevés, quand la pointe est positive.

On peut ainsi constituer de véritables *soupapes électriques*, qui laissent passer la décharge dans un sens et l'interrompent dans le sens opposé.

En employant deux paires d'électrodes A et A′ sur le premier conducteur, B et B′ sur le second, telles que A et B′ soient des pointes ou des sphères de petit diamètre, A′ et B des sphères plus grandes ou des plateaux respectivement à la même distance, la décharge franchira l'un ou l'autre des deux intervalles et passe ainsi d'un côté ou de l'autre quand on permute les signes des électrodes.

L'expérience est facile à réaliser avec les bobines d'induction quand la distance considérée est assez grande pour interrompre l'une des décharges induites.

On a vu déjà que, pour des distances notables entre deux sphères, le potentiel explosif diminue rapidement avec leur diamètre. Le calcul relatif aux sphères cesse bientôt d'être applicable parce qu'on doit les porter par des conducteurs

dont l'influence n'est plus négligeable et les électrodes deviennent plutôt assimilables à des pointes ; les distances explosives sont alors beaucoup plus grandes. Nous citerons encore, à titre d'exemple, quelques-uns des résultats obtenus par Warren de la Rue et H. Muller.

DISTANCE EXPLOSIVE.

Volts.	Deux plateaux.	Pointe + et disque —	Deux pointes paraboliques.
1000	0c,020	0c,012	0c,017
2000	43	57	49
3000	66	0,138	0,138
4000	91	245	308
5000	0,118	403	511
6000	147	563	684
7000	180	704	850
8000	215	845	1,012
9000	249	971	1,160
10000	286	1,087	1,291
11000	324	1,199	1,313
12000	357	1,306	1,524
13000	407	1,408	1,627
14000	446	1,514	1,715
15000	488	1,612	1,796
15450	0,503	1,660	1,850

Pour les deux dernières colonnes, la distance explosive est à peu près proportionnelle au carré de la différence de potentiel jusqu'à 8000 volts, et croît ensuite moins rapidement.

On voit encore, à part les premiers nombres, que la distance explosive augmente d'une colonne à la suivante. Pour 15000 volts ou 50 unités électrostatiques, cette distance varie dans les rapports de 1 à 3,30 et 3,68.

784. **Nature du gaz.** — Les courbes de potentiel explosif présentent la même allure dans les autres gaz, tels que l'*acide carbonique*, l'*hydrogène* et le *gaz d'éclairage*. Les résultats obtenus par comparaison avec les étincelles dans l'air, à l'aide des dérivations équivalentes, ne présentent pas beaucoup de

concordance, sans doute à cause de l'influence très inégale des parois de la cloche dans laquelle on est obligé de renfermer ces gaz. Il semble cependant que, dans les mêmes conditions, le rapport du potentiel explosif à celui de l'air serait voisin de l'unité pour l'*acide carbonique*, de 0,63 pour l'*hydrogène* et de 0,86 pour le *gaz d'éclairage*.

D'après Natterer [1], la distance explosive est beaucoup plus grande dans la vapeur de *mercure*, qui est monoatomique, que dans les gaz considérés comme diatomiques, tels que l'*oxygène*, l'*azote*, l'*hydrogène*, l'*oxyde de carbone*, etc., et elle diminue encore dans les gaz dont la structure moléculaire est plus complexe.

MM. Collie et Ramsay [2] ont trouvé aussi que, pour une même différence de potentiel, la distance explosive était de $2^c,3$ dans l'*oxygène*, de $3^c,3$ dans l'*air* et de $3^c,9$ dans l'*hydrogène*, tandis qu'elle atteignait jusqu'à $4^c,6$ dans l'*argon* et plus de 25^c dans l'*hélium*. Si l'on attribue ces variations à la constitution des molécules, il en résulterait que l'hélium est un gaz monoatomique.

785. **Influence de la pression.** — Le potentiel explosif, toutes choses égales, dépend de la pression du gaz ou plutôt de sa densité. Les variations de température, en effet, ne paraissent avoir d'autre influence que celle qui résulte des densités correspondantes. Si les électrodes sont situées dans un vase clos qui renferme une masse de gaz déterminée, on peut porter la température jusqu'à 300° sans modifier les conditions des étincelles; le potentiel explosif diminue alors quand on met le vase en communication avec l'air extérieur.

Le potentiel pourrait diminuer, au contraire, jusqu'à devenir nul, si l'échauffement produisait dans le gaz des modifications chimiques telles qu'une dissociation.

A partir d'une atmosphère, le potentiel explosif croît d'abord proportionnellement à la pression. D'après les expériences de M. Wolf [3], faites entre 1 et 5 atmosphères avec des électrodes sphériques de 5^c de rayon à la distance de 1^{mm}, le champ maximum serait de la forme $F = ap + b$, p désignant

(1) Natterer, *Wied. Ann.*, t. XXXVIII, p. 663; 1889.
(2) Collie et Ramsay, *Proceed. R. S. L.*, t. LIX, p. 257; 1896.
(3) Wolf, *Wied. Ann.*, t. XXXVII, p. 306; 1889.

la pression en atmosphères, a et b des constantes particulières à chaque gaz qui seraient, par exemple :

	a.	b.
Hydrogène.	65,09	62
Oxygène.	96,0	44
Azote.	120,8	50
Air	107	39
Acide carbonique. . . .	102,2	72

Cette relation linéaire ne peut être généralisée; M. Cailletet a observé, par exemple, qu'une bobine d'induction, capable de fournir dans l'air des étincelles de 30^c, n'en donnait plus entre deux fils de platine éloignés de $0^{mm},5$ dans un gaz sec à la pression de 30 à 40 atmosphères (1).

La loi précédente ne tarde pas aussi à se montrer en défaut à mesure que la pression diminue; la courbe du potentiel explosif serait une droite courbée en branche d'hyperbole. M. Paschen (2) a fait la remarque intéressante que, pour des pressions variant de 25^c à 125^c de mercure, le potentiel explosif entre deux boules de 3^c de diamètre est sensiblement proportionnel à la pression et que, pour chaque gaz, ce potentiel est sensiblement une fonction linéaire du produit de la pression par la distance explosive.

786. Minimum de résistance. — La nature du phénomène est entièrement modifiée dès que la pression devient beaucoup plus faible. A distance constante, le potentiel explosif, au lieu de diminuer d'une manière continue avec la pression, passe par une valeur minimum pour une pression déterminée ϖ, que l'on peut appeler *pression critique*.

La pression critique varie avec la distance explosive et aussi avec la forme des vases qui renferment les électrodes; Warren de la Rue et H. Muller ont trouvé, par exemple, que la pression critique était de 3^{mm} dans des tubes larges et seulement de $0^{mm},38$ dans des tubes étroits.

Pour éliminer autant que possible cette influence du vase, M. Peace a pris comme électrodes des surfaces planes; quel-

(1) L. Cailletet, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. LXXIV, p. 1282 ; 1872.
(2) Paschen, *Wied Ann.*, t. XXXVII, p. 69 ; 1889.

ques-uns des résultats ainsi obtenus sont indiqués dans la figure 237, où les ordonnées représentent les potentiels en unités électrostatiques, et les abscisses les pressions en centimètres de mercure, les courbes étant relatives à différentes distances explosives. Plusieurs conclusions s'en dégagent :

1° Pour des potentiels inférieurs à 1, ou 300 volts, aucune étincelle n'a lieu, quelles que soient la distance et la pression.

2° A mesure que la distance explosive croît, la pression critique ϖ diminue, mais le potentiel correspondant augmente.

3° Pour de petites distances, telles que $0^c,001$, le potentiel

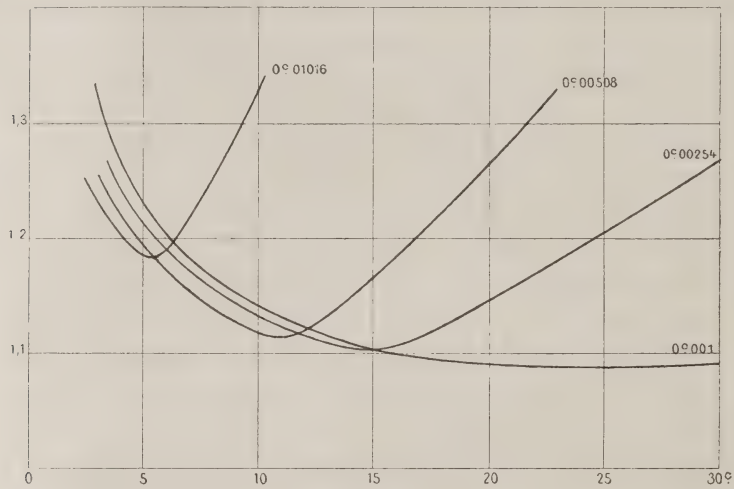


Fig. 237.

change très peu pendant que la pression varie entre des limites très écartées.

4° Enfin, et c'est là le phénomène le plus inattendu, deux courbes quelconques ont un point d'intersection. A la pression de 5^c, par exemple, le potentiel explosif est plus faible pour des étincelles de $0^c,01$ que pour celles de $0^c,001$.

Ce résultat a été confirmé directement par M. Peace en employant un plateau légèrement convexe. Au voisinage de la pression critique, les étincelles laissent leur trace sur le métal par un anneau circulaire autour du point qui correspond à la moindre distance.

5° Il est naturel de chercher si la distance explosive qui

correspond à la pression critique est en relation avec quelque autre propriété des gaz, par exemple avec le *libre parcours moyen* des molécules, mais ce parcours est en raison inverse de la pression, tandis que la distance explosive considérée croît plus rapidement; elle est d'ailleurs d'un ordre de grandeur tout différent, comme on le voit par les résultats suivants où le libre parcours moyen a été calculé en adoptant $0^{mm},1$ pour la pression de 76^c.

Potentiel explosif. V.	Pression critique. ϖ.	Distance explosive. e.	Libre parcours moyen.
1,08	25^c	$0^c,001$	$0^c,00003$
1,10	15	0,00254	0,00005
1,11	11	0,00508	0,00007
1,18	5,5	0,01016	0,00014
1,23	3,5	0,02032	0,00022

Au-dessous de la pression critique, la résistance du gaz augmente rapidement, au point qu'il devient difficile d'y produire des étincelles, et l'électricité ne traverse pas le vide absolu. Cette propriété importante, dont on pourrait déjà trouver l'indication dans des expériences anciennes, paraît avoir été démontrée d'abord par Masson [1]; elle a été confirmée depuis par différents observateurs, à mesure que les procédés de raréfaction se sont améliorés.

Il est intéressant de remarquer que si le potentiel explosif continuait de diminuer avec la pression, au point que le vide devint bon conducteur de l'électricité à la manière des métaux, la théorie de Maxwell exigerait alors que les espaces interplanétaires soient opaques à la lumière.

787. Pressions très faibles. — Tubes sans électrodes. — Quand la décharge a lieu entre des électrodes métalliques, dans un tube à gaz très raréfié, ces électrodes modifient beaucoup les conditions du phénomène. M. J. J. Thomson a eu l'idée ingénieuse d'employer des tubes sans électrodes, des tubes annulaires par exemple, ou de simples boules, afin que la masse du gaz soit seule à intervenir. Les appareils consti-

[1] Masson, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. XXXI, p. 314; 1851.

tuent alors des circuits fermés, de formes plus ou moins variées, et l'on doit recourir aux effets d'induction pour obtenir des forces électromotrices finies capables de provoquer l'illumination du gaz.

Si le courant inducteur est produit par une série de décharges de caractère alternatif (399) à faible amortissement, les premières oscillations seront surtout efficaces et on peut considérer la charge q de l'appareil primaire comme représentée par $q_0 \cos \omega t$. On a alors, pour le courant inducteur,

$$I = -\frac{dq}{dt} = q_0 \omega \sin \omega t, \qquad \frac{dI}{dt} = q_0 \omega^2 \cos \omega t.$$

En désignant par C et L la capacité et le coefficient de self-induction de l'appareil primaire, et par V_0 le potentiel explosif, il en résulte

$$\omega^2 = \frac{1}{CL}, \qquad q_0 = CV_0, \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{V_0}{L} \cos \omega t.$$

Si M est le coefficient d'induction mutuelle entre le circuit primaire et le tube à gaz, la force électromotrice induite est

$$E = M \frac{dI}{dt} = V_0 \frac{M}{L} \cos \omega t.$$

Les armatures d'un condensateur sont reliées par un conducteur renfermant une hélice de quelques spires.

L'expérience peut être disposée de plusieurs manières diffé-

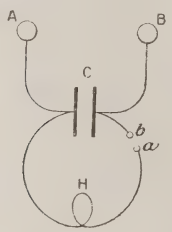


Fig. 238.

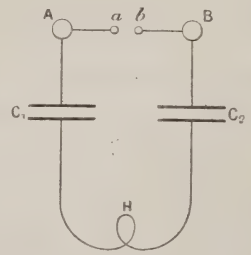


Fig. 239.

rentes. Dans la figure 238, les pôles A et B d'une machine électrostatique sont reliés aux armatures d'un condensateur C dont le circuit renferme l'hélice H et un interrupteur ab pour

règler le potentiel explosif. Dans la figure 239, on a disposé deux condensateurs en cascade C_1 et C_2 reliés aux pôles A et B; l'hélice H est située sur la communication des autres armatures et l'interrupteur ab entre les pôles de la machine. Pour éviter tout effet d'induction électrostatique, on relie au sol le milieu de l'hélice H.

Quant aux appareils à gaz raréfié, on les place autour de l'hélice s'ils ont la forme annulaire, ou dans l'intérieur même de cette hélice s'il s'agit d'une simple boule.

A même potentiel explosif, l'amplitude de la force électromotrice d'induction est proportionnelle au rapport des coefficients M et L, qu'il faut rendre maximum. La valeur de M est proportionnelle au nombre n des spires de l'hélice et peut s'écrire βn; le coefficient L comprend d'abord un terme L_0 relatif au conducteur étranger à l'hélice et un autre terme αn^2 proportionnel au carré du nombre de spires. Il en résulte

$$\frac{M}{L} = \frac{\beta n}{L_0 + \alpha n^2}.$$

Cette expression est maximum pour $L_0 = \alpha n^2$, $L = 2 L_0$. Toutefois il est préférable de prendre un nombre de spires supérieur à cette limite, afin de rendre L plus grand et de diminuer l'amortissement des oscillations primaires.

788. Apparences des décharges. — Dans une boule de verre où l'on raréfie l'air progressivement, il se produit un anneau rougeâtre vers la pression d'un millimètre, puis l'éclat augmente et la lumière devient plus blanche; l'anneau devient très brillant et bien défini quand la pression est inférieure à $\frac{1}{200}$ de millimètre, il s'affaiblit ensuite et finit par disparaître. La pression critique est donc beaucoup plus faible que dans les expériences où l'on fait usage d'électrodes métalliques.

Des résultats analogues s'observent avec les tubes en forme d'anneau, même quand l'anneau est interrompu et le circuit complété par un tube latéral de plusieurs mètres de longueur soustrait à l'induction.

Si l'anneau est soumis à l'action d'un champ magnétique parallèle à son plan, on voit, dans les régions où le tube est perpendiculaire au champ, la bande lumineuse se séparer en

deux parties qui correspondent aux décharges de sens contraires. L'illumination est alors moins facile à obtenir et peut même être supprimée par le champ magnétique.

On rendra compte de ces particularités en concevant que le champ magnétique agit, non pas sur le courant même de décharges, mais sur le conducteur qu'il parcourt. La décharge doit débuter d'abord sur la ligne de plus grande force électromotrice ; sur ce chemin, la conductibilité augmente, soit par une élévation de température, soit par un état instable du gaz en partie dissocié, et le passage est rendu plus facile pour les courants qui suivent. Si la première décharge est déviée, le chemin n'est plus frayé pour les suivantes et l'illumination peut être interrompue. A la limite des deux cas, la décharge n'a pas de chemin défini et oscille dans le tube.

Ces décharges induites traversent difficilement les conducteurs métalliques, sans doute à cause de leurs très courtes périodes (**462**). Une boule à gaz raréfié, divisée en deux compartiments par une cloison métallique, étant disposée de manière que la cloison soit dans un plan méridien des courants induits, la lueur du gaz montre que les décharges suivent un chemin fermé dans chacun des compartiments en longeant de part et d'autre la cloison métallique. Si cette cloison a été percée de petites ouvertures aux extrémités du diamètre situé dans le plan des courants, les décharges s'y propagent.

L'expérience suivante montre encore que les gaz raréfiés peuvent se comporter à la manière des écrans conducteurs. Une boule de verre A, dont le gaz est au voisinage de la pression critique, est renfermée dans une seconde boule B concentrique, qui contient une goutte de mercure et où le vide a été poussé plus loin ; l'appareil est soumis à l'action d'une hélice inductrice. A la température ordinaire, la boule intérieure A s'illumine. Si l'on chauffe la boule B de 70° à 160°, la vapeur de mercure devenue conductrice s'illumine et la boule A s'éteint. Pour une température plus élevée, la pression de la vapeur de mercure devient trop grande et la boule intérieure A s'illumine de nouveau.

789. Conductibilité des gaz raréfiés. — Ce rôle d'écrans permet d'évaluer la conductibilité des gaz raréfiés. Dans l'appareil représenté par la figure 240, le tube A qui renferme un

gaz à la pression propre aux décharges est entouré d'un vase B concentrique communiquant avec la pompe à vide; l'intervalle qui les sépare forme une sorte d'éprouvette à section annulaire dans laquelle on peut introduire un liquide; L et M représentent la section de l'hélice inductrice.

On arrive à supprimer l'illumination du tube intérieur A en raréfiant le gaz dans l'enveloppe B jusqu'à une pression voisine de $0^{mm},01$. Si on laisse rentrer l'air dans l'enveloppe, l'illumination reparaît; on introduit alors dans l'éprouvette C de l'eau pure d'abord, puis mélangée d'acide sulfurique, et la ri-

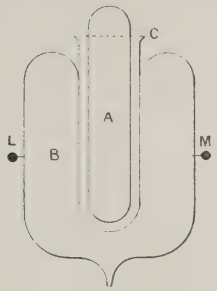


Fig. 240.

chesse en acide doit être de 25 p. 100 pour que l'illumination de A s'éteigne de nouveau et que l'action du liquide comme écran soit équivalente à celle du gaz primitif. Si l'on suppose que l'acide occupe le même espace à l'état de vapeur, sa pression serait d'environ 100 atmosphères. A ce compte, la conductivité moléculaire du gaz serait plus de 7 millions de fois supérieure à celle de l'acide sulfurique. Toutefois cette conductibilité n'est pas réglée par la loi d'Ohm, car les résultats varient avec la nature de l'étincelle primaire.

Une autre manière de comparer ces effets consiste à placer dans deux hélices A et B du même circuit, des boules différentes A′ et B′ dont chacune absorbe une partie de l'énergie induite, en raison de sa conductance.

L'expérience peut être réglée de manière que les lueurs soient très brillantes dans la boule A′, quand elle est seule, et que cette illumination s'éteigne dès qu'on introduit la boule B

contenant aussi un gaz raréfié. Si alors on remplit la seconde boule B′ par un électrolyte quelconque, il est impossible de reproduire l'extinction de la première.

Évaluée par cette méthode, la conductivité moléculaire des gaz à la pression critique se montre beaucoup plus grande que celle des métaux tels que le cuivre ou l'argent.

La grande conductibilité des gaz raréfiés dans les tubes sans électrodes forme un contraste frappant avec les valeurs si faibles que l'on observe par l'emploi des électrodes ; c'est une nouvelle preuve de la résistance qu'éprouve l'électricité à traverser la surface de séparation d'un métal et d'un gaz.

L'analyse spectrale de la lumière montre d'ailleurs que, dans un mélange de gaz, la décharge ne les traverse pas en raison de leur richesse proportionnelle.

790. Tubes à électrodes. — A mesure qu'on diminue la pression dans un tube à électrodes, la décharge prend une suite de formes différentes, avec toutes les transitions intermédiaires : d'abord des étincelles et des aigrettes, puis une sorte de bande ou de nappe lumineuse, enfin, pour de très faibles pressions, des apparences spéciales sur lesquelles il est nécessaire d'insister.

Autour de l'électrode négative, ou cathode, se trouve un premier espace *noir*, surtout étudié par M. Crookes, limité à une surface que l'on peut définir comme le lieu des extrémités de droites d'égale longueur normales à l'électrode.

Vient ensuite une couche bleuâtre dans l'air, d'éclat décroissant à partir de l'électrode et qui forme la colonne *négative*, puis un nouvel espace *sombre*, observé par Faraday et de dimensions variables, suivant les circonstances, enfin une région très éclairée, ou *colonne positive*, qui s'étend jusqu'à l'anode. Cette colonne renferme souvent, surtout dans l'acide carbonique et les gaz carburés, une série plus ou moins nombreuse de divisions transversales, d'éclat varié et de colorations différentes, qui forment les *stratifications*.

La longueur de l'espace noir de Crookes, comptée suivant la normale à la cathode, paraît croître un peu avec l'intensité de la décharge; elle varie surtout avec la pression du gaz, sans que la nature du métal électrode ait de l'influence. Avec un tube cylindrique et des électrodes en forme de disques,

M. Puluj[1] a obtenu dans l'air les longueurs suivantes :

Pression. . . .	$1^{mm},46$	0,51	0,24	0,12	0,06
Espace noir. .	$2^{mm},5$	5,8	9,5	15,5	22

Cette longueur croît moins vite que l'inverse de la pression ; elle n'est pas non plus comparable au libre parcours moyen des molécules, car ce parcours ne serait que de $0^{mm},04$ à la pression de $1^{mm},46$ ou 60 fois moindre que l'espace noir.

La colonne ou lueur négative est très variable, même pour une pression constante, suivant l'intensité du courant ; elle est interceptée par un corps quelconque, qu'il soit conducteur ou isolant, et l'analyse spectrale y montre un système de raies particulier.

Les dimensions de l'espace noir de Crookes et de la colonne négative sont indépendantes de la longueur du tube et de la position que peut occuper l'anode.

L'espace sombre de Faraday n'est qu'une sorte de transition entre les colonnes négative et positive ; de longueur très variable, il disparaît quelquefois presque entièrement.

Dans la colonne positive, qui s'étend ensuite jusqu'à l'anode, il existe souvent des strates, soit toutes semblables entre elles, soit composées de groupes successifs, avec des dimensions et des teintes différentes, qui se reproduisent avec une grande régularité. Ces strates sont limitées du côté de la cathode par des surfaces brillantes, planes ou convexes, avec une dégradation de lumière dans le sens opposé, et peuvent être séparées par des intervalles presque noirs ; leur distance est à peu près en raison inverse de la pression et elle augmente avec le diamètre du tube.

Les strates sont presque toujours animées d'un mouvement continuel, surtout quand on utilise la décharge des bobines, mais il est facile de les observer nettement dans chacune de leurs positions à l'aide d'un miroir tournant. Le phénomène prend plus de fixité si l'on introduit une résistance convenable dans le circuit ou si l'on a recours au courant d'une pile d'un grand nombre de couples. On peut même distinguer ces

(1) Puluj, *Wiener Ber.* t. LXXXI, p. 864 ; 1880

strates, quoique plus difficilement, dans les tubes à décharge sans électrodes.

La colonne positive et les strates qu'elle renferme sont liées à la position de l'anode, dont elles paraissent émaner en suivant le plus court chemin vers la cathode. On peut ainsi réaliser une belle expérience. La pression dans un tube cylindrique étant assez faible pour produire un petit nombre de strates, si on laisse rentrer le gaz avec une grande lenteur, on voit des bulles lumineuses se détacher successivement de l'anode et marcher dans le tube où elles forment de nouvelles strates; en même temps les précédentes sont repoussées, de manière que la distance moyenne soit en rapport avec la pression. Le phénomène inverse se produirait, les strates marchant cette fois vers l'anode, qui les absorberait une à une, si l'on diminuait la pression.

Il est plus simple encore d'employer une électrode mobile, reliée à l'extrémité du tube par un fil en spirale, et que l'on peut déplacer par de petites secousses ou par l'action d'un aimant extérieur sur un morceau de fer doux. Si ce conducteur mobile est utilisé comme cathode et qu'on le fasse cheminer dans le tube, il emporte avec lui, sans altération, l'espace obscur de Crookes, la lueur négative et l'espace sombre de Faraday ; la colonne positive marche en même temps, les strates conservant leur distance, mais elles sont une à une dégagées ou absorbées par l'anode, suivant le sens du mouvement. Si la cathode est fixe et l'anode mobile, la forme générale de l'illumination reste invariable : l'anode absorbe toutes les strates qu'elle rencontre ou en dégage de nouvelles, suivant qu'elle chemine vers l'anode ou dans la direction opposée.

Les stratifications ont été observées pour la première fois par Abria [1] et ont donné lieu à beaucoup de recherches sans que l'on connaisse encore le mécanisme de leur production. On peut les comparer aux interférences produites par la lumière ou aux alternatives de nœuds et de ventres dans un tuyau sonore, ou encore supposer qu'elles traduisent une série de décharges dans les différentes couches de gaz. Il paraît certain, en tous cas, que le phénomène est périodique, car l'in-

[1] Abria, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. VII, p. 478; 1834.

terposition d'un téléphone dans le circuit fait entendre un son manifeste, même dans le cas où l'on se sert d'une pile.

Lorsque les strates sont complexes, les différentes couches d'un même groupe n'ont pas la même teinte ni le même spectre; pour un mélange de gaz, comme l'air, il semble que les couches de même espèce soient dues isolément aux divers éléments qui entrent dans la constitution du mélange.

791. Propagation de la décharge. — De la Rive [1] a montré, par une expérience devenue célèbre, que la colonne positive obtenue dans un gaz raréfié subit l'action d'un champ magnétique comme ferait un conducteur solide parcouru par le courant; la portion du gaz traversée par la première décharge, devenue plus conductrice, est entraînée par le champ magnétique et reste le siège de la transmission du courant.

Toutefois, ce n'est là que l'ensemble du phénomène et le champ n'agit pas de la même manière sur les différentes parties du gaz illuminé. D'après Plucker [2], la lueur négative se comporte comme un corps paramagnétique, tel que le fer, et se dispose dans le sens des lignes de force. De même, les strates sont déformées par un champ magnétique. Sans entrer dans le détail de ces effets très complexes, il paraît en résulter que les décharges émanent de l'anode et se propagent dans les strates successives.

Une première question est de savoir s'il y a un entraînement des molécules illuminées, auquel cas l'étude spectrale dans la direction du mouvement permettrait d'apprécier un déplacement des raies. L'expérience réalisée par M. Zahn [3] a montré que le déplacement, s'il existe, n'est pas $\frac{1}{40}$ de la distance des deux raies D du sodium, dont la différence de longueur d'onde est d'environ $\frac{1}{1000}$. La vitesse de transport serait donc inférieure à $0{,}25.10^{-4}$ de celle de la lumière ou 7500 mètres par seconde.

En observant un tube à vide au moyen du miroir tournant, Wheatstone [4] en a conclu que la vitesse de propagation n'est pas inférieure à 8.10^{7} ou $\frac{1}{375}$ de celle de la lumière, sans pouvoir indiquer le sens de cette propagation.

(1) De la Rive, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. LIV, p. 238; 1858.
(2) Plucker, *Pogg. Ann.* t. CIII, p. 88; 1858.
(3) Zahn, *Wied. Ann.* t. VIII, p. 675; 1879.
(4) Wheatstone, *Brit. Ass. Rep.*; Dublin, 1835.

M. J. J. Thomson a réalisé l'expérience dans des conditions mieux définies. Le tube avait 5^{mm} de diamètre et une longueur totale de 15 mètres. Deux portions horizontales A et B, séparées par $5^{m},5$ de tube, étaient disposées de manière que l'image de l'une, dans un miroir fixe, apparaissait sur le prolongement de l'autre; on visait cet ensemble dans un miroir tournant qui faisait 400 ou 500 révolutions par seconde.

Il n'était pas facile de régler l'appareil de manière que l'étincelle eut lieu pour une position déterminée du miroir mobile, mais la répétition fréquente des décharges permettait de laisser la lunette d'observation dans une position fixe et d'attendre que le hasard fit apparaître les images dans le champ à des intervalles d'environ 4 minutes. Ces images A′ et B′ ne se trouvent plus en ligne droite, l'une paraît en avance sur l'autre et le sens du déplacement relatif change avec celui des décharges, de manière à indiquer toujours une propagation de l'anode à la cathode. L'angle apparent de cet écart, évalué par un micromètre, a permis d'en conclure que la vitesse de propagation est environ la moitié de celle de la lumière.

792. **Distribution des potentiels**. — Il est assez difficile de déterminer comment varie le potentiel le long d'un tube à gaz raréfié, puisque le phénomène est intermittent, de sorte qu'on ne peut évaluer que des effets moyens.

La seule méthode praticable consiste à souder dans le tube deux électrodes latérales ou *sondes électriques*, que l'on met en communication soit avec un électromètre, soit avec un condensateur dont la charge est déterminée ensuite par le galvanomètre balistique. Dans tous les cas, les différences de potentiel sont notablement plus grandes au début de l'expérience que dans le régime régulier des décharges.

On doit remarquer, en outre, que ces sondes se trouvent dans un milieu fortement éclairé, riche en rayons ultra-violets, ce qui introduit une cause d'erreur inconnue sur la signification véritable des potentiels observés. Les résultats sont d'ailleurs entièrement modifiés quand on introduit dans le tube un fil de métal porté au rouge par un courant étranger.

A part cette réserve, M. Hittorf [1] a trouvé, en faisant

[1] Hittorf, *Wied. Ann.*, t. XX, p. 705; 1883.

usage d'une pile, que la chute de potentiel le long du tube est à peu près uniforme et indépendante du courant, pourvu que les apparences de la décharge ne soient pas modifiées ; au voisinage de l'anode, la chute est un peu plus rapide, mais c'est surtout près de la cathode qu'a lieu le maximum. Cette chute de potentiel à la cathode est encore à peu près indépendante du courant, à la condition que l'espace soit suffisant pour l'extension de la lueur négative autour de l'électrode.

A mesure qu'on diminue la pression du gaz, la chute de potentiel le long du tube diminue également, quoique d'une manière moins rapide, mais elle reste à peu près constante au voisinage de la cathode.

Dans un tube à hydrogène pur, avec des électrodes en aluminium, M. Warburg [1] a trouvé, au moyen d'un électromètre, qu'entre le bord lumineux de la lueur négative et la cathode, la chute de potentiel restait constante et égale à 190 volts, quoique la pression eût changé de $9^{mm},5$ à $0^{mm},8$ et le courant de $0^{amp},006$ à $0^{amp},0005$.

Cette chute de potentiel dépend un peu de la nature du métal qui sert d'électrode, mais elle varie beaucoup avec la nature du gaz et les moindres impuretés qu'il peut renfermer. Ainsi, des traces d'oxygène dans l'hydrogène élèvent la chute de potentiel à 300 volts. Au contraire, l'azote pur donne 343 volts et des traces d'humidité et d'oxygène font baisser cette valeur à 260 volts. Les phénomènes se transforment d'ailleurs assez rapidement, par suite de réactions chimiques dans le milieu et du dégagement ou de l'absorption des gaz par les électrodes.

C'est sans doute à ces grandes chutes de potentiel localisées qu'est due l'élévation de température que l'on observe souvent sur les électrodes, en particulier sur l'électrode négative aux faibles pressions, et qui est capable de les porter au rouge ou de les fondre, sans que cet effet paraisse en proportion avec l'intensité très faible du courant.

Ajoutons enfin que les nombreuses recherches sur la distribution de la température dans les tubes n'indiquent que des températures moyennes inférieures à 100°, mais ces résultats

[1] Warburg, *Wied. Ann.*, t. XXXI, p. 545 ; 1887 et t. XL, p. 1 ; 1890.

n'ont sans doute qu'un rapport éloigné avec les températures réelles, que l'on doit plutôt attribuer à la vitesse des molécules gazeuses et à l'illumination produite par des échanges chimiques entre les atomes.

L'apparence de la décharge est entièrement modifiée quand les électrodes sont assez rapprochées, ou la pression assez faible, pour que l'espace noir de Crookes s'étende jusqu'à l'anode. Dans ce cas, la décharge positive, au lieu de se diriger vers la cathode, se propage le long de la surface du verre. En outre, l'étincelle passe beaucoup plus difficilement de sorte qu'en écartant davantage les électrodes on diminue le potentiel explosif.

RAYONS CATHODIQUES

793. Expériences de M. Crookes. — Lorsque la pression est assez faible, de l'ordre du centième de millimètre ou moins encore, pour que l'espace noir occupe toute l'étendue du tube, les phénomènes ont des caractères particuliers qui ont été étudiés par M. Crookes.

Le fait capital est que la cathode semble émettre, dans une direction normale en chaque point, une sorte de rayonnement invisible qui jouit de la propriété de rendre fluorescents ou phosphorescents les corps qu'il rencontre, et cela quelle que soit la position de l'anode. Ces effets se propagent en ligne droite et on peut les traduire en disant qu'il existe des *rayons cathodiques*, sans faire aucune hypothèse sur leur nature.

S'il n'existe pas d'écrans sur le trajet de ces rayons, la paroi opposée du tube prend une phosphorescence verte pour le cristal et bleue pour les verres alcalins. L'expérience, dite de la *croix de Malte*, réalisée par M. Crookes, démontre bien cette propagation rectiligne. Une longue ampoule horizontale porte à l'une de ses extrémités une électrode terminée par un disque vertical qui sert de cathode ; sur l'anode, qui est soudée latéralement, est montée une croix en aluminium mobile autour d'un axe horizontal. Quand la croix est relevée, son ombre se projette en noir sur le fond du tube, pendant que la portion qui l'entoure reste fluorescente. Le verre éprouve une modification particulière, une sorte de fatigue, car après

que l'appareil a fonctionné pendant quelque temps, si l'on fait tomber la croix d'aluminium, la place de l'ombre primitive prend plus d'éclat que les régions voisines.

En donnant à la cathode la forme d'une calotte sphérique, les rayons se réunissent au centre de courbure et y acquièrent une activité beaucoup plus grande. On arrive même à fondre le verre si le centre de courbure de la cathode se trouve sur la paroi de l'ampoule.

La plupart des corps deviennent ainsi phosphorescents sous l'influence des rayons cathodiques et avec plus d'intensité que par l'emploi de la lumière ultra-violette. Nous citerons, par exemple, le *rubis*, l'*yttria*, les *sulfures alcalins*, les sels d'*urane* et même la *craie*. Le spectre de ces phosphorescences présente une composition spéciale, dont M. Crookes a montré l'importance pour l'étude des terres rares.

Les traces de la phosphorescence et, en particulier, l'expérience de la croix de Malte, permettent facilement de montrer que les rayons cathodiques sont déviés par un champ magnétique, comme s'ils constituaient des filets de courants négatifs émanés de la cathode.

S'il existe ainsi un transport d'électricité négative, deux filets voisins doivent se repousser en vertu de leur action électrostatique et s'attirer comme courants. En employant deux cathodes parallèles, dont le rayonnement était intercepté par un écran percé de deux fentes voisines, M. Crookes a observé que la transmission est rectiligne pour chacune des cathodes agissant séparément et que, si on les met toutes deux en fonction, les deux rayons s'écartent l'un de l'autre après les fentes.

Toutefois, si cette répulsion existe, il est assez difficile que les rayons émis par une même cathode restent normaux à sa surface. MM. E. Wiedemann et Ebert [1] ont d'ailleurs observé qu'en fermant l'une des fentes par un volet mobile, la déviation a lieu encore pour le seul rayon qui conserve le passage libre quand on fait agir les deux cathodes simultanément; l'effet produit doit donc s'expliquer autrement.

En plaçant comme anode dans la région moyenne du tube

[1] E. Wiedemann et Ebert, *Wied. Ann.*, t, XLVI, p. 158 ; 1892.

un écran en aluminium percé d'une fente, M. Birkeland [1] obtient sur la paroi opposée à la cathode une bande étroite illuminée. L'action d'un électro-aimant latéral dévie cette bande et la partage en un certain nombre de raies distinctes, variables avec diverses circonstances; il en résulterait que les rayons cathodiques ne sont pas homogènes.

794. Différentes propriétés. — Pour M. Crookes, les molécules du gaz, à ce degré de raréfaction, se trouvent à un état particulier, qu'il appelle *ultra-gazeux*. Dans cette manière de voir, les rayons cathodiques sont les trajectoires des molécules lancées par la cathode avec une vitesse énorme ; leurs chocs à la rencontre d'un corps solide y provoquent des vibrations particulières d'où résulte la phosphorescence ou un échauffement qui tient à la perte de force vive.

D'autres physiciens sont plutôt d'avis que la cathode elle-même se désagrège et que les effets sont dus aux particules ainsi détachées, ou encore que l'explication des faits doit être cherchée dans les mouvements de l'éther.

Cette dernière hypothèse ne semble pas facile à contrôler. Quant à la perte de matière par les électrodes, elle existe en réalité dans plusieurs cas, surtout avec le platine, mais elle n'est pas essentielle au phénomène ; M. Crookes obtient les mêmes effets, par exemple, dans une ampoule sphérique où les électrodes sont simplement des calottes métalliques appliquées sur la surface extérieure.

L'idée de M. Crookes que quelque chose de matériel émane de la cathode est encore celle qui, jusqu'à nouvel ordre, rend le mieux compte de l'ensemble des phénomènes. Si on place dans l'ampoule une sorte de moulinet à ailettes de mica qui peut rouler sur des tiges de verre horizontales et disposé de façon que les ailettes supérieures soient seules sur le trajet des rayons cathodiques, ce moulinet se met en mouvement par les décharges comme s'il recevait une série de projectiles. Il est vrai que l'appareil est comparable au radiomètre et que la cause du mouvement peut être d'autre nature.

Pour rendre compte de la chaleur produite par les chocs ou le bombardement des molécules [2], appelons v la vitesse du

[1] Birkeland, *C. R. de l'Ac. des sc.*, t. CXXIII, p. 492; 1896.
[2] Lord Kelvin, *Proceed. R. S. L*, t. LII, p. 331; 1893.

gaz et μ sa masse par unité de volume; la force vive correspondante est $\mu\frac{\rho^2}{2}$, de sorte que $\rho\mu\frac{\rho^2}{2}$ représente l'énergie dégagée pendant chaque seconde sur l'unité de surface de la paroi du tube. Si e est l'épaisseur du verre, D sa densité et σ sa chaleur spécifique, la masse par unité de surface est eD et sa capacité calorifique $e\mathrm{D}\sigma$, quantité qui se réduit à 0,1 en prenant $e = 0^c,2$, $\mathrm{D} = 2,5$ et $\sigma = 0,2$. L'élévation de température θ par seconde serait donc

$$\theta = \frac{\mu\rho^3}{2.4,17.10^7}\,\frac{1}{e\mathrm{D}\sigma} = \frac{\mu\rho^3}{8,34.10^6}.$$

Pour l'air à la pression de $0^{mm},0076$ ou 10^{-5} atmosphère, la masse spécifique est égale à $1^{gr},3.10^{-3}.10^{-5}$, ce qui donne

$$\theta = \frac{1,3}{8,34}\cdot\frac{\rho^3}{10^{14}} = 1,56.\rho^3.10^{-15}.$$

Si l'on admet, par exemple, que la vitesse des molécules soit de 2000 mètres par seconde ou 2.10^5, ce qui correspond à la racine du carré moyen de la vitesse dont seraient animées les molécules d'hydrogène, dans la théorie cinétique des gaz, il en résulterait $\theta = 1,56.8 = 12^\circ$. Un tel échauffement suffirait, malgré les pertes par rayonnement, pour expliquer la fusion des parois de l'ampoule.

Une autre question est de vérifier si la matière radiante emporte réellement de l'électricité négative dans son mouvement de translation. Les expériences de M. Crookes à ce sujet ne semblent pas démonstratives. La distribution des potentiels dans l'ampoule, déterminée par des sondes électriques, conduit à un certain nombre de résultats curieux, mais l'électrisation produite par la lumière elle-même apporte dans les mesures une cause d'erreur inconnue; il semble bizarre, en particulier, qu'un fil de métal frappé par les rayons cathodiques, prenne un potentiel positif.

La méthode employée par M. Perrin [1] paraît plus correcte. En face de la cathode C (fig. 241), terminée par un petit disque, est un cylindre métallique B dont la base est percée

[1] J. Perrin, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. CXXI, p. 1130; 1895.

d'une petite ouverture et qui sert d'anode. Dans l'interieur de ce cylindre est un second cylindre B′ dont la base opposée à la cathode porte également une petite ouverture en face de la première. Le fil *b′* du cylindre intérieur communique avec un électromètre à feuilles d'or ; le fil *b* de l'anode est relié au sol et à la cage de l'électromètre. L'électricité négative émanant de la cathode et passant par l'ouverture de l'anode peut ainsi pénétrer dans le cylindre B′, qui se charge à la manière du cylindre de Faraday. L'expérience montre, en effet, que l'électroscope indique un potentiel négatif.

Enfin, et c'est là une propriété dont l'importance a beaucoup augmenté depuis quelque temps, les corps rendus phosphorescents par les rayons cathodiques deviennent eux-mêmes des sources d'émission analogue. Avec un tube recourbé plusieurs fois à angle droit, M. Goldstein (1) a constaté que

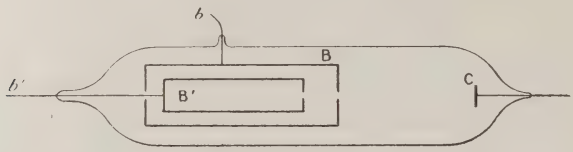


Fig. 241.

si l'un des angles est sur le trajet direct des rayons cathodiques, il provoque ensuite la phosphorescence sur l'angle opposé, lequel agit à son tour sur le suivant.

795. Vitesse des rayons cathodiques. — Par une méthode analogue à celle qu'il avait déjà utilisée pour les décharges, M. J. J. Thomson (2) a essayé de déterminer si le rayonnement cathodique se propage avec une vitesse appréciable.

L'ampoule, de forme cylindrique, est entièrement noircie à l'exception de deux fentes à quelque distance l'une de l'autre sur une même génératrice. Ces fentes s'illuminent par phosphorescence et on les observe dans un miroir tournant à six facettes, afin d'augmenter les chances de visibilité.

Avec les bobines excitées par des courants interrompus, les images des deux fentes paraissent comme des rubans lumi-

(1) Goldstein, *Wied. Ann.*, t. XV, p. 246 ; 1882.
(2) J.-J. Thomson, *Ph. Mag.* [4], t. XXXVIII, p. 358 ; 1896.

neux d'intensités variables qui ne présentent pas de repères assez nets. Les résultats sont meilleurs quand on fait passer par le circuit primaire la décharge de deux jarres électriques en cascade; le fil secondaire peut alors donner des étincelles de 15c à 20c; avec le tube précédent, les images sont mieux définies au début et il est possible d'en observer la séparation. C'est avec le verre d'urane que la phosphorescence s'éteint le plus rapidement et que les effets sont plus nets.

L'expérience a montré qu'il existe une vitesse manifeste de propagation, que M. Thomson évalue à 2.10^7. Si l'on admet que cette vitesse corresponde au transport réel des molécules, le calcul de Lord Kelvin conduirait à un échauffement des parois supérieur à 10 millions de degrés par seconde, résultat évidemment inadmissible; pour rester dans le même ordre d'idées, il faudrait en conclure qu'une très faible partie du gaz participe à ce mouvement électrique.

On peut encore considérer les choses d'un autre point de vue. Si m est la masse d'un atome d'hydrogène, v sa vitesse, q sa charge électrique et V le potentiel correspondant, l'énergie de cet atome peut être représentée par $\frac{mv^2}{2}$ ou Vq.

D'autre part, l'unité d'électricité en mesures électromagnétiques (**653**) dégage 10^{-4} gr. d'hydrogène, de sorte que le rapport de la charge q à la masse de gaz m qu'elle emporte est 10^4. Si l'on admet que la différence de potentiel V entre la cathode et le bord de la lueur négative soit de 200 volts, ou de 200.10^8, il en résulte

$$v^2 = 2V\frac{q}{m} = 400.10^8.10^4, \qquad v = 2.10^7;$$

c'est précisément la valeur trouvée par M. Thomson pour la vitesse des rayons cathodiques.

Comme ces rayons sont déviés par les aimants, si le champ magnétique H est normal à leur direction et que ρ soit le rayon de courbure de la trajectoire, la force centripète est due à l'action du champ Hqv, ce qui donne

$$\frac{mv^2}{\rho} = Hqv, \qquad v = \rho H.10^4.$$

En faisant $\rho = 10^c$ et $v = 2.10^7$, il en résulte $H = 200$, valeur tout à fait acceptable pour le champ magnétique.

796. Expériences de M. Lénard. — Si l'hypothèse du bombardement moléculaire est acceptable quand le rayonnement reste confiné dans un milieu à gaz raréfié, elle devient insuffisante pour expliquer les effets secondaires produits par les corps qui ont reçu un rayonnement cathodique.

Hertz [1] recevait ces rayons sur une plaque de verre d'urane, située dans l'intérieur de l'ampoule. Une lame de mica ou de cuivre interposée sur le trajet intercepte leur action et porte ombre sur le verre d'urane, mais une lame mince d'aluminium ne constitue qu'un écran très imparfait et le verre d'urane reste phosphorescent derrière le métal.

On obtient les mêmes résultats avec des couches minces de différents métaux, or, argent, platine, cuivre, déposés sur le verre d'urane. Il ne semble pas que ce soit un simple effet de transparence, car si la feuille métallique est placée à quelque distance en avant du verre d'urane et qu'on interpose dans l'intervalle un écran de mica, les bords de l'ombre ainsi produite paraissent diffus, comme si le métal était devenu lui-même la source d'un rayonnement particulier capable de provoquer la phosphorescence.

M. Lénard [2] a poursuivi cette étude avec l'idée que l'aluminium est transparent aux rayons cathodiques et qu'il serait possible d'utiliser cette transparence pour faire sortir les rayons de l'ampoule et les observer dans l'air.

Les expériences de M. Lénard ont acquis une importance capitale par les travaux ultérieurs et méritent de fixer l'attention. Le gaz raréfié est renfermé dans un tube cylindrique T (fig. 242), terminé par une monture métallique M munie d'une fenêtre *f* en aluminium de 3 à 5 microns d'épaisseur et assez étroite pour résister à la pression extérieure ; cette monture devant servir d'anode, on protège la fenêtre par une capsule métallique *a* percée d'une petite ouverture, afin d'éviter que l'aluminium soit altéré par les décharges. La cathode *c* est entourée par un conducteur cylindrique K réuni à l'anode et au sol. Enfin une grande plaque métallique S, également au

[1] H. Hertz, *Wied. Ann.*, t. XIX, p. 782; 1883 et t. XLV, p. 28; 1892.
[2] Ph. Lénard, *Wied. Ann.*, t. LI, p. 325; 1894.

sol, protège le champ situé en face de la fenêtre contre toute action électrique. La tubulure latérale *t* communique avec la pompe et on fait le vide au point qu'il se produise à l'extérieur des étincelles de 3c dans un excitateur à boules.

Pendant les décharges, l'air s'illumine d'une lueur bleuâtre près de la fenêtre en produisant de l'ozone ; le phénomène paraît être une diffusion de rayons émis par l'aluminium.

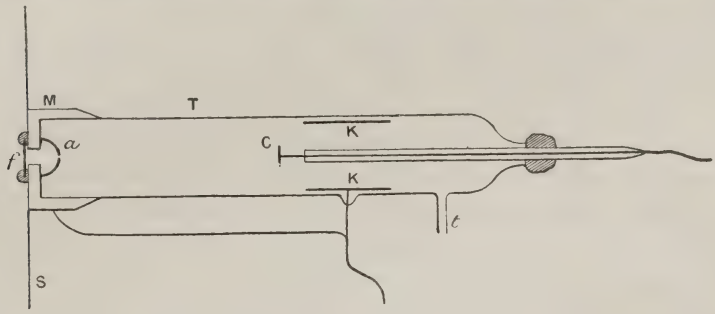


Fig. 242.

Les corps phosphorescents placés en face deviennent lumineux et avec des caractères différents de ceux qu'ils présentent sous l'action des rayons ultra-violets ; la phosphorescence du spath, par exemple, est beaucoup plus durable.

Ce rayonnement se propage en ligne droite, comme la lumière, et l'énergie des effets produits est en raison inverse du carré de la distance ; il est absorbé par les gaz en raison de leur densité absolue, quelle qu'en soit la nature, et par tous les milieux à des degrés différents ; une lame de quartz de $0^{mm},5$ d'épaisseur l'arrête, mais il traverse les feuilles métalliques minces et le verre paraît aussi transparent que l'aluminium ; il jouit encore de la propriété singulière de décharger les corps électrisés.

En collant sur la fenêtre un second tube à gaz raréfié dans lequel on a placé une fente et une plaque phosphorescente, on constate aussi que les rayons sont déviés, au moins en partie, par un champ magnétique.

Les rayons ainsi transmis dans l'air ont enfin des actions photographiques et, à ce point de vue, l'absorption exercée par différents corps est de même ordre que pour les effets de phosphorescence.

Les résultats obtenus par M. Lénard semblent se rapporter à un phénomène complexe ; ils n'ont paru d'abord, comme ils étaient dans la pensée de l'auteur, qu'un développement des recherches de M. Crookes sur les rayons cathodiques et la complication des appareils ne permettait pas de répéter facilement les expériences ; en réalité on y retrouve la plupart des faits auxquels la belle découverte de M. Röntgen a donné ensuite un si grand retentissement.

797. Découverte de M. Röntgen. — En renfermant une ampoule de Crookes dans une enveloppe de papier noir, opaque aux rayons ultra-violets, M. Röntgen [1] eut l'occasion d'observer que l'excitation de l'ampoule était encore capable de provoquer, dans l'obscurité complète, la phosphorescence d'un papier recouvert de platino-cyanure de baryum et de produire des impressions photographiques.

L'ampoule de Crookes émet donc au travers de ses parois des rayons particuliers, que M. Röntgen a appelés rayon X, et qui se distinguent des rayonnements ordinaires par un grand nombre de propriétés.

Aucune considération antérieure, par exemple, ne permettait de prévoir l'ordre d'opacité ou de transparence des différents corps pour ces rayons. Ils traversent facilement une plaque d'aluminium de 15^{mm} d'épaisseur, une planche de bois, un livre de 1000 feuillets, tandis qu'ils sont arrêtés par des plaques de plomb ou de platine. Les muscles sont transparents et les os relativement opaques, de sorte que le squelette de la main se dessine nettement dans l'ombre projetée sur un écran phosphorescent ou sur une plaque photographique. C'est cette expérience surtout, dont la chirurgie et la médecine ont tiré profit, qui a popularisé la découverte.

Certaines propriétés étaient encore plus inattendues. Ainsi, les rayons X n'éprouvent aucune réfraction appréciable dans des prismes d'eau, de sulfure de carbone, d'aluminium ou d'ébonite ; ils ne subissent pas la réflexion régulière, ni la diffraction, et on n'a pu manifester aucun phénomène de polarisation ou d'interférence. A l'inverse des rayons cathodiques dont ils proviennent, ils ne sont pas déviés par un champ

[1] W. C. Röntgen, *Sitzb. der Würzburer, phys. méd. Gesell.* Déc. 1895. — *Journ. de Phys.* [3], t. V, p. 101 et 189 ; 1896.

magnétique, mais ils sont encore capables de décharger un corps électrisé. Ils paraissent enfin avoir pour origine la surface du tube frappée par les rayons cathodiques et leur action est ensuite en raison inverse du carré de la distance.

M. Röntgen était donc autorisé à conclure que les rayons X sont d'une nature spéciale, indépendante des rayons cathodiques qui leur ont donné naissance. L'absence de diffraction sensible conduit à penser que la longueur d'onde de ce rayonnement particulier est très petite par rapport à celle des rayons lumineux ou ultra-violets ; certaines formules de dispersion, étendues à ce cas extrême, ne seraient pas non plus incompatibles avec l'absence de réfraction.

798. Propriétés des rayons X. — Cette étude nouvelle a donné lieu à un grand nombre de travaux, dont nous nous bornerons à signaler les principaux résultats.

Un premier fait bien établi est que le rayonnement a son origine sur les corps frappés par les rayons cathodiques, soit que ces corps deviennent phosphorescents, comme les parois de l'ampoule de verre, soit qu'ils ne manifestent aucune propriété analogue. Pour diminuer l'étendue de la source rayonnante, on a d'abord terminé la cathode par une calotte sphérique dont le centre de courbure est sur la surface de l'ampoule, mais cette disposition a l'inconvénient de provoquer assez vite la fusion du verre. Il est plus avantageux de placer une lame de platine ou d'aluminium au centre de courbure de la cathode. Cette lame reçoit les rayons cathodiques sous une inclinaison de 45° et son maximum de rayonnement total a lieu aussi dans une direction voisine de 45°. Avec des lames de très petites dimensions, la source peut être assez réduite pour donner des images très nettes ; c'est ce que l'on appelle des tubes *focus*.

Des observations très précises, sur les photographies obtenues par des rayons X ayant traversé deux fentes successives, montrent que l'élargissement de l'image par diffraction serait manifeste si la longueur d'onde était seulement de $0^{\mu},005$ ou 40 fois plus petite que celle des dernières radiations ultraviolettes. La propagation rectiligne est donc beaucoup plus pure que pour la lumière.

On n'a pas constaté non plus de réflexion appréciable. Si

certaines substances, telles que le spath fluor, sont capables de renforcer l'image quand on les place derrière la plaque photographique, comme si elles réfléchissaient les rayons qui ont traversé la plaque, il est probable que ce résultat est un effet secondaire et doit être attribué à la fluorescence développée par les rayons eux-mêmes.

Les tentatives faites pour manifester la réfraction ou la polarisation n'ont pas réussi davantage; il semble établi que, si la réfraction existe, la différence de l'indice avec l'unité est inférieure à un millionième.

L'absorption exercée par les gaz est encore proportionnelle à la masse rencontrée par les rayons, et quelle que soit la nature du gaz, comme dans l'expérience de M. Lénard.

Les rayons X ne sont pas formés de radiations homogènes, car les rapports de transparence de différents corps, par exemple des muscles et des chairs, varient beaucoup avec l'intensité des décharges dans les ampoules.

De même, si l'on fait tomber les rayons sur un électroscope, on peut apprécier leur intensité par la vitesse de décharge et évaluer l'absorption d'une plaque interposée comme écran par le ralentissement de la décharge. Or, quand on interpose ainsi plusieurs lames ou que l'on augmente leur épaisseur, l'absorption exercée par les premières couches est manifestement plus grande; il se fait une sélection des rayons plus transmissibles, analogue à celle que produisent les milieux colorés sur la lumière blanche.

Les phénomènes de décharge électrique doivent être examinés avec plus de détails.

Il n'est pas nécessaire d'abord que ces rayons X frappent directement un corps électrisé pour le décharger; lorsqu'ils traversent dans un gaz le champ électrique situé entre deux conducteurs, sans toucher aucun d'eux, ils provoquent des échanges d'électricité plus ou moins rapides et ramènent finalement les conducteurs au même potentiel, ou du moins la différence de potentiel finale n'est pas supérieure à celle qui résulte des effets de contact. Tout se passe comme si les lignes de force étaient devenues en partie conductrices.

Les gaz ainsi traversés par les rayons X conservent même, d'une manière temporaire, la propriété de décharger les corps

électrisés sur lesquels on les dirige et qui sont situés en dehors de toute action directe.

Les décharges n'ont pas lieu au travers des diélectriques solides ou liquides. Supposons, en effet, qu'on enferme un corps électrisé A dans une enceinte conductrice A′ perméable aux rayons et que l'intervalle soit rempli par un diélectrique tel que la paraffine ; l'action des rayons sur le système est incapable d'égaliser les potentiels de A et de A′. Aucun échange d'électricité ne se produit que si une partie au moins des lignes de force est située dans un gaz.

La méthode la plus simple pour étudier ce phénomène consiste donc à faire passer les rayons dans le champ électrique uniforme compris entre deux plans conducteurs parallèles. Dans ce cas, le débit d'électricité croît d'abord assez rapidement pour atteindre un régime régulier, indépendant de la différence de potentiel et en raison inverse du carré de la distance à la source, au moins quand cette distance n'est pas assez grande pour que l'absorption par le gaz intervienne. Ce débit régulier est proportionnel à la pression du gaz et indépendant de sa température.

En d'autres termes, les échanges d'électricité sont proportionnels à l'intensité du rayonnement, à la masse de gaz rencontrée et à la température absolue.

L'interprétation la plus directe de ces résultats est d'admettre que les rayons X libèrent en chaque point, par dissociation des molécules gazeuses, des quantités d'électricité égales et contraires capables de se mouvoir sous l'influence du champ. Cette hypothèse permet de concevoir que les gaz conservent la propriété de provoquer les décharges jusqu'à ce que les effets de dissociation aient disparu.

Quant aux rayons X eux-mêmes, différents physiciens ont supposé, sans raison bien plausible, qu'ils sont dus à des vibrations longitudinales.

Leur action photographique semble indiquer plutôt qu'ils correspondent à des vibrations transversales, comme celles de la lumière, mais de longueurs d'onde beaucoup plus courtes. M. H. Becquerel a reconnu aussi qu'il existe une sorte de continuité entre les deux ordres de phénomènes. Certains corps phosphorescents, en particulier tous les sels d'urane.

émettent des radiations invisibles, capables de produire des impressions photographiques après avoir traversé des feuilles minces d'aluminium et de cuivre, et pouvant aussi décharger un électroscope, même lorsque l'air qu'ils ont traversé est ensuite insufflé sur l'instrument. Leur action est donc comparable, quoique plus faible, à celle des rayons X. Ces radiations obscures paraissent éprouver une véritable réflexion et présenteraient ainsi des propriétés intermédiaires.

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES.

799. Propagation. — L'analogie étroite des oscillations électriques et de la lumière a été vérifiée par un grand nombre d'expériences dont nous devons encore indiquer les principaux résultats. On a vu que, dans le phénomène de Hertz [1], les vibrations produites par l'excitateur sont généralement de nature complexe [2] et on peut toujours les représenter par une suite de termes de périodes différentes. La structure plus simple du résonateur lui impose une période mieux définie; il entre d'autant plus facilement en vibration que cette période correspond plus exactement à celle du terme prédominant dans les vibrations primitives. En raison de cette différence, l'amortissement est très rapide pour les vibrations de l'excitateur et plus lent pour celles du résonateur.

Hertz avait montré aussi que les vibrations se propagent beaucoup plus facilement le long d'un fil métallique situé devant l'excitateur. Si le fil est très long, il se partage en concamérations régulières; l'extrémité est un ventre électrostatique, ou un nœud de courants, et la distance des nœuds successifs est la moitié de la longueur d'onde. Le résonateur placé en face d'un nœud de courant ne vibre pas et il reste silencieux si l'on coupe le fil à l'endroit d'un autre nœud.

Deux ventres électrostatiques successifs ont toujours des potentiels égaux et de signes contraires; en comptant ces ventres P_0, P_1, P_2, P_3, ... à partir de l'extrémité, leurs poten-

(1) H. Hertz, *Wied. Ann.* t. XXI, XXXIV et XXXVI.
(2) Sarrazin et L. De la Rive, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. CX, p. 72; 1890.

tentiels sont égaux de deux en deux et la distance des ventres de même espèce est un nombre entier de longueurs d'onde.

Si l'on emploie deux fils parallèles reliés respectivement à des plateaux en regard des deux armatures de l'excitateur, les potentiels des points correspondants P_0 et Q_0, P_1 et Q_1, ... sont de signes contraires. En faisant communiquer le résonateur avec deux points de parités différentes sur les deux fils, P_0 et Q_1 par exemple, on n'obtient aucune étincelle et la distance Q_0Q_1 est la moitié d'une longueur d'onde [1].

On a employé encore divers autres procédés d'observation pour mettre en évidence la nature du phénomène, mais la difficulté de définir la période ne permettait pas d'en déduire exactement la vitesse de propagation. Le progrès apporté par M. Blondlot [2] fut d'employer un résonateur formé de deux plateaux réunis par un cadre rectangulaire. On peut alors calculer le coefficient de self-induction L de l'appareil. En désignant par C sa capacité électromagnétique, la période est $T = 2\pi\sqrt{CL}$. Pour une longueur d'onde λ, la vitesse de propagation V est donc

$$V = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

On peut calculer la valeur de C par la surface S des plateaux et leur distance e, d'où résulte

$$C = \frac{1}{\mathbf{v}^2}\frac{S}{4\pi e}, \qquad V = \mathbf{v}\lambda\sqrt{\frac{e}{\pi S L}}.$$

L'expérience déterminerait ainsi le rapport de V à $\mathbf{v}$. Pour n'emprunter aucune quantité étrangère, M. Blondlot mesure directement la capacité C par les courants intermittents (**742**); la moyenne de plusieurs séries d'expériences, avec des appareils où la longueur d'onde variait de $8^m,94$ à $35^m,36$, conduit à la valeur $V = 3,0285.10^{10}$ [3].

Ce nombre est supérieur de $\frac{1}{100}$ environ à la vitesse de la

(1) J. J. Thomson, *Proceed. L. R. S.*, t. XLVI, p. 1; 1889.

(2) R. Blondlot, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXIII, p. 628; 1891. — *Journ. de Phys.* [2], t. X, p. 549; 1891.

(3) E. Mascart, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXVIII, p. 277; 1894.

lumière; la différence peut être attribuée à la mesure des capacités ou au calcul des coefficients d'induction.

Comme la nature des fils conducteurs n'a pas d'influence, on doit en conclure que la propagation se fait réellement dans l'air le long de ces conducteurs.

Par une seconde méthode, M. Blondlot [1] mesure directement la vitesse à l'aide du miroir tournant. Les armatures intérieures de deux bouteilles de Leyde cylindriques communiquent avec les électrodes secondaires d'une bobine d'induction et avec les boules A et A′ d'un excitateur (fig. 243). Les

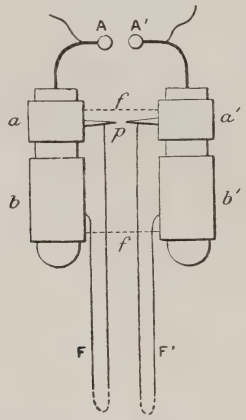


Fig. 243.

armatures extérieures sont formées de deux parties, les unes a et a' de petites dimensions, les autres b et b' plus larges, réunies par des fils de coton f de conductibilité médiocre, mais suffisante pour que les armatures soient maintenues au même potentiel pendant la charge.

Les armatures a et a' communiquent, d'une part, avec un excitateur à pointes p et, d'autre part, avec les armatures b et b' par des conducteurs en cuivre F et F′ de très grande longueur. Au moment de la décharge en AA′, les fils de coton f ne sont plus efficaces; les armatures aa' donnent d'abord une étincelle en p et, au bout de quelque temps, les armatures bb' fournissent au même point une seconde étincelle affaiblie par la propagation le long des fils FF′; c'est précisément pour

[1] R. Blondlot, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXVII, p. 543; 1893.

compenser en partie la différence de ces deux étincelles qu'on donne une plus grande surface à ces armatures.

Dans un miroir tournant, on voit donc au point p deux images successives correspondant à la même décharge. En les projetant sur une plaque photographique, la répétition du phénomène fournit une série de doubles images dont l'écart permet de calculer la vitesse de propagation. La période de rotation du miroir était déterminée par la comparaison du son d'axe avec les vibrations d'un monocorde. En donnant aux fils FF′ des longueurs de 1029 et 1821 mètres, on a obtenu, pour cette vitesse, $2{,}964.10^{10}$ et $2{,}98.10^{10}$, nombres très voisins de la vitesse de la lumière. On doit remarquer encore que l'influence réciproque des fils d'aller et de retour, qui sont portés par des poteaux télégraphiques et assez rapprochés l'un de l'autre, tend à ralentir la propagation.

800. Pouvoirs inducteurs spécifiques. — La détermination des pouvoirs inducteurs par les oscillations très rapides présente un intérêt spécial. Le contrôle le plus direct de la théorie est fourni par ce fait, que la distance des nœuds le long d'un fil ne change pas quand on plonge le fil avec le résonateur dans un autre milieu (**452**).

Toutefois cette disposition des expériences ne s'applique guère qu'aux liquides, tandis que la plupart des résultats obtenus par les autres méthodes ont donné pour les pouvoirs inducteurs des nombres notablement trop élevés.

M. Thomson [1] détermine les valeurs λ et λ' de la longueur d'onde des oscillations dues à la décharge d'un condensateur à plateaux, suivant que le diélectrique est formé par une couche d'air ou une lame de verre de même épaisseur. La vitesse de propagation étant la même dans les deux cas, ainsi que le coefficient de self-induction du circuit, les longueurs d'onde λ' et λ sont proportionnelles aux périodes T′ et T, et celles-ci à la racine carrée des capacités C′ et C ; on a donc

$$\frac{C'}{C} = \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2.$$

Le rapport des capacités C′ et C représente le pouvoir in-

[1] J.-J. Thomson *Proceed. L. R. S.*, t. XLVI, p. 292; 1889.

ducteur K du verre. Avec des oscillations dont la fréquence était de 25.10^6, on a ainsi obtenu $K = 2,7 = (1,65)^2$. L'indice moyen de réfraction du verre est voisin de 1,52; le pouvoir inducteur se rapproche donc beaucoup du carré de l'indice de réfraction, à mesure que les oscillations sont plus rapides.

Cette conclusion ayant été mise en doute par différents physiciens [1], M. Blondlot [2] emploie, avec des oscillations très rapides, une méthode de compensation qui ne fait intervenir aucune formule accessoire.

Deux plateaux conducteurs AA′ et BB′ (fig. 244), le second de dimensions moindres, symétriques par rapport à une même

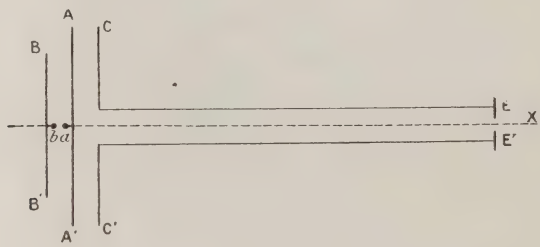


Fig. 244.

droite X, sont munis de boules a et b, pour la production des décharges; le plateau AA′ est relié au sol, le plateau BB′ à l'une des électrodes du fil secondaire d'une bobine dont la seconde électrode communique également au sol. Lorsque la bobine fonctionne, le torrent d'étincelles entre a et b correspond à des oscillations dont la fréquence est de l'ordre de 25.10^6. Le plateau A fait écran vers la droite pour toute action électrique à variation lente, mais cet espace est le siège de perturbations périodiques dues à la décharge.

Deux plaques C et C′, symétriques par rapport à la droite X et à la même distance e de A et de A′, communiquent par des conducteurs fixés à leurs bords avec des pointes en charbon EE′ dont la distance très petite peut être réglée par une vis micrométrique. Dans ces conditions, aucune étincelle ne se manifeste entre les charbons, par raison de symétrie.

(1) E. Lecher, *Wied. Ann.*, t. XLII, p. 142; 1891.
(2) R. Blondlot, *Journ. de Phys.*, [2], t. X, p. 197; 1891.

Les étincelles deviennent très vives quand on introduit une lame de verre dans l'intervalle A'C', mais on les fait disparaître en plaçant dans l'intervalle AC une autre plaque diélectrique d'épaisseur convenable. On trouve ainsi, par exemple, qu'un verre de 3^c d'épaisseur équivaut à une lame de soufre de $3^c,15$.

Le soufre est un diélectrique presque parfait et son pouvoir inducteur, déterminé par le quartz piézoélectrique (**741**), est égal à 2,6. En appelant K le pouvoir inducteur du verre, l'équivalence des capacités donne

$$e - 3,15 + \frac{3,15}{2,6} = e - 3 + \frac{3}{K}, \qquad K = 2,8 = (1,67)^2.$$

Ce résultat est presque identique à celui qu'avait obtenu M. Thomson. On remarquera cependant que M. Boltzmann (**749**) trouve pour le soufre des pouvoirs inducteurs spécifiques supérieurs à 2,6. Malgré l'imperfection des expériences, il paraîtra sans doute que l'on est autorisé à conclure que les pouvoirs inducteurs se rapprochent d'autant plus de la théorie que la période d'oscillation est plus courte.

801. Réduction de la période. — Des longueurs d'onde de plusieurs mètres, comme on les obtenait d'abord, conviennent mal pour la vérification des propriétés analogues à celles de la lumière; différentes dispositions permettent d'obtenir des longueurs d'onde beaucoup plus faibles.

Hertz avait déjà employé comme excitateur deux cylindres de 13^c de long et 3^c de diamètre. M. Righi [1] réduit cet appareil à deux boules de $0^c,8$ de diamètre noyées dans l'huile de vaseline et reliées aux pôles d'une machine de Holtz; les longueurs d'onde sont alors comprises entre 20^c et $2^c,6$. Le résonateur est formé simplement par une bande d'argent déposé sur verre, que l'on divise en deux parties égales par un trait au diamant; on observe les étincelles avec une loupe.

On peut ainsi constituer un véritable analyseur de petites dimensions. Le résonateur est placé au foyer d'un miroir dans une direction perpendiculaire à l'axe; il est porté par une

[1] A. Righi. *R. Accad. delle science dell' Inst. di Bologna*, [5], t. IV; 1894.

monture qui traverse une ouverture du miroir et dont la rotation autour de l'axe est mesurée par un cercle gradué. La direction des oscillations se détermine soit par l'azimut du résonateur qui correspond au maximum d'étincelles, soit par la bissectrice de deux azimuts d'extinction, soit par la perpendiculaire à la bissectrice de deux azimuts de rallumage.

Les étincelles s'éteignent, ou deviennent très rares, lorsque l'amplitude des oscillations est réduite à une certaine valeur; dans des conditions différentes, le rapport des amplitudes des vibrations incidentes est donc égal au rapport des sinus des azimuts d'extinction à partir du maximum.

Si les vibrations sont elliptiques, on détermine aisément la direction des axes par celles du maximum et du minimum ou par les bissectrices de deux directions qui correspondent aux mêmes étincelles. Lorsque le minimum est très faible, la vibration paraît rectiligne, mais la variation d'intensité avec l'azimut est moins rapide et peut servir à distinguer nettement le phénomène. Enfin les étincelles sont les mêmes dans tous les azimuts pour une vibration circulaire.

M. Lebedew [1] est parvenu à obtenir des longueurs d'onde qui ne dépassent pas 6^{mm}. L'excitateur est formé par deux cylindres de platine, ayant $1^{mm},3$ de long et $0^{mm},5$ de diamètre, noyés dans le pétrole; ils communiquent par des fils fins, sur lesquels sont intercalés un condensateur et une résistance liquide, avec les bornes d'une petite bobine d'induction. Le résonateur est analogue; la décharge passe en partie, suivant une disposition due à M. Klemencic, par une soudure thermoélectrique voisine reliée à un galvanomètre très sensible dont on observe la première impulsion. L'excitateur et le résonateur sont armés de miroirs correspondants.

802. Réflexion, réfraction, polarisation. — Hertz avait nettement démontré les phénomènes de réflexion régulière par ses expériences sur les miroirs plans, en munissant l'excitateur et le résonateur de réflecteurs cylindriques; il avait reconnu, de même, avec un grand prisme d'asphalte, que la réfraction est manifeste, avec un indice voisin de 1,69. En faisant tomber les vibrations primitives sur un réseau de fils métal-

[1] P. Lebedew, *Wied. Ann.*, t. LVI, p. 1; 1895. — *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 568; 1895.

liques, la réflexion est maximum quand la vibration incidente est parallèle aux fils, ce qui démontre la polarisation.

MM. Lodge et Howard [1] ont ainsi utilisé une lentille de poix (ou brai) à faces hyperboliques qui permet de concentrer les vibrations électriques.

M. Righi, disposant de longueurs d'onde très courtes, pouvait opérer sur des surfaces dont les dimensions ne dépassent guère celles dont on fait usage en optique.

Il a étudié la réflexion sur des blocs prismatiques, afin d'éliminer l'influence de la seconde surface. Quel que soit l'azimut de la vibration incidente, la composante de la vibration réfléchie dans le second azimut principal est nulle pour une certaine incidence I qui correspond à l'angle de polarisation. Cette incidence était comprise entre 60° et 64° pour le *soufre*, entre 52° et 59° pour la *paraffine* ; le calcul donnerait respectivement 61° 52′ avec $n = 1,87$ et 55°2′ avec $n = 1,43$.

En faisant varier l'azimut de la polarisation incidente et déterminant l'azimut de polarisation réfléchie par le rapport des composantes principales, on vérifie encore avec un degré d'exactitude très satisfaisant les formules de Fresnel relatives à la réflexion vitrée (**454**).

Il en est de même pour la réflexion totale. Si l'on place à la suite deux prismes de 45°, disposés comme les moitiés d'un cube, les vibrations ne se transmettent pas au travers de ce système lorsque les faces hypoténuses sont notablement écartées l'une de l'autre, mais elles se propagent dès que cette distance est voisine d'une demi-longueur d'onde. C'est la reproduction du phénomène de la tache noire observée par Fresnel dans la réflexion totale.

Nous citerons encore, sans pouvoir y insister, diverses expériences sur les variations d'intensité dans la réflexion intérieure, sur la production de vibrations circulaires par les parallélipipèdes de Fresnel, le déplacement latéral et l'absorption par les lames à faces parallèles, la réflexion métallique, la polarisation elliptique produite par transmission au travers d'une plaque de bois, etc.

Les appareils de M. Lebedew lui permettent d'employer des

[1] O. J. Lodge et L. Howard, *Ph. Mag.* [5], t. XXVII, p. 48 ; 1889.

surfaces dont les dimensions ne dépassent pas 2^c. Il a pu ainsi, avec les cristaux de soufre, observer une double réfraction dont les indices sont très voisins de ceux qui correspondent à la lumière, construire une sorte de *nicol analyseur* et des plaques d'un quart d'onde pour les oscillations électriques.

803. Diffraction et interférences. — Les effets de diffraction sont très grands et compliquent beaucoup les expériences si l'on n'opère pas avec des longueurs d'onde assez courtes.

M. Righi se sert pour cela d'un excitateur et d'un résonateur privés de leurs miroirs. Par des écrans en anneaux circulaires de dimensions convenables, il isole sur la surface d'onde des vibrations primitives les différentes zones d'Huygens et vérifie leur intervention dans l'intensité des vibrations propagées. Avec une fente, on observe aussi sur la ligne de propagation une série de maxima ou de minima, suivant que la fente correspond à un nombre impair ou pair de zones élémentaires. Dans l'ombre d'un corps opaque terminé par un bord rectiligne, il se produit des maxima et des minima d'intensité graduellement décroissante. Il en est de même pour la diffraction produite par une tige opaque.

Hertz avait également observé les interférences par les nœuds et les ventres de vibration en avant d'un miroir plan réflecteur. M. Righi s'est attaché à imiter la plupart des phénomènes d'optique : les miroirs de Fresnel, le biprisme, l'interférence des radiations directes avec celles qui sont réfléchies sur un seul miroir, le retard produit par le déplacement de l'un des miroirs de Fresnel ou par l'interposition d'une lame à faces parallèles. L'indice de réfraction déduit de cette dernière épreuve a été 1,43 pour la paraffine et 1,87 pour le soufre ; la valeur relative au soufre est plus faible que celle qui correspond au phénomène optique, comme on pouvait le prévoir par l'accroissement de longueur d'onde.

Enfin l'emploi de lames relativement minces a permis de reproduire tous les cas des anneaux de Newton, à centre blanc ou à centre noir.

TROISIÈME PARTIE. — MESURES MAGNÉTIQUES

CHAPITRE PREMIER

CONSTANTES D'AIMANTATION

DES AIMANTS

804. Couples directeurs. — On a supposé jusqu'à présent, dans plusieurs applications, que le magnétisme d'un aimant reste invariable, mais on doit souvent tenir compte de l'aimantation temporaire due à différentes circonstances.

Considérons un aimant mobile autour d'un axe dans un champ uniforme. Soit V son volume, A la composante perpendiculaire à l'axe de l'aimantation moyenne, $M = AV$ le moment magnétique rigide correspondant et H la composante efficace du champ.

Si l'aimant est dévié de l'angle α, et que l'intensité du champ ait une valeur modérée, on peut admettre que l'aimantation induite se compose de deux parties, l'une A_1 longitudinale et l'autre A_2 transversale, respectivement proportionnelles aux composantes $H \cos \alpha$ et $H \sin \alpha$; on écrira donc

$$A_1 = f_1 H \cos \alpha, \qquad A_2 = f_2 H \sin \alpha.$$

Les coefficients f_1 et f_2 d'aimantation moyenne varient avec

la forme de l'aimant et la nature de l'acier; il est évident d'ailleurs que l'aimantation longitudinale est relativement plus facile et qu'on a toujours $f_1 > f_2$.

On voit aussi que l'aimantation induite équivaut à deux autres, l'une $f_2 H$ parallèle au champ et l'autre $(f_1 - f_2) H \cos\alpha$ longitudinale.

En posant $f = f_1 - f_2$, l'aimantation apparente est donc $A + fH\cos\alpha$ et le couple produit par l'action du champ

$$V(A + fH\cos\alpha) H \sin\alpha = MH\left(1 + f\frac{H}{A}\cos\alpha\right)\sin\alpha.$$

Lorsque les déviations restent très faibles, comme dans le cas des oscillations, on peut remplacer $\cos\alpha$ par l'unité. Si le barreau est porté par un fil de torsion négligeable et que K soit le moment d'inertie du système mobile, le nombre n d'oscillations simples par seconde, toutes réductions faites pour l'amplitude et l'amortissement, donne la relation (293)

$$(1) \qquad n^2\pi^2 K = MH\left(1 + f\frac{H}{A}\right) = MH(1 + x).$$

A part le terme x de correction, cette expérience fournit une méthode très simple pour comparer deux champs différents, comme le faisaient Biot et Savart (315); elle permet aussi de déterminer en valeur absolue le couple directeur MH relatif à l'aimantation rigide.

Nous verrons plus loin comment il est possible d'évaluer le coefficient f. Pour un barreau d'acier à section carrée dont la longueur est 10 fois le côté, on a environ $f_1 = 0{,}98$ et $f_2 = 0{,}20$; par suite, $f = f_1 - f_2 = 0{,}78$. Si la valeur moyenne A de l'aimantation rigide est égale à 200, valeur qu'on ne dépasse guère dans les aimants ordinaires, et que les oscillations soient produites par la composante horizontale du champ terrestre, qui est voisine de 0,195 à Paris, il en résulte

$$x = f\frac{H}{A} = 0{,}78\,\frac{0{,}195}{200} = 0{,}00076.$$

Dans ce cas, la correction est inférieure à $\frac{1}{1000}$, mais elle

deviendrait très sensible avec des champs plus intenses et une moindre aimantation rigide.

Le rapport des moments magnétiques M et M′ de deux barreaux s'obtiendrait en observant leurs oscillations dans un même champ ; on a ainsi la relation approchée

$$(2) \qquad \frac{M}{M'} = \frac{K}{K'} \cdot \frac{n^2}{n'^2}.$$

Les moments d'inertie K et K′ des deux systèmes pourront être déterminés par les dimensions et le poids des barreaux ou par une expérience de comparaison (**546**).

On éliminera cette mesure accessoire en montant les deux aimants sur le même équipage, avec leurs axes magnétiques parallèles, d'abord de même sens, puis de sens contraires. Les moments magnétiques du système mobile étant alors $M + M'$ et $M - M'$, les nombres d'oscillations n et n' correspondants donnent

$$\frac{M + M'}{n^2} = \frac{M - M'}{n'^2}, \qquad \frac{M}{M'} = \frac{n^2 + n'^2}{n^2 - n'^2}.$$

Si les axes magnétiques des aimants font un angle θ, il suffira encore d'observer la déviation α de l'un d'eux par rapport au champ pour la position d'équilibre ; on a, en effet,

$$(3) \qquad HM \sin\alpha = HM' \sin(\theta - \alpha), \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha}.$$

Dans le cas où les barreaux sont orientés à angle droit, il reste simplement [1]

$$M' = M \operatorname{tang} \alpha.$$

Il est à remarquer toutefois que des aimants trop rapprochés réagissent l'un sur l'autre, ce qui contribue à augmenter l'aimantation temporaire. La réaction est plus faible, sans être négligeable, quand les axes sont à angle droit.

Une autre méthode consiste à porter l'aimant par une balance de torsion, unifilaire ou bifilaire. L'appareil mobile étant

[1] E. Bouty, *Ann. de l'École Norm. Sup.* [2], t. IV, p. 9 ; 1875.

muni d'une aiguille de repère ou d'un miroir réflecteur, on le charge d'abord d'un poids égal à celui du barreau et on règle la suspension de manière que la substitution de l'une des charges à l'autre ne modifie pas l'équilibre. L'axe magnétique du barreau est alors parallèle au méridien, dans la position *naturelle* ou *inverse*, suivant que les deux directions sont de même sens ou de sens contraires.

En désignant par C le coefficient de torsion du système, le couple directeur, dans les deux cas, est $C + MH$ et $C - MH$; cette dernière quantité doit être positive pour que l'équilibre soit stable. Les nombres n et n' d'oscillations correspondants donnent alors

$$(4) \qquad \frac{C + MH}{n^2} = \frac{C - MH}{n'^2}, \qquad MH = C\,\frac{n^2 - n'^2}{n^2 + n'^2} = Cp.$$

Le couple directeur MH est ainsi déterminé par le coefficient C et le nombre p que fournit l'expérience.

Dans le cas actuel, on doit admettre que l'aimantation induite est plus faible pour la position inverse, de sorte que les moments magnétiques apparents peuvent être représentés par $M(1+x)$ et $M(1-x')$, avec $x' < x$.

On déduit alors des expériences d'oscillations, en remarquant que les termes de correction sont très petits,

$$\frac{MH}{C}\left(1 + \frac{x - x'}{2}\right) = p\left(1 + \frac{MH}{C}\,\frac{x + x'}{2}\right) = p\left(1 + p\,\frac{x + x'}{2}\right),$$

$$\frac{MH}{C} = p\left(1 + p\,\frac{x + x'}{2} - \frac{x - x'}{2}\right).$$

Quand on fait osciller un aimant porté par un fil de soie ou un paquet de fils, les effets de torsion interviennent en partie. Pour en tenir compte, on remplace l'aimant par un barreau de cuivre de même poids et de même moment d'inertie. En désignant par n et n_0 les nombres d'oscillations relatives à l'aimant et au barreau de cuivre, on a

$$\pi^2 K = \frac{C + MH(1 + x)}{n^2} = \frac{C}{n_0^2}.$$

Le nombre n_0 ayant été déterminé par expérience, l'équation (1) devra être remplacée par

$$(1)' \qquad MH(1+x) = (n^2 - n_0^2)\pi^2 K.$$

Supposons enfin que l'aimant ait été réglé d'abord dans sa position naturelle et qu'on donne au système une torsion θ. L'aimant est dévié d'un angle α et prend une position *oblique* au champ [1]. Abstraction faite de l'aimantation induite, la condition d'équilibre devient, suivant que la suspension est unifilaire ou bifilaire,

$$(5) \qquad \begin{cases} MH\sin\alpha = C(\theta - \alpha), \\ MH\sin\alpha = C\sin(\theta - \alpha). \end{cases}$$

On dit que l'aimant est dans une position *transverse* quand la déviation α est de 90°. Dans ce cas particulier, l'équilibre ne dépend plus que du magnétisme rigide, puisque l'aimantation induite longitudinale est nulle et que l'aimantation transversale ne donne pas de couple.

C'est encore une méthode pour déterminer le couple directeur MH ou le rapport des moments magnétiques.

805. Champ magnétique d'un aimant. — Considérons un aimant rectiligne régulier, dont le milieu se trouve à l'origine des coordonnées, et prenons l'axe des x parallèle à son axe magnétique. Désignons par X et Y les composantes du champ produit à la distance R, dans une direction qui fait l'angle α avec l'axe magnétique, par F_n et F_t les composantes parallèle et normale au rayon vecteur R.

Lorsque l'aimant est très petit, on a (**108**)

$$F_n = 2\frac{M\cos\alpha}{R^3}, \qquad F_t = \frac{M\sin\alpha}{R^3};$$

$$X = F_n\cos\alpha - F_t\sin\alpha = \frac{M}{R^3}(3\cos^2\alpha - 1),$$

$$Y = F_n\cos\alpha + F_t\cos\alpha = \frac{M}{R^3}3\cos\alpha\sin\alpha.$$

[1] Gauss, *Resultate aus den Beob. des Mag. Ver.*; 1837. — *Œuvres*, p. 137.

Si l'aimant a une longueur notable et qu'on puisse l'assimiler à deux masses magnétiques $\pm m$ situées à la distance $2L$, le moment magnétique est $M = 2mL$. Les distances du point considéré aux masses $+m$ et $-m$ étant r et r', le potentiel correspondant a pour expression $V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$ et l'on a

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial R}, \qquad F_t = -\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \alpha}.$$

En posant $L = \lambda R$ et $z = \frac{2LR}{R^2 + L^2}\cos\alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\cos\alpha$, il est facile d'en déduire

$$F_n = \frac{2M\cos\alpha}{R^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\left[1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{3.5}{2.4}z^2\left(\frac{2}{3} - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}z^4\left(\frac{3}{5} - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \ldots\right],$$

$$F_t = \frac{M\sin\alpha}{R^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{3.5}{2.4}z^2 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}z^4 + \ldots\right].$$

On remarquera, en particulier, que dans l'équateur de l'aimant, où $\alpha = 90^\circ$, on a $z = 0$, $Y = F_n = 0$ et

$$-X_2 = F_t = \frac{M}{R^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le champ est alors simplement en raison inverse du cube de la distance aux pôles.

Suivant la direction de l'axe magnétique, la valeur de z est égale à $\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$. On a d'ailleurs directement

$$X_1 = \frac{m}{(R-L)^2} - \frac{m}{(R+L)^2} = \frac{m}{R^2}\left[\frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{1}{(1+\lambda)^2}\right] = \frac{2M}{R^3(1-\lambda^2)^2},$$

$$X_1 = \frac{2M}{R^3}(1 + 2\lambda^2 + 3\lambda^4 + 4\lambda^6 + \ldots).$$

Les quantités qui ont été désignées par X_1 et X_2 sont les valeurs *principales* du champ de l'aimant.

806. Couple réciproque des deux aimants. — Supposons qu'un second aimant de moment M′, situé dans le même plan

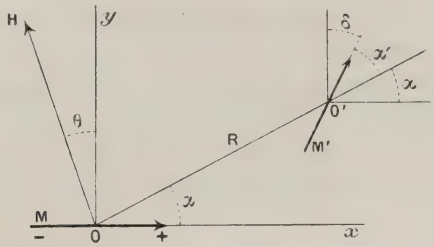


Fig. 245.

que le premier, ait son centre au point O′ (fig. 245) et que son axe magnétique fasse l'angle α' avec la droite $OO' = R$. Si ce second aimant est très court, le couple produit par le champ du premier est $M'(F_n \sin\alpha' - F_t \cos\alpha')$.

En appelant δ l'angle $90^\circ - \alpha' - \alpha$ que fait le barreau M′ avec l'équateur du premier, le terme principal de ce couple est

$$D = \frac{MM'}{R^3}(2\cos\alpha\sin\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha'),$$

$$D = \frac{MM'}{R^3}[(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\delta - 3\sin\alpha\cos\alpha\sin\delta].$$

Si l'on veut tenir compte des longueurs magnétiques 2L et 2L′ des deux aimants supposés réduits à leurs pôles, le couple réciproque C pourra s'exprimer par un développement en série de la forme

$$(6) \qquad C = D\left(1 + \frac{h_2}{R^2} + \frac{h_4}{R^4} + \ldots\right),$$

dans lequel les numérateurs h_2, h_4, ..., sont respectivement des fonctions homogènes du 2e, 4e... degré en L et L′, ne renfermant que des puissances paires de ces deux longueurs. En effet, si on change le signe de L ou de L′, ce qui revient à retourner l'un des aimants, le couple C doit conserver la même valeur au signe près.

Les numérateurs h peuvent être calculés, soit par les actions des composantes F_n et F_t du premier aimant sur les deux pôles du second, soit directement par les quatre actions des pôles deux à deux.

Lamont [1] a poussé le calcul jusqu'aux termes du quatrième degré pour les cas où le milieu du second aimant occupe une des positions principales par rapport au premier, c'est-à-dire sur la ligne des pôles ou dans le plan de l'équateur, l'angle α étant égal à zéro ou à 90°. En appelant δ_1 et δ_2 les valeurs correspondantes de δ et posant $L=\lambda R$, $L'=\lambda' R$, les couples C_1 et C_2 relatifs à ces deux positions principales, sont

$$C_1=\frac{2MM'}{R^3}\cos\delta_1\Big[1+2\lambda^2-3\lambda'^2(1-5\sin^2\delta_1)+3\lambda^4$$
$$-15\lambda^2\lambda'^2(1-5\sin^2\delta_1)+\frac{45}{8}\lambda'^4(1-14\sin^2\delta_1+21\sin^4\delta_1)\Big],$$

$$C_2=-\frac{MM'}{R^3}\cos\delta_2\Big[1-\frac{3}{2}\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda'^2(4-15\sin^2\delta_2)+\frac{15}{8}\lambda^4$$
$$-\frac{15}{4}\lambda^2\lambda'^2(6-23\sin^2\delta_2)+15\lambda'^4(1-42\sin^2\delta_2-21\sin^4\delta_2)\Big].$$

Désignant par p_1 et p_2 ou q_1 et q_2 les termes du second ou du quatrième ordre en fonction des rapports λ et λ', on mettra ces expressions sous la forme

$$(7)\qquad \begin{cases} C_1=\dfrac{2MM'}{R^3}\cos\delta_1(1+p_1+q_1), \\ C_2=-\dfrac{MM'}{R^3}\cos\delta_2(1+p_2+q_2). \end{cases}$$

Il est nécessaire d'examiner quelle peut être l'importance de ces termes de correction. Supposons d'abord que le second aimant soit extrêmement petit par rapport à la distance R, auquel cas le rapport λ' est négligeable; ces termes sont alors indépendants des angles δ.

[1] J. Lamont, *Handbuch des Magnetismus*, p. 281; 1867.

Si la distance R est égale à 4 fois la longueur 2L du premier aimant, par exemple, ou $\lambda = \frac{1}{8}$, il en résulte

$$p_1 = 2\lambda^2 = 0{,}031\,250, \qquad q_1 = 3\lambda^4 = 0{,}000\,732;$$

$$p_2 = -\frac{3}{2}\lambda^2 = -0{,}023\,437, \qquad q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4 = 0{,}000\,457.$$

Si les aimants sont presque perpendiculaires entre eux, on peut négliger les sinus des angles δ dans les termes de correction. En posant $x = \frac{L'}{L} = \frac{\lambda'}{\lambda}$, on a alors

$$p_1 = 2\lambda^2\left(1 - \frac{3}{2}x^2\right), \qquad q_1 = 3\lambda^4\left(1 - 5x^2 + \frac{15}{8}x^4\right);$$

$$p_2 = -\frac{3}{2}\lambda^2(1 - 4x^2), \qquad q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4(1 - 12x^2 + 8x^4).$$

Pour que les termes du quatrième ordre soient nuls, il faut que le rapport x des longueurs magnétiques soit la racine positive, plus petite que l'unité, de l'une des équations

$$1 - 5x^2 + \frac{15}{8}x^4 = 0, \qquad x = \frac{1}{2{,}15} = 0{,}465.$$

$$1 - 12x^2 + 8x^4 = 0, \qquad x = \frac{1}{3{,}36} = 0{,}298.$$

En faisant $x = 0{,}5$ on a $p_2 = 0$ et le terme q_1 est très petit. Pour la même valeur $\lambda = \frac{1}{8}$, il vient alors

$$p_1 = 0{,}019\,531, \qquad q_1 = -0{,}000\,097;$$

$$p_2 = 0, \qquad q_2 = -0{,}000\,685.$$

Enfin, si les aimants sont presque parallèles, on remplacera les sinus des angles δ par l'unité, ce qui donne

$$p_1 = 2\lambda^2(1 + 6x^2), \qquad q_1 = 3\lambda^4(1 + 20x^2 + 15x^4);$$

$$p_2 = -\frac{3}{2}\lambda^2(1 + 11x^2), \qquad q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4(1 + 34x^2 - 496x^4).$$

Dans ce cas, q_1 est positif et q_2 s'annule pour $x=0,301$. Avec $x=0,5$ et $\lambda=\frac{1}{8}$, on aurait

$$p_1=+0,078125, \qquad q_1=+0,005078;$$
$$p_2=-0,087898, \qquad q_2=-0,009825.$$

Ces calculs ne sont d'ailleurs qu'une approximation et ne peuvent être utilisés directement dans la pratique, parce que l'action des aimants n'est pas réductible à celle de leurs pôles; d'autre part, même pour des barreaux semblables, la distance des pôles n'est pas proportionnelle à la longueur des barreaux. Il est manifeste, en tous cas, que les termes du quatrième ordre restent très petits lorsque le second aimant est dans une position principale du premier et que leurs directions sont presque rectangulaires.

807. **Déviation dans un champ.** — Supposons que le second aimant soit mobile autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure et placé dans un champ uniforme dont la compo-

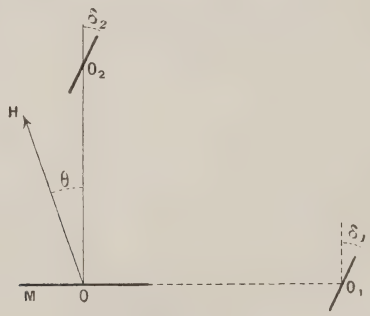


Fig. 246.

sante efficace H (fig. 246) fait l'angle θ avec l'équateur du premier barreau.

Pour la première position principale, le barreau mobile M′ étant en O_1, on aura ainsi, à part les termes de correction,

$$H\sin(\theta_1+\delta_1)=\frac{2M}{R^3}\cos\delta_1.$$

Pour que l'angle δ conserve le même signe quand le bar-

reau M′ occupe la seconde position principale, en O_2, il suffit de supposer que le barreau M a été renversé, ce qui donne

$$H \sin(\theta_2 + \delta_2) = \frac{M}{R^3} \cos \delta_2.$$

On peut faire $\theta = 0$ ou $\delta = 0$, c'est-à-dire maintenir le barreau M perpendiculaire au méridien du champ ou au second barreau M′, ce qui correspond à deux modes d'observation. Les formules deviennent alors

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{2M}{R^3} = H \operatorname{tang} \delta_1 = H \sin \theta_1, \\[2ex] \dfrac{M}{R^3} = H \operatorname{tang} \delta_2 = H \sin \theta_2. \end{cases}$$

Les deux méthodes sont analogues à celle de la boussole des tangentes ou de la boussole des sinus.

808. Discussion. — L'importance de cette expérience, qui est utilisée pour déterminer la composante horizontale du champ terrestre, exige qu'on en discute le degré de précision.

Remarquons d'abord que la distribution du magnétisme n'est pas toujours symétrique sur les barreaux et que la distance R des centres ne peut être facilement déterminée dans une seule observation.

On fait alors quatre expériences à la même distance, d'abord en retournant le barreau M bout pour bout, puis en le plaçant de l'autre côté du barreau dévié, où l'on fait un nouveau retournement. On a ainsi quatre valeurs peu différentes des angles δ ou θ et on prend la moyenne de leurs expressions trigonométriques ou simplement la moyenne des angles. La valeur de R à introduire dans les formules est la moitié de la distance des deux positions occupées par le barreau déviant.

Pour tenir compte des termes de correction, il faut multiplier les premiers membres des équations (8) par une expression de la forme $1 + p + q$. Comme il est facile de réduire le terme q du quatrième ordre à moins de $\frac{1}{1000}$, on peut se borner au précédent que l'on déterminera par deux expériences faites à des distances différentes R et R′ ; ce mode de déter-

mination englobe une partie notable de la correction qui correspondrait au terme suivant.

Supposons d'abord que l'angle δ n'entre pas dans les corrections, ce qui a lieu en particulier pour la méthode des sinus. Soit u la valeur de $\tang\delta$ ou de $\sin\theta$ relative à la distance R pour l'une des équations (8), u' la valeur relative à la distance plus grande R', p et p' les termes de correction correspondants. Comme ces termes sont en raison inverse de la distance, si l'on pose $R = \rho R'$, il en résulte $p' = p\rho^2$.

On a alors

$$r = \frac{R'^3 u'}{R^3 u} = \frac{1 + p'}{1 + p} = \frac{1 + p\rho^2}{1 + p},$$

$$(9) \qquad p = \frac{1 - r}{r - \rho^2}.$$

Le rapport r étant connu par la mesure des distances et celle des quantités u et u', l'équation (9) détermine le terme p.

Pour simplifier le raisonnement, on peut reporter toutes les erreurs expérimentales sur la valeur de u', ce qui revient à supposer que les quantités R, R' et u sont connues exactement. L'erreur dp correspondant à une erreur $dr = \frac{1}{\rho^3}\frac{du'}{u}$ est

$$dp = -\frac{1 - \rho^2}{(r - \rho^2)^2}\, dr = -\frac{1 - \rho^2}{\rho^3 (r - \rho^2)^2}\, \frac{du'}{u},$$

ou, en remarquant que r est très voisin de l'unité,

$$dp = -\frac{1}{\rho^3 (1 - \rho^2)}\, \frac{du'}{u}.$$

Toutes choses égales, la moindre erreur correspond au maximum du produit $\rho^3(1 - \rho^2)$, c'est-à-dire à la condition

$$3 - 5\rho^2 = 0, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{R'}{R} = 1{,}29.$$

Le cube de la dernière fraction est égal à 2,15 et le produit

$\rho^3(1-\rho^2)$ très voisin de $\frac{1}{5}$; il en résulte, au moins d'une manière approximative, $u = 2u'$ et

$$dp = -5\frac{du'}{u} = -\frac{5}{2}\frac{du'}{u'}.$$

Ainsi les meilleures conditions d'exactitude sont réalisées quand les angles δ ou θ correspondant à la distance R′ sont à peu près moitié moindres que pour la distance R.

Le terme p n'étant pas supérieur à $\frac{1}{20}$, la quantité dp représente l'erreur relative sur le rapport du moment M au champ H, déterminé par expérience. Pour que cette erreur ne dépasse pas $\frac{1}{1000}$, il faut donc que l'on ait

$$du' < \frac{u}{5000}.$$

Si l'angle observé pour la distance R est de 10° ou 600′, par exemple, on aura 5° pour la seconde et l'erreur commise sur cette lecture devra être inférieure à $0',12 = 7'',2$.

Avec la méthode des tangentes, la déviation intervient dans les termes de correction, qui sont

$$p = 2\lambda^2\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^2\sin^2\delta\right),$$

$$p' = 2\rho^2\lambda^2\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^2\sin^2\delta'\right);$$

$$\frac{p'}{p\rho^2} = 1 + \frac{15}{2}\frac{x^2(\sin^2\delta' - \sin^2\delta)}{1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^2\sin^2\delta} = 1 + \varepsilon.$$

Si l'on suppose que le rapport x des longueurs des barreaux soit égal à $\frac{1}{2}$, on a

$$\varepsilon = 3\frac{\sin(\delta+\delta')\sin(\delta-\delta')}{1+3\sin^2\delta}.$$

L'équation (9) doit donc être remplacée par

$$p = \frac{1-r}{r-\rho^2(1+\varepsilon)} = \frac{1-r}{r-\rho^2-\varepsilon\rho^2},$$

et l'erreur relative que l'on commettrait sur la valeur de p, en négligeant cette correction, est sensiblement

$$\frac{\varepsilon\rho^2}{r-\rho^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\,\varepsilon = \frac{3}{2}\,\varepsilon = \varepsilon'.$$

Pour les mêmes angles de 10° et de 5°, on aurait $\varepsilon = 0{,}0564$ et $\varepsilon' = 0{,}0846$. Avec $p = \frac{1}{20}$, le calcul approché donnerait une valeur trop faible d'environ 0,0042. Il est vrai que cette nouvelle correction est à peu près proportionnelle au carré des angles de déviation et se réduirait au millième pour des angles moitié moindres.

Il reste à voir enfin si l'on doit tenir compte des aimantations induites. Considérons, en général, des barreaux disposés comme dans la figure 245. En désignant par MX et MY les composantes rectangulaires du champ produit en O′ par le barreau M, l'équation approchée d'équilibre est

$$H\sin(\theta+\delta) = M(X\cos\delta - Y\sin\delta).$$

Sur le barreau mobile, qui est parallèle au champ, l'aimantation induite est longitudinale et n'intervient pas pour l'équilibre; on peut la supposer comprise dans le moment M′.

Comme le couple des aimants est réciproque, on a aussi

$$MM'(X\cos\delta - Y\sin\delta) = MM'Y',$$

en désignant par M′Y′ une valeur moyenne de la composante verticale du champ produit par le barreau M′ sur M; la valeur de Y′ diffère très peu de celle qui convient pour le centre O. La condition d'équilibre peut donc s'écrire

$$H\sin(\theta+\delta) = MY'. \tag{10}$$

Soient $M_1 = x_1 M$ et $M_2 = x_2 M$ les moments magnétiques, longitudinal et transversal, des aimantations induites sur le barreau M, et M′X′ la composante au point O du champ produit par le barreau M′. Le couple M′MY′ doit être remplacé par

$$M'[M(1+x_1)Y' - Mx_2X'] = M'MY'\left(1 + x_1 - x_2\frac{X'}{Y'}\right).$$

Il en résulte que l'erreur relative qui correspond à l'aimantation induite a pour expression

$$\varepsilon = x_1 - x_2 \frac{X'}{Y'} = \frac{X'}{Y'}\left(x_1 \frac{Y'}{X'} - x_2\right).$$

On a d ailleurs, en appelant A l'aimantation rigide,

$$x_1 = \frac{f_1}{A}(M'X' - H\sin\theta), \qquad x_2 = \frac{f_2}{A}(M'Y' + H\cos\theta);$$

$$A\varepsilon = \frac{X'}{Y'}\left[M'Y'(f_1 - f_2) - H\left(f_2\cos\theta + f_1 \frac{Y'}{X'}\sin\theta\right)\right],$$

ou, en tenant compte de (10)

$$A\varepsilon = \frac{X'}{Y'} H\left[\frac{M'}{M}(f_1 - f_2)\sin(\theta + \delta) - f_2\cos\theta - f_1 \frac{Y'}{X'}\sin\theta\right].$$

Si on emploie la méthode des sinus, $X' = 0$ et il reste

$$\varepsilon = -f_1 \frac{H}{A}\sin\theta.$$

Dans les conditions indiquées précédemment (804), la correction relative à l'action du champ terrestre serait inférieure à 0,0005 pour une déviation de 30°.

Avec la méthode des tangentes, $\theta = 0$, ce qui donne

$$\varepsilon = \frac{H}{A}\frac{X'}{Y'}\left[\frac{M'}{M}(f_1 - f_2)\sin\delta - f_2\right].$$

Il est surtout intéressant d'examiner les cas où le barreau mobile occupe une des positions principales O_1 ou O_2 (fig. 246) par rapport au barreau déviant. Le rapport des composantes X' et Y' est égal à $2\tan\delta$ pour la première position et à $\frac{1}{2}\tan\delta$ pour la seconde.

D'autre psrt, si l'on suppose que les barreaux ont la même aimantation moyenne, le rapport des moments M' et M est égal

au cube x^3 du rapport de leurs longueurs. Faisant encore $x=\frac{1}{2}$, l'erreur ε est le double ou la moitié de la quantité

$$\frac{H}{A}\tang\delta\left[\frac{f_1-f_2}{8}\sin\delta-f_2\right]=0{,}001\tang\delta\left[\frac{0{,}78}{8}\sin\delta-0{,}20\right].$$

Nous remarquerons, en passant, que les équations (8) permettent de comparer les moments magnétiques de deux barreaux en observant les déviations qu'ils produisent sur un aimant mobile dans un même champ.

Enfin, l'observation des oscillations d'un barreau donne le produit $MH=P$ par l'équation (1) et le quotient $\frac{M}{H}=Q$ par l'une des équations (8), en tenant compte dans chaque cas des termes de correction. On en déduit

$$M^2=PQ,\qquad H^2=\frac{P}{Q}.$$

Les deux expériences permettent ainsi de déterminer en valeurs absolues le moment magnétique M du barreau et la composante efficace H du champ.

809. Loi des actions magnétiques. — Une application importante de cette méthode a été faite par Gauss [1] pour vérifier la loi des actions magnétiques.

Supposons que l'action qui s'exerce entre deux masses magnétiques soit en raison inverse de la n^e puissance de la distance. Le champ magnétique d'une masse m à la distance r est alors $\frac{m}{r^n}$ et son potentiel $\frac{1}{n-1}\frac{m}{r^{n-1}}$.

Pour un couple de deux masses $\pm m$, dont le moment magnétique est mh, le potentiel en un point P, dont les distances aux masses $+m$ et $-m$ sont r et r', a pour expression

$$V=\frac{m}{n-1}\left(\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{1}{r'^{n-1}}\right)=\frac{m\,dr}{r^n}.$$

Or, le produit mdr est la projection du moment $mh=M$ des

[1] Gauss, *Intensitas vis magneticæ terrestres*, etc.— *Comm. Soc. Reg. Gotting.* t. VIII; 1841. — *Gauss werke*, t. V, p. 81.

deux masses sur le rayon vecteur r qui joint au point P le milieu du système. En appelant α l'angle que fait la direction de l'axe magnétique avec la droite r, on a donc $V = \frac{M \cos \alpha}{r^n}$. Les composantes du champ F_n et F_t, normale et tangentielle à la sphère de rayon r, sont alors

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial r} = n \frac{M}{r^{n+1}} \cos \alpha,$$

$$F_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{M}{r^{n+1}} \sin \alpha.$$

Pour un aimant de longueur finie, on trouverait également qu'à part des termes de correction, les valeurs du champ aux deux positions principales, à la même distance R du milieu du barreau, sont $n \frac{M}{R^{n+1}}$ et $\frac{M}{R^{n+1}}$. Le rapport de ces deux expressions est l'indice n de la puissance qui définit l'action élémentaire.

Gauss a fait agir sur une même aiguille un barreau perpendiculaire au méridien, situé alternativement de manière que l'aiguille fut dans la première ou dans la seconde position principale du barreau. En opérant à 13 distances différentes comprises entre $1^m,3$ et 4^m, on en pouvait déduire, par une méthode de moyennes, les coefficients des deux termes du développement.

Les déviations ont varié de $2^\circ\ 13'\ 51''$ à $4'\ 36''$. A quelques secondes près, toutes les observations sont exactement représentées par les expressions

$$\tang \delta_1 = 0{,}086\,870\,R^{-3} - 0{,}002\,185\,R^{-5},$$
$$\tang \delta_2 = 0{,}043\,435\,R^{-3} + 0{,}002\,449\,R^{-5}.$$

Pour une grande distance, les derniers termes sont négligeables et le rapport des tangentes, c'est-à-dire des champs du barreau déviant sur la ligne des pôles et dans le plan de l'équateur, est égal au rapport des premiers coefficients, lequel est exactement 2. La loi du carré des distances se trouve ainsi vérifiée avec une approximation que ne comportaient pas les expériences de Coulomb.

810. Emploi de la balance. — Le couple produit par l'action du champ terrestre sur un barreau placé dans la position verticale est $MH\left(1+f_1\frac{Z}{A}\right)$ ou $MH\left(1-f'_1\frac{Z}{A}\right)$, suivant que le pôle nord est en bas ou en haut, et ces deux couples sont de sens contraires.

Si l'on attache le barreau d'une manière rigide au fléau d'une balance dont l'axe de rotation est perpendiculaire au méridien, l'appareil peut être équilibré, dans les deux cas, avec des tares P_1 et P_2 agissant par un bras de levier de longueur l; on aura donc

$$(11)\qquad 2HM\left(1+\frac{f_1-f'_1}{2}\cdot\frac{Z}{A}\right)=(P_1-P_2)gl.$$

C'est une sorte de double pesée dans laquelle l'aimantation induite est généralement négligeable, puisqu'elle n'intervient que par une différence.

Lorsque l'aimant est placé horizontalement dans le sens du fléau, le couple magnétique est produit par la composante verticale Z du champ. Les tares Q_1 et Q_2 relatives aux deux positions du barreau donnent encore

$$(12)\qquad 2ZM\left(1+\frac{f_1-f'_1}{2}\cdot\frac{H}{A}\right)=(Q_1-Q_2)gl.$$

Les équations (11) et (12) permettent encore de comparer deux moments magnétiques et leur rapport donnerait la tangente de l'inclinaison :

$$\operatorname{tang} I=\frac{Z}{H}=\frac{Q_1-Q_2}{P_1-P_2}.$$

Von Helmholtz [1] équilibre encore par la balance l'action réciproque de deux barreaux. L'un d'eux, de moment M_2, est suspendu verticalement à l'un des plateaux, l'autre M_1 placé horizontalement sur le second plateau et dirigé vers le milieu du premier. La distance des centres étant R, la composante

[1] Helmholtz, *Ber. der Ak. der Wiss. zu Berlin*, t. XVI; 1883. — *Journ. de Phys.* [2], t. IV, p. 238; 1885.

verticale du champ produit par le barreau M_1 sur les pôles $+m_2$ et $-m_2$ du barreau M_2 est de la forme (**805**)

$$Y = 3\frac{M_1 \sin\alpha\cos\alpha}{R^3}(1+p_1) = 3\frac{M_1 L_2}{R^4}\frac{1+p_1}{1+\lambda_2^2},$$

ce qui donne, pour l'ensemble des deux forces,

$$3\frac{M_1 2m_2 L_2}{R^4}\cdot\frac{1+p_1}{1+\lambda_2^2} = 3\frac{M_1 M_2}{R^4}\cdot\frac{1+p_1}{1+\lambda_2^2}.$$

L'action de M_2 sur M_1 a la même valeur en signe contraire et tend à faire basculer la balance dans le même sens, ce qui double le résultat. Si on retourne l'un des barreaux, l'action change de signe et la différence $P_{1\cdot 2}$ des tares donne

$$P_{1\cdot 2}lg = 12\frac{M_1 M_2}{R^4}\cdot\frac{1+p_1}{1+\lambda_2^2} = 12\frac{M_1 M_2}{R^4}(1+p_{1\cdot 2}).$$

Pour éliminer en grande partie l'aimantation induite, ainsi que les défauts de symétrie, on fera le retournement sur les deux barreaux et on permutera les plateaux en prenant la moyenne des différences de tare. Lorsque l'axe de rotation de la balance est dans le méridien, l'induction n'a plus d'effet que sur le barreau vertical. Le terme de correction $p_{1\cdot 2}$ est en raison inverse de R^2 et se déterminerait par des expériences à des distances différentes.

On obtient ainsi le produit $M_1 M_2$ des moments magnétiques des deux barreaux. En opérant sur trois aimants dont les moments sont M_1, M_2 et M_3, on en déduit, abstraction faite des termes de correction,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{P_{1\cdot 3}}{P_{2\cdot 3}}, \qquad \frac{M_1}{M_3} = \frac{P_{1\cdot 2}}{P_{2\cdot 3}}, \qquad \frac{M_2}{M_3} = \frac{P_{1\cdot 2}}{P_{1\cdot 3}},$$

$$M_1^2 = \frac{(M_1 M_2)(M_1 M_3)}{M_2 M_3} = \frac{P_{1\cdot 2}P_{1\cdot 3}}{P_{2\cdot 3}}\cdot\frac{R^4 lg}{12}.$$

811. Décharges induites. — Considérons une bobine cylindrique de n spires par unité de longueur, que l'on supposera traversées par l'unité de courant.

Dans le plan équatorial, le potentiel du courant est nul. Le potentiel intérieur en un point P, situé à la distance x de ce plan, a pour valeur $U = -4\pi n x + V$, la quantité V étant un terme correctif qui représente le potentiel des deux couches terminales dont la densité est $\pm n$.

Quand on introduit au point P une masse magnétique m, le travail du courant est $-mU = 4\pi n m x - mV$, et le travail relatif à un aimant

$$-\Sigma m U = 4\pi n \Sigma m x - \Sigma m V.$$

Ce travail n'est autre chose que le flux de force φ émis par l'aimant dans le circuit du courant. Or, le facteur $\Sigma m x$ représente la composante M_x, parallèle à l'axe, du moment magnétique M de l'aimant ; il en résulte

$$\varphi = 4\pi n M_x - \Sigma m V = 4\pi n M_x \left(1 - \frac{\Sigma m V}{4\pi n M_x}\right).$$

La décharge induite dans le circuit de la bobine, quand on enlève l'aimant, détermine la valeur de φ et, par suite, celle du moment M_x, à part un terme de correction. On peut prendre une bobine assez longue pour que ce terme soit négligeable. Dans le cas contraire, on remarquera que le produit $\Sigma m V$ est le travail qui correspond au déplacement relatif de l'aimant et des faces terminales de la bobine.

Lorsque l'aimant est un barreau parallèle à l'axe et que les deux appareils sont centrés, le potentiel moyen de l'aimant sur l'une des faces terminales S est proportionnel à son moment et peut s'écrire MV_1, le facteur V_1 dépendant de la longueur de l'aimant et de la distribution du magnétisme. Ce potentiel ayant la même valeur en signe contraire pour l'autre face, on aura donc

$$\Sigma m V = 2n S . MV_1,$$

$$(13) \qquad \varphi = 4\pi n M\left(1 - \frac{SV_1}{2\pi}\right) = 4\pi n M(1 - \varepsilon).$$

Si la valeur de ε n'est pas négligeable, on pourra la remplacer, avec une approximation suffisante, par l'inverse du carré de la demi-longueur de la bobine (**108**).

D'une manière plus générale (**253**), l'énergie potentielle d'un aimant M dans un champ F qui fait l'angle θ avec la direction de l'axe magnétique a pour expression $-MF\cos\theta$. Diverses combinaisons de cadres (**576** à **578**) permettent d'obtenir un champ uniforme ; soit G sa valeur pour l'unité de courant. Le travail nécessaire pour amener l'aimant de la direction θ à une autre direction θ', ou la variation correspondante du flux de force de l'aimant dans le circuit, est

$$\varphi = MG(\cos\theta - \cos\theta').$$

Si l'aimant est enlevé à une grande distance, la décharge induite déterminera ainsi la composante $M\cos\theta$ du moment magnétique. Si on retourne l'aimant bout par bout, la décharge induite donne $2M\cos\theta$.

En mesurant par ces méthodes les composanles M_x, M_y et M_z du moment magnétique M par rapport à trois axes rectangulaires, on en déduira

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2.$$

Les cosinus directeurs α, β, et γ de l'aimantation moyenne par rapport aux axes seront déterminés par les relations

$$\frac{\alpha}{M_x} = \frac{\beta}{M_y} = \frac{\gamma}{M_z} = \frac{1}{M}.$$

812. Aimantation moyenne. — Le quotient du moment magnétique d'un corps par son volume donne la valeur moyenne de son aimantation.

Nous avons vu déjà (**310**) que l'aimantation moyenne d'un des barreaux employés par Gauss était égale à 174. Cette aimantation varie souvent de 200 à 400 pour les barreaux dont on se sert dans les laboratoires ou dans les observations de magnétisme terrestre. L'aimantation maximum que peut acquérir l'acier dépend, non seulement de la nature du métal et de sa trempe, mais aussi des dimensions du barreau.

Le magnétisme, en effet, est surtout localisé dans les couches superficielles, soit parce que les procédés d'aimantation employés n'agissent pas facilement sur les parties intérieures,

soit parce que la trempe ne pénètre pas à une grande profondeur. En outre la réaction d'un aimant sur lui-même, ou la force démagnétisante (292), est d'autant moindre que le barreau est plus allongé dans le sens de l'aimantation.

Avec des tiges très minces, M. Kohlrausch [1] a obtenu pour l'acier des moments magnétiques de 100 unités par gramme, ce qui correspond à une aimantation de 780.

Supposons qu'un aimant soit entouré par un circuit de n_0 spires. En prenant l'axe des x perpendiculaire à la surface S du circuit, le flux total d'induction magnétique qui traverse cette surface est (243)

$$\varphi = n_0 \int X_1 \, dS = n_0 \left[4\pi \int A \, dS + \int X \, dS \right].$$

Quand on enlève l'aimant à une grande distance, ou que l'on supprime l'aimantation, le circuit est parcouru par une décharge induite qui donnera la mesure de φ.

Si l'aimant est un barreau sur lequel le circuit s'applique comme un anneau, on peut appeler X et A les valeurs moyennes du champ et de l'aimantation dans la section S et écrire

$$(14) \qquad \varphi = n_0 (4\pi A + X) S = n_0 4\pi A S (1 - \alpha).$$

La décharge relative au déplacement $x' - x$ du circuit est proportionnelle à la différence $\varphi - \varphi'$ des flux d'induction correspondants, ou au flux de force qui sort de l'aimant dans cet intervalle. On en déduira la valeur moyenne de la composante normale extérieure en chaque point (294, III).

Lorsque l'anneau est placé dans la région moyenne d'un barreau très long, le terme de correction α est négligeable ; l'enlèvement de l'anneau à une grande distance produit une décharge qui détermine l'aimantation moyenne A dans la section d'abord entourée. Cette aimantation a une valeur maximum A_0 dans la section médiane, puisque le barreau équivaut toujours à un aimant lamellaire (250) ou à un aimant solenoïdal (246) formé de filets magnétiques uniformes aboutissant à différents points de la surface.

[1] F. Kohlrausch, *Leitfaden der prakt. Phys.* 4e éd. p. 174 ; 1880.

Pour des barreaux plus courts [1], on peut calculer d'abord le champ X_0 dans la section médiane en supposant que les masses magnétiques $\pm m$ des extrémités du barreau sont concentrées aux pôles dont la distance est $2L$; en appelant $2L'$ la longueur du barreau, on a ainsi

$$-X_0 = \frac{2m}{L^2} = \frac{M}{L^3} = \frac{AL'S}{L^3},$$

$$\alpha_0 = \frac{-X_0}{4\pi A_0} = \frac{L'S}{4\pi L^3}.$$

Cette fraction est d'environ $\frac{1}{200}$ quand la longueur magnétique du barreau est 10 fois son diamètre et se réduit au quart pour une longueur double. Dans ce cas, il est suffisant de calculer la correction d'une manière approchée.

813. Distribution du magnétisme. — Les différentes méthodes expérimentales (**295**) ne peuvent donner, avec plus ou moins d'exactitude, que la forme du champ magnétique extérieur. On en déduirait la couche fictive superficielle, ou l'aimantation lamellaire équivalente (**250**), sans qu'il soit possible de connaître la situation réelle du magnétisme. Réduit à ces termes, le problème présente encore de grandes difficultés.

Soit V le potentiel d'un aimant, ρ la densité magnétique et désignons par U le potentiel de l'unité de masse située en un point extérieur P.

En appliquant l'équation de Green (**28**)

$$(15) \qquad \int (U\Delta V - V\Delta U)\,dv = \int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS$$

au volume de l'aimant, ou au volume compris dans une surface S qui l'entoure et à laquelle le point P est extérieur, on aura toujours, dans les limites de l'intégration, $\Delta U = 0$ et $\Delta V + 4\pi\rho = 0$. Désignant par r la distance au point P, le premier membre se réduit à

$$\int U\Delta V\,dv = -4\pi \int \frac{\rho\,dv}{r}.$$

[1] E. Mascart, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. XVIII, p. 5; 1889.

Or, la dernière intégrale représente le potentiel V_p de l'aimant au point P ; l'équation (15) devient alors

$$(16) \qquad 4\pi V_p = \int V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS - \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

La valeur de V_p ne dépend ainsi que du potentiel V sur la surface et de sa dérivée normale. Il existe d'ailleurs une relation entre ces deux quantités. En effet, on peut encore appliquer l'équation (16) au volume limité par la surface S et la surface S′ d'une sphère de rayon r' très petit ayant son centre au point P, à la condition que l'intégrale du second membre soit étendue aux deux surfaces S et S′.

Dans ce cas, si dS' désigne l'élément qui correspond à l'ouverture angulaire $d\omega$, on a $dn = -dr'$, $dS' = r'^2 d\omega$; la partie du second membre de l'équation (16) relative à S′ devient

$$\int \frac{V}{r'^2} dS' + \int \frac{1}{r'} \frac{\partial V}{\partial r'} dS' = \int V d\omega + r' \int \frac{\partial V}{\partial r'} d\omega.$$

Quand le rayon r' tend vers zéro, le dernier terme s'annule et le précédent devient $4\pi V_p$. L'équation (16) se réduit donc à

$$\int V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Comme cette condition est indépendante de la position du point P, il en résulte que les quantités V et $\frac{\partial V}{\partial n}$ sont des fonctions l'une de l'autre. Le champ extérieur est donc déterminé quand on connaît le potentiel sur la surface S ou sa dérivée normale, c'est-à-dire la composante normale du champ en chaque point.

Désignons encore par U le potentiel de l'unité de masse située au point P et de la couche qu'elle induirait, si elle était électrique, sur la surface S supposée conductrice et en communication avec le sol, et soit u la densité de cette couche sur l'élément dS. En appliquant l'équation (15) au volume limité par les mêmes surfaces S et S′, on remarquera que,

pour la surface S', la valeur de U tend vers $\frac{1}{r'}$ quand r' tend vers zéro, ce qui donne

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} dS' = -\int \frac{1}{r'} \frac{\partial V}{\partial r'} r'^2 d\omega = -r' \int \frac{\partial V}{\partial r'} d\omega = 0,$$

$$\int V \frac{\partial U}{\partial n} dS' = -V_p \int \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{r'}\right) r'^2 d\omega = 4\pi V_p.$$

Les termes correspondants relatifs à la surface S sont nuls, car la fonction U et sa dérivée normale sont nulles, cette dérivée étant comptée vers l'intérieur ou l'extérieur, suivant que le point P est en dehors ou dans la surface S.

Si le point P est extérieur, $\Delta V = 0$ dans les limites de l'intégration, sauf peut-être sur la surface, mais alors $U = 0$. On a aussi $\Delta U = 0$ dans les mêmes conditions, mais il faut tenir compte de la couche située sur la surface S, où V n'est pas nul, ce qui donne

$$\int V \Delta U \, d\rho = -4\pi \int V u \, dS.$$

L'équation (15) devient alors

$$\int V u \, dS = -V_p;$$

le potentiel extérieur de l'aimant se trouve ainsi exprimé en fonction du potentiel V sur une surface qui l'entoure.

Si le point P est à l'intérieur de la surface S, on remplacera l'aimant par la couche fictive superficielle; le même raisonnement s'applique alors sans modification. Quant à la densité auxiliaire u, sa détermination se ramène à un problème d'électrostatique généralement difficile à résoudre; elle est liée, en tous cas, au potentiel U par la relation

$$4\pi u = -\frac{\partial U}{\partial n}.$$

D'autre part, l'étude du champ magnétique F permet de connaître, à partir d'une surface de niveau arbitraire V_1, l'intégrale $V_1 - V = \int F \, ds$ le long d'une ligne de force s. Pour

un barreau aimanté, par exemple, on prendra comme point de départ la surface de niveau $V_1 = 0$ qui passe par la région médiane et l'on aura

$$V = -\int F\,ds.$$

Les formules empiriques (**297**) qui représentent la distribution des densités magnétiques à la surface d'un barreau ne reposent que sur des expériences approchées et impliquent l'hypothèse inexacte que cette distribution ne dépend que de la forme de l'aimant.

814. Distance des pôles. — Ces formules de distribution permettraient de déterminer, au même ordre d'approximation, la distance $2L$ des pôles, c'est-à-dire la distance des centres de gravité des couches positive et négative.

Une méthode plus directe consiste à évaluer cette distance par le terme du second ordre, p_1 ou p_2, dans l'expression du couple produit par un aimant sur un autre aimant très court, qui occupe une des positions principales (**806**); on en déduit le rapport de la longueur magnétique à la distance R.

M. Kohlrausch [1] a trouvé ainsi que, pour des barreaux d'acier cylindriques ou creux, trempés ou non, dont la longueur variait de 10 à 30 fois le diamètre, ou même pour des parallélipipèdes dont les dimensions étaient $44 \times 2{,}3 \times 1$, le rapport de la longueur magnétique $2L$ à celle du barreau a oscillé entre 0,81 et 0,86; on pourrait donc considérer cette fraction comme égale en moyenne à 0,83 ou $\frac{5}{6}$.

Toutefois, outre que l'expérience ne comporte une précision suffisante que dans des cas exceptionnels, elle ne donne pas encore la distance réelle des pôles. Considérons, en effet, un aimant rectiligne et symétrique de longueur $2l$, dont la densité linéaire soit λ à la distance x du centre. La masse relative à la longueur dx est $\lambda\,dx$ et le moment magnétique de deux masses symétriques $2\lambda x\,dx$; le moment et la longueur magnétique de l'aimant sont définis par

$$M = 2\int_0^l \lambda x\,dx = 2L\int_0^l \lambda\,dx.$$

[1] F. Kohlrausch, *Wied. Ann.*, t. XXII, p. 411; 1884.

Or, dans les termes de correction relatifs à l'expression du champ, on doit en réalité remplacer L^2 par l'expression

$$L'^2 = \frac{\Sigma M L^2}{\Sigma M} = \frac{\int 2\lambda x\, dx \,.\, x^2}{\int 2\lambda x\, dx} = \frac{\int \lambda x^3\, dx}{\int \lambda x\, dx}.$$

Quel que soit le mode de distribution, en dehors du cas de deux masses isolées, il est facile de voir que la valeur ainsi calculée pour L' est toujours plus grande que L.

Si la distribution est linéaire, par exemple, la densité λ étant proportionnelle à x, on a

$$\frac{L}{l} = \frac{2}{3} = 0{,}667, \quad \frac{L'}{l} = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}775.$$

L'erreur commise sur la distance des pôles, par l'emploi de cette méthode, atteindrait alors un dixième.

M. Blakesley [1] détermine les coordonnées x et y d'un des points P où le champ est perpendiculaire à l'axe. En appelant α et α' les angles que font avec l'axe les rayons vecteurs relatifs aux deux pôles, on a (**106**)

$$\sin\alpha \sin 2\alpha = \sin\alpha' \sin 2\alpha', \tag{17}$$

$$\cot\alpha = \frac{x - L}{y}, \qquad \cot\alpha' = \frac{x + L}{y},$$

$$\cot\alpha + \cot\alpha' = 2\,\frac{x}{y}; \tag{18}$$

$$\frac{2L}{y} = \cot\alpha' - \cot\alpha.$$

Les angles α et α' étant définis par les équations (17) et (18), la dernière donnera la valeur de L. Il serait facile de voir que cette solution n'est pas plus satisfaisante ; la distance des pôles ainsi déterminée dépend encore de la position du point P et du mode de distribution.

On obtient des résultats mieux définis en interprétant d'une autre manière l'équation (13) appliquée à la section médiane du barreau où l'aimantation moyenne est A_0, le champ X_0 et

[1] Blakesley, *Proc. of the L. Phys. Soc.*; 1891, p. 58.

l'induction $4\pi A_0 + X_0$, D'autre part, le flux total de force émis par le pôle positif est $4\pi m$; la plus grande partie s'échappe par les surfaces extérieures pour être finalement absorbée au pôle négatif, mais une partie $-X_0 S$ traverse la section médiane. Le flux de force extérieur est donc $4\pi m + X_0 S$; comme il est égal au flux d'induction $\varphi_0 = (4\pi A_0 + X_0)S$ dans la section médiane, il en résulte $m = A_0 S$. Le flux d'induction φ_0 relatif à l'enlèvement de l'anneau ayant été déterminé par expérience, on en déduit

$$m = A_0 S = \frac{\varphi_0}{4\pi n_0 (1 - \alpha_0)}.$$

Si l'on a déterminé, d'autre part, le moment magnétique M du barreau dans une bobine cylindrique, par l'équation (12), on aura la longueur magnétique 2L par la relation

$$2L = \frac{M}{m} = \frac{\varphi}{\varphi_0} \frac{n_0}{n} \frac{1 - \alpha_0}{1 - \varepsilon}.$$

On trouve ainsi que, pour un même barreau, la distance des pôles varie beaucoup avec l'aimantation, même quand elle a été produite aussi régulièrement que possible, à l'aide d'une bobine magnétisante.

Je citerai, comme exemple, quelques expériences faites avec un barreau d'acier trempé à section circulaire, de $19^c,9$ de longueur et $0^c,4$ de diamètre. On déterminait d'abord les quantités m et M, puis les mêmes éléments après avoir laissé tomber le barreau de la hauteur d'un mètre sur le parquet. Dans le tableau suivant, d désigne la distance des pôles aux extrémités du barreau et f la fraction de magnétisme qui reste après les chocs.

		2L.	d.	f.
I	Aimantation initiale.	$14^c,5$	$2^c,7$	»
	» après plusieurs chutes.	15,07	2,4	0,396
II	Aimantation initiale.	14,11	2,90	»
	» après 3 chutes . . .	14,79	2,55	0,348
III	Aimantation initiale.	13,74	3,08	»
	» après 6 chutes. . .	14,77	2,56	0,418

La distance des pôles est toujours modifiée en même temps que l'aimantation. Les chocs ont pour effet, comme on le savait, de diminuer beaucoup le magnétisme et ils rapprochent les pôles des extrémités du barreau.

Il semble résulter de là qu'on ne peut adopter aucune règle générale et que chaque état d'un barreau devrait être l'objet d'une étude particulière.

AIMANTATION INDUITE.

815. Méthodes d'observation. — Comme le coefficient d'aimantation k et la perméabilité magnétique $\mu = 1 + 4\pi k$ varient avec la force magnétisante, les résultats ne seront bien définis que si l'on opère sur des corps homogènes, avec un champ extérieur uniforme, et si le champ produit par le magnétisme induit est lui-même uniforme ou négligeable.

L'aimantation A est alors liée au champ extérieur F par une expression de la forme (**273**)

$$A = \frac{k}{1 + kC} F,$$

et le moment magnétique d'un volume v est

$$(1) \qquad M = vA = v \frac{k}{1 + kC} F.$$

A l'intérieur du corps, la valeur du champ est $\frac{F}{1 + kC}$, celle de l'induction $\frac{\mu F}{1 + kC}$, et le flux d'induction dans une section S normale au champ a pour expression

$$(2) \qquad \varphi = \frac{\mu S}{1 + kC} F.$$

Le facteur constant C est égal à $\frac{4\pi}{3}$ pour la sphère et à l'un des coefficients L, M ou N pour l'ellipsoïde (**276**), quand le champ est parallèle à l'un des axes principaux. Pour un cylindre circulaire de grande longueur, parallèle ou perpendiculaire au champ, on a encore $C = 0$ ou $C = 2\pi$.

Un corps isotrope, limité par une surface de forme quelconque, se comporte d'ailleurs comme un ellipsoïde, en ce sens que l'aimantation moyenne est parallèle au champ pour trois directions principales rectangulaires. En désignant par f le coefficient d'aimantation moyenne relatif à l'une de ces directions, on peut écrire

$$(3) \qquad A = fF, \qquad M = \nu A = \nu f F.$$

Dans un circuit magnétique soumis à l'influence d'un courant I qui parcourt N spires, la force magnétomotrice est $4\pi NI$ (**361**); avec la seule hypothèse que l'aimantation est en chaque point parallèle au champ, le flux d'induction est, en appelant R la réluctance du circuit [1],

$$(4) \qquad \varphi = \frac{4\pi NI}{R}.$$

Le circuit le plus simple, en théorie, est un anneau circulaire enveloppé par une bobine annulaire à enroulement régulier (**579**) dont les N spires sont appliquées sur la surface. Le champ intérieur est à peu près uniforme dans chaque section S lorsque l'épaisseur de l'anneau est très petite par rapport à sa longueur moyenne l, de sorte que la perméabilité est la même dans toute l'étendue de l'anneau. On a alors

$$(5) \qquad \varphi = \mu S \frac{4\pi NI}{l}.$$

Pour éviter l'obligation d'enrouler une bobine sur chaque anneau, M. Hopkinson [2] introduit une tige aa' (fig. 247), qui doit servir d'*éprouvette*, dans les trous opposés d'un cadre en fer PQ de très grande section. Si la tige est bien ajustée dans les

[1] Dans la pratique, on représente habituellement par $\mathfrak{H}$ le champ magnétisant, par $\mathfrak{B}$ l'induction magnétique et par $\mathfrak{F}$ la force magnétromotrice. Si le courant I est évalué en ampères, on a alors

$$\mathfrak{B} = \frac{4\pi}{10}\frac{NI}{R} = 1{,}257\,\frac{NI}{R}.$$

[2] Hopkinson, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1885, p. 456.

trous, le circuit magnétique ne présente pas d'interruption sensible, ou d'*entre-fer* ; la réluctance du cadre est d'aillleurs négligeable et aucune trace de magnétisme n'apparaît à l'extérieur. On peut même couper l'éprouvette en deux parties appliquées l'une sur l'autre par des surfaces bien planes. Cette tige est entourée par une bobine BB′ formée de deux parties distinctes, dont le nombre total de spires est N, et qui laissent entre elles un petit intervalle pour y intercaler une autre bobine b'. Le flux d'induction est représenté par la même

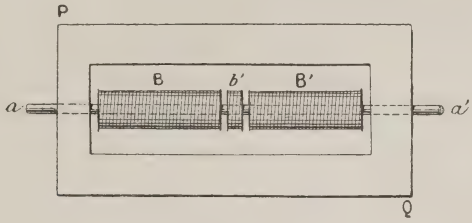


Fig. 247.

expression (5) en fonction de la section S de la tige et de la longueur intérieure l du cadre.

816. Mesure des moments magnétiques. — Si le corps ne forme pas un circuit magnétique fermé, comme une sphère ou un barreau cylindrique, on déterminera le moment magnétique induit par l'une des méthodes indiquées plus haut.

Supposons, par exemple, qu'un cylindre soit placé dans une direction parallèle à la composante horizontale H du champ terrestre ; le moment magnétique peut s'écrire $vf_1 H = M$, le facteur f_1 différant très peu du coefficient d'aimantation k si le barreau est assez long. A la distance R du centre et dans une des positions principales, le champ produit est, à part les termes de correction, $+\frac{2M}{R^3}$ ou $-\frac{M}{R^3}$. Sur une aiguille placée en l'un de ces points, le champ résultant sera donc

$$H_1 = H\left(1 + 2\frac{f_1 v}{R^3}\right) \qquad \text{ou} \qquad H_2 = H\left(1 - \frac{f_1 v}{R^3}\right).$$

Les oscillations de l'aiguille feront connaître le rapport des champs H et H_1 ou H et H_2, d'où l'on déduira f_1.

On peut encore faire agir sur l'aiguille, constituée en déclinomètre, l'un des pôles seulement en plaçant le barreau dans le méridien magnétique et l'aiguille à petite distance sur une droite perpendiculaire au barreau menée par le voisinage d'une des extrémités. Pour une distance constante, le champ du barreau à peu près perpendiculaire au méridien est proportionnel à l'aimantation.

Suivant que le barreau est horizontal ou vertical, ce champ est proportionnel à l'une des composantes H ou Z par le même facteur p. Les déviations correspondantes α et β du déclinomètre sont alors

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{p\mathrm{H}}{\mathrm{H}} = p, \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{p\mathrm{Z}}{\mathrm{H}}.$$

Les angles α et β s'obtiendront d'une manière plus exacte en prenant la moyenne des déviations obtenues quand on retourne le barreau face pour face ou bout pour bout, ce qui donne quatre lectures pour chacun d'eux. Cette observation fournit une méthode, assez imparfaite d'ailleurs, pour déterminer l'inclinaison I du champ terrestre par la relation

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{H}} = \operatorname{tang}\mathrm{I} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{p} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Quant au rapport qui existe entre le facteur p et le coefficient f_1, on ne pourrait le déterminer qu'en supposant connue la position des pôles.

La mesure du moment magnétique se fera d'une manière plus exacte par l'emploi d'un champ artificiel. Le barreau étant placé dans un cadre à champ uniforme F perpendiculaire au méridien, par exemple dans une longue bobine cylindrique dont le champ est $4\pi n\mathrm{I}$, son moment est $\mathrm{M} = \varphi f_1 \mathrm{F}$ et on le fera agir sur un déclinomètre situé dans une des positions principales.

On éliminera l'action que le courant lui-même exerce sur l'aiguille par deux expériences faites avant et après l'introduction du barreau dans la bobine; il est préférable de la compenser à l'aide d'un circuit auxiliaire assez éloigné pour ne pas

modifier le champ de la bobine. Il suffit, par exemple, d'employer comme déclinomètre l'aiguille d'un galvanomètre et de mettre le cadre en dérivation sur le courant principal par une résistance telle que l'effet total soit équilibré. Dans ce cas, la déviation α ne dépend plus que de l'aimantation induite dans le barreau. Si le déclinomètre est placé dans la première position principale, la déviation α donne

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2M}{HR^3} = f_1 \frac{2\rho F}{HR^3}.$$

On aura une idée plus précise de cette méthode par les résultats de quelques expériences [1]. Avec des barreaux cylindriques à section circulaire, de 9^c de longueur, formés par des paquets d'un même fil, les coefficients moyens f_1 et f_2 d'aimantation longitudinale et transversale ont été :

Rapport de la longueur au diamètre.	F.	f_1.	f_2.
3,3	1,3	0,70	»
	2,0	0,71	0,13
	3,1	0,74	0,13
	6,9	0,79	0,16
12,3	1,2	2,81	»
	3,1	3,04	»
	5,7	3,37	0,12
	7,0	3,51	0,16

Les deux coefficients augmentent d'une manière manifeste avec le champ, mais cette variation est faible, surtout lorsque les cylindres sont très courts.

Dans le cas d'une aimantation transversale, un cylindre de grande longueur devrait donner

$$f_2 = \frac{k}{1+2\pi k} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{2\pi k}} = \frac{0,159}{1+\dfrac{1}{2\pi k}}.$$

[1] E. Mascart, *Ann. de Ch. et de Phys.* [6], t. XVIII, p. 5; 1889.

Comme le coefficient k est très grand, la valeur limite 0,159 se rapproche beaucoup des résultats de l'expérience.

Les coefficients f ont une importance particulière pour la correction des expériences relatives au champ terrestre. En vue de cette application, on a déterminé leurs valeurs principales f_1, f_2 et f_3 sur des barreaux de fer doux et d'acier en forme de parallélipipèdes rectangles :

Barreaux de fer.

Dimensions.	F.	f_1.	f_2.	f_3.
$9^c \times 3^c \times 2^c$	0,13	0,61	»	»
	0,44	0,68	0,29	0,15
	1,12	0,68	0,26	0,17
	9,9	0,69	0,20	0,13
$9^c \times 2^c \times 1^c$	0,13	1,14	»	»
	0,84	1,39	0,29	0,18
	4,0	1,37	0,21	0,10
	9,8	1,31	0,22	0,11

Barreaux d'acier.

$9^c \times 3^c \times 2^c$	0,13	0,69	0,28	0,19
	1,08	0,69	0,27	0,18
$9^c \times 2^c \times 1^c$	0,12	1,07	0,22	»
	1,03	1,09	0,22	»
$9^c \times 1^c \times 1^c$	0,12	1,53	0,22	»
	1,01	1,62	0,22	»

Acier trempé.

$9^c \times 1^c \times 1^c$	0,12	0,97	0,21	»
	1,07	0,98	0,22	»

Les coefficients varient assez peu dans les limites des expériences ; l'acier s'aimante moins que le fer, surtout après les opérations de trempe.

Les décharges induites fournissent une méthode plus générale. Supposons d'abord qu'un barreau, soumis au champ terrestre, où il prend un moment magnétique M, soit placé dans une longue bobine cylindrique.

Si on enlève ce barreau, la variation de flux d'induction dans la bobine est $4\pi n M$ (**811**). Suivant que l'axe de la bobine était horizontal et dans le méridien ou vertical, on a

$$\varphi = f_1 4\pi n \rho H \qquad \text{ou} \qquad \varphi = f_1 4\pi n \rho Z.$$

Dans le premier cas, la composante H s'élimine d'elle-même par l'observation du galvanomètre balistique.

La disposition indiquée par la figure 248 permet d'opérer

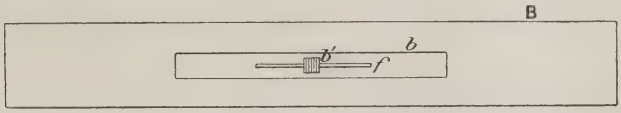


Fig. 248.

avec un champ artificiel. Le barreau f est placé dans une longue bobine magnétisante b, entourée elle-même par une bobine extérieure B plus longue.

Quand on excite la bobine magnétisante, le courant agit aussi sur la bobine B. On peut déterminer la décharge correspondante par une expérience à blanc, c'est-à-dire sans barreau de fer, mais il est préférable de la compenser en plaçant sur les circuits respectifs des bobines auxiliaires b_1 et B_1 ayant la même induction mutuelle et disposées de manière que la décharge y soit de sens contraire ; une expérience à blanc permettra de vérifier si la compensation est exacte.

Introduisant cette fois le barreau, son moment magnétique se détermine par la décharge induite à l'établissement du courant dans la bobine magnétisante. La suppression du courant devrait donner la même décharge en sens contraire, mais les deux déviations sont généralement inégales et leur différence correspond au magnétisme résiduel.

Supposons maintenant qu'on entoure la section moyenne du barreau par une bobine b' de n' tours. La décharge dans ce nouveau circuit correspond au flux d'induction qui provient du barreau et à l'action de la bobine magnétisante ; ce dernier

effet est très faible et peut d'ailleurs être déterminé par une expérience à blanc. Si le barreau est assez long pour que la décharge induite dans la bobine b' permette de déterminer, sans erreur sensible (**815**), la masse magnétique de chaque pôle, on pourra déduire des deux expériences simultanées la distance 2L des pôles.

Avec un barreau cylindrique de $0^c,3$ de diamètre et $2l = 20^c,7$ de longueur on a ainsi obtenu, en désignant par d la distance des pôles aux extrémités,

F.	d.	2L.	$\frac{L}{l}$.
1 à 7	$3^c,04$	$14^c,82$	0,716
10,4	$2^c,79$	$15^c,12$	0,730
22	$2^c,40$	$15^c,9$	0,768
57	$1^c,44$	$17^c,82$	0,861

La longueur magnétique augmente avec le champ, et il en est de même pour l'aimantation temporaire d'un barreau d'acier, à l'inverse de qui avait lieu pour des aimants affaiblis par des chocs successifs.

817. Perméabilité. — La décharge induite dans la bobine b' (fig. 248) permet aussi de déterminer le flux d'induction dans la section moyenne, ou au moins ses variations; on aurait d'ailleurs le flux lui-même en retirant le barreau du champ et de la bobine b'. Si la longueur du barreau est assez grande, par exemple 100 fois le diamètre, ce flux φ est très sensiblement égal à μFS et la décharge induite correspond à

$$\varphi' = n'\varphi = \mu n' \mathrm{SF}.$$

Le phénomène est encore mieux défini quand on opère sur un circuit magnétique fermé. Si le barreau est annulaire et muni d'une bobine magnétisante, il suffit d'y enrouler n' tours d'un fil secondaire, ce qui donne encore

$$\varphi' = \mu n' \mathrm{SF} = \mu n' \mathrm{S} \frac{4\pi n \mathrm{I}}{l}.$$

L'appareil de M. Hopkinson (fig. 247) donne le même résultat par la décharge induite sans la bobine b'. Toutefois, il

est à remarquer que l'expérience fournit seulement la perméabilité relative à la variation du champ.

Si le fer est d'abord neutre et que le courant I reçoive des accroissements successifs, l'aimantation finale sera donnée par la somme des décharges induites. Quand on annule ensuite le courant par échelons, le fer garde du magnétisme rémanent qui échappe à une nouvelle observation.

C'est pour obtenir l'aimantation totale à chaque expérience que le barreau aa' est formé de deux parties, dont l'une a est fixée au cadre par une vis de pression et l'autre mobile ; la face de jonction est dans l'intervalle des bobines B et b'. Quand on tire brusquement le morceau a', la bobine b' se relève par l'effet d'un ressort, de manière à perdre le flux d'induction φ' qui la traversait. La décharge induite correspond alors à l'aimantation totale de l'éprouvette.

Entre deux pièces de fer ainsi rapprochées au contact par des surfaces planes perpendiculaires à l'aimantation, l'attraction des couches par centimètre carré (288) est $2\pi A^2$. Si l'aimantation est produite par un champ extérieur F, on doit y ajouter l'action du champ sur la partie mobile ; au total, l'*effort d'arrachement* par unité de surface est donc

$$p = 2\pi A^2 + FA = (1 + 2\pi k)FA = \frac{\mu + 1}{2} FA,$$

ou, en tenant compte des relations $F_1 = \mu F = F + 4\pi A$,

$$(6) \qquad p = \frac{\mu^2 - 1}{8\pi} F^2 = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \frac{F_1^2}{8\pi} = \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \frac{(4\pi A)^2}{8\pi}.$$

Comme la perméabilité μ est en général assez grande, on fait habituellement usage des expressions plus simples

$$(6)' \qquad p = \mu^2 \frac{F^2}{8\pi} = \frac{F_1^2}{8\pi} = \frac{(4\pi A)^2}{8\pi}.$$

La mesure de l'effort d'arrachement relatif à une surface S déterminera ainsi l'induction F_1 ou l'aimantation A.

Avec une bobine annulaire (579) renfermant un nombre total

de N spires, le champ moyen est $F = 4\pi \frac{NI}{l}$. Si la bobine et l'anneau sont coupés par un plan diamétral, l'effort d'arrachement pour l'ensemble des deux sections est

$$P = 2pS = (\mu^2 - 1)4\pi \frac{N^2 I^2}{l^2} S.$$

On a quelquefois employé la méthode d'arrachement en disposant l'appareil de M. Hopkinson dans une direction verticale, pour déterminer par des poids ou par un ressort dynamométrique l'attraction des deux tiges, mais le frottement de la partie mobile dans les trous du cadre peut nuire à l'exactitude des mesures.

C'est pour éviter cette cause d'erreur, que M. Bosanquet [1] supprime le cadre et réduit l'appareil à sa partie centrale. L'induction F_1 est mesurée par la décharge induite dans la bobine b' et, après avoir équilibré la tige a' par un contrepoids, on détermine la charge nécessaire pour produire l'arrachement. La formule $(6)'$ se vérifie alors à 2 ou 3 °/₀ près, sauf pour le cas de petites forces magnétisantes, par exemple inférieures à 5 unités.

818. Propriétés du fer. — Pour les expériences comparatives, on peut employer des méthodes plus rapides. Avec des échantillons de fer, par exemple, on les placera à l'intérieur d'une bobine magnétisante perpendiculaire au méridien et disposée de manière que son axe soit dirigé vers le déclinomètre. Si l'action propre de la bobine sur l'aiguille est compensée par celle d'un autre circuit que parcourt le même courant, la tangente de la déviation α est proportionnelle au moment magnétique. Le rapport des déviations obtenues avec deux barreaux de mêmes dimensions, placés au même point et aimantés par le même courant, est égal au rapport de leurs moments magnétiques.

L'expérience est encore plus simple pour le magnétisme permanent des barreaux d'acier. Après les avoir aimantés par un même courant, on les place de part et d'autre du déclinomètre sur une perpendiculaire au méridien, leurs pôles de

[1] B. H. M. Bosanquet, *Ph. Mag.* [5], t. XXII, p. 535; 1886.

même nom étant opposés et on cherche les distances R et R′ pour lesquelles les deux actions se font équilibre. Aux corrections près, les moments magnétiques M et M′ des barreaux sont proportionnels aux cubes des distances R et R′.

Les qualités magnétiques du fer varient avec toutes les circonstances qui modifient sa constitution ou son état physique; en outre, les actions magnétiques antérieures laissent des traces permanentes qu'on ne peut faire disparaître qu'en chauffant le métal au rouge. Comme cette opération a nécessairement modifié les qualités primitives du métal, on conçoit que rien n'est plus difficile que d'obtenir des échantillons parfaitement identiques.

Les phénomènes d'hystérésis (285) compliquent encore le problème. L'aimantation produite par un champ déterminé dépend beaucoup des circonstances. Ainsi, quand un barreau de fer doux est placé dans une bobine magnétisante, on peut supprimer l'action du champ de diverses manières, soit par la rupture brusque du courant, soit en diminuant son intensité d'une manière continue jusqu'à zéro ou en enlevant le barreau sans secousses à une grande distance. Dans le second cas, le magnétisme résiduel peut être double de ce qu'il était dans le premier.

Les premiers résultats numériques sur l'aimantation du fer doux par les courants sont dus à Lenz et Jacobi [1]. Avec la méthode d'induction appliquée à des barreaux cylindriques, ils concluent de leurs expériences que l'aimantation est proportionnelle à l'intensité du courant. Vers la même époque, Joule [2] mettait en évidence le fait capital de l'existence d'un maximum d'aimantation (283). Il opérait par arrachement des deux parties d'un anneau ou de deux cylindres placés bout à bout. Joule remarque que le poids nécessaire pour détacher les pièces est d'abord proportionnel au carré du courant, c'est-à-dire de la force magnétisante, puis varie moins vite et tend enfin vers un maximum.

Dans le tableau suivant, extrait du mémoire de Joule, les quatre premiers nombres sont relatifs à ses propres recher-

(1) Lenz et Jacobi, *Pogg. Ann.*, t. XLVIII, p. 225; 1839.

(2) Joule, *Ann. of Electricity*, t. IV, p. 474; 1839 et t. V, p. 187; 1840. — *Scient. papers*, t. I, p. 30

ches; les trois suivants sont déduits d'expériences antérieures de Nesbit, de Henry et de Sturgeon :

Sect. des barreaux en cent. carrés.	Poids maximum en kilogrammes par centim. carré.	Aimantation maximum. A.	Champ. $4\pi A$.
64,5	14,695	1514	19025
1,26	17,638	1660	20860
0,2813	19,349	1738	21840
0,0077	11,818	1358	17064
29,03	22,312	1869	23487
25,42	13,383	1445	18158
1,26	18,000	1676	21050

Le maximum d'aimantation peut ainsi atteindre des valeurs voisines de 1700 ou 1800 et le champ magnétique entre les deux surfaces dépasse 20000 unités. Des nombres de même ordre ont été obtenus par différents observateurs.

L'existence de ce maximum est une conséquence immédiate de l'hypothèse d'Ampère (**358**), qui consiste à considérer les courants particulaires comme préexistant dans le fer doux, et le fait de l'aimantation comme une simple orientation des courants primitifs ([1]).

Cette hypothèse semble confirmée par une expérience ingénieuse de Beetz ([2]). Un fil d'argent recouvert de vernis, sauf sur une génératrice, est pris comme électrode négative dans un bain de fer, au milieu d'un champ magnétique parallèle à sa longueur. Le mince filet de fer obtenu dans ces conditions présente une aimantation permanente très élevée, d'autant plus grande qu'il est plus fin et que, par suite, la réaction des particules contiguës se fait moins sentir.

Des expériences de Joule ([3]), quoique bornées au magnétisme permanent, montrent déjà qu'au début l'aimantation croît d'une manière plus rapide que la force magnétisante.

Ce résultat a été mis nettement en évidence par les expériences de M. Wiedemann ([4]) sur des barreaux cylindriques

([1]) Ampère, *Réponse à Van Beck;* 1822. — *Collect. de Mém. de la Société française de Phys.*, t. II, p. 214.
([2]) Beetz, *Pogg, Ann.*, t. CXI, p. 107; 1860.
([3]) Joule, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1856, p. 287.
([4]) G. Wiedemann, *Galvanismus*, 1re éd. t. II, p. 297.

dont il déterminait séparément l'aimantation totale et l'aimantation résiduelle, d'où l'on déduit par différence l'aimantation temporaire. Pour les trois espèces d'aimantation, la courbe figurative de l'aimantation commence par tourner sa convexité vers l'axe des abscisses, présente un point d'inflexion et tend ensuite vers le maximum.

819. Étude de l'aimantation. — Plusieurs procédés peuvent être employés pour traduire les résultats des expériences. La méthode qui répond le plus directement aux besoins de la pratique consiste à exprimer, par une courbe ou par une formule, la relation qui existe entre le moment magnétique, ou l'intensité d'aimantation, et la force magnétisante.

Lamont [1] a obtenu une expression assez rationnelle en admettant que l'accroissement dM du moment magnétique, produit par un accroissement dF de la force magnétisante, est à chaque instant proportionnel à l'excès $M_1 - M$ du moment maximum M_1 sur la valeur actuelle M, c'est-à-dire à l'accroissement total de magnétisme que le barreau est encore capable de recevoir. Il en résulte

$$dM = \alpha(M_1 - M)\,dF,$$
$$M = M_1(1 - e^{-\alpha F}).$$

La courbe qui figure le rapport de M à M_1, en fonction de la force magnétisante F, part de l'origine, où le coefficient angulaire de la tangente est égal à la constante α, et devient asymptote à la droite $y = 1$. On retrouve ainsi cette propriété générale que l'aimantation est d'abord proportionnelle à la force magnétisante et tend vers un maximum.

Cette formule de Lamont représente très exactement les phénomènes observés par Joule et, d'une manière générale, ceux qui correspondent à des forces magnétisantes assez grandes pour que l'on ait dépassé les premiers éléments de la courbe à courbure inverse.

Au lieu de recourir à une exponentielle, ce qui complique beaucoup les calculs, on peut représenter le moment magnétique, comme l'a fait M. Fröhlich [2], par une branche d'hy-

(1) Lamont, *Handbuch des magnetismus*, p. 407 ; 1867.
(2) Fröhlich, *Electrotechn. Zeitschrift*, t. II, p. 134; 1881.

perbole, soumise à la condition d'avoir la même tangente à l'origine et la même asymptote, ce qui donne des résultats équivalents. On aurait alors

$$M = M_1 \frac{\alpha F}{1 + \alpha F}.$$

Müller [1] avait trouvé que, pour un barreau de fer doux de diamètre d, le moment magnétique M produit par un champ F se représente assez exactement par l'expression empirique

$$M = B d^2 \operatorname{arctang} \frac{F}{C d^{\frac{3}{2}}}.$$

Toutefois cette formule répond seulement au cas particulier d'un barreau aimanté par une courte bobine qui entoure son milieu ; elle indique aussi un maximum d'aimantation, d'autant plus vite atteint que le barreau est plus étroit.

W. Weber [2] a fait, sur de longues tiges cylindriques et par la méthode des déviations, une série d'expériences qui ont été calculées par Kirchhoff [3]. Pour des forces magnétisantes F d'abord croissantes puis décroissantes, elles donnent les valeurs suivantes du coefficient d'aimantation k :

F.	k.	F.	k.
29,6	25,0	248,4	5,6
30,1	23,5	197,5	6,7
82,3	13,5	158,3	8,1
118,4	10,2	129,7	9,5
151,2	8,4	96,7	12,0
208,0	6,4	61,2	16,9
239,7	5,7	29,2	25,0

Il est à remarquer que l'aimantation kF est toujours un peu plus grande dans la période descendante, conformément aux effets d'hystérésis. Cette propriété a été plus nettement établie par les expériences de M. Warburg et de M. Fromme [4].

(1) Müller, *Pogg. Ann.*, t. LXXIX, p. 337 ; 1850 et t. LXXXIX, p. 181 ; 1851.
(2) W. Weber, *Electr. Maasbest., Diamagnetis. — Abhand. der König. Götting. Ges.* t. I, p. 170 ; 1852.
(3) R. Kirchhoff, *Crell's Journal*, t. XLVIII ; 1853. — *Gesamm. Abh.*, p. 193.
(4) E. Warburg, *Wied. Ann.*, t. XIII, p. 141 ; 1881. — C. Fromme, *ibid.*, p. 318.

Thalen [1] utilise simplement l'action de la terre sur des baguettes cylindriques de fer, de 2c à 4c de diamètre et 40c de longueur, situées dans la position verticale et observe la décharge par retournement dans une bobine qui les entoure. Avec différents échantillons de fer suédois recuit, le coefficient k a varié de 27 à 45.

Des expériences analogues de M. Riecke [2] ont donné pour le même coefficient, avec des ellipsoïdes de différentes excentricités et des forces magnétisantes comprises entre 0,032 et 0,072, des valeurs de 13,5 à 25,4.

Quintus Icilius [3] s'est servi de deux ellipsoïdes dont la longueur était 101 ou 165 fois le diamètre. Il opérait par la méthode des déviations pour les forces magnétisantes un peu considérables et par induction pour les forces faibles. Les deux séries d'observations étaient raccordées par une expérience faite dans les mêmes conditions et simultanément par les deux méthodes.

Les résultats, calculés par Stoletow [4], conduisent à des valeurs du coefficient d'aimantation d'abord croissantes et qui atteignent un maximum de 110 ou 120, correspondant à des forces magnétisantes de 4 à 5 unités.

Stoletow a employé lui-même un anneau à section rectangulaire; il a trouvé des valeurs croissant de 21,5 à 174,2; le maximum a lieu pour un champ égal à 3,21. La courbe I (fig. 249) représente le coefficient k en fonction du champ d'après Stoletow; les courbes II et III se rapportent aux expériences de Quintus Icilius.

M. Rowland [5] a étudié, par la même méthode, plusieurs espèces de fer et d'acier sous la forme d'anneaux à section circulaire. Les courbes I, II et III (fig. 250) représentent l'aimantation totale, l'aimantation temporaire et l'aimantation permanente pour un bon fer de Norvège. Elles montrent que l'accroissement de l'aimantation est très rapide pour les petites forces, que le magnétisme est d'abord uniquement temporaire (et cet effet est encore plus marqué pour l'acier que

(1) R. Thalen, *Nova acta R. S. Upsal*, 3e série, t. IV; 1863.
(2) Riecke, *Pogg. Ann.*, t. CXLI, p. 543; 1870.
(3) Quintus Icilius, *Pogg. Ann.*, t. CXXI, p. 125; 1864.
(4) Stoletow, *Pogg. Ann.*, t. CXLVI, p. 442; 1872.
(5) Rowland, *Phil. mag.* [4], t. XLVI, p. 140; 1888.

pour le fer), enfin que le maximum est atteint plus vite pour le magnétisme permanent que pour le magnétisme total.

M. Rowland emploie une traduction graphique qui paraît

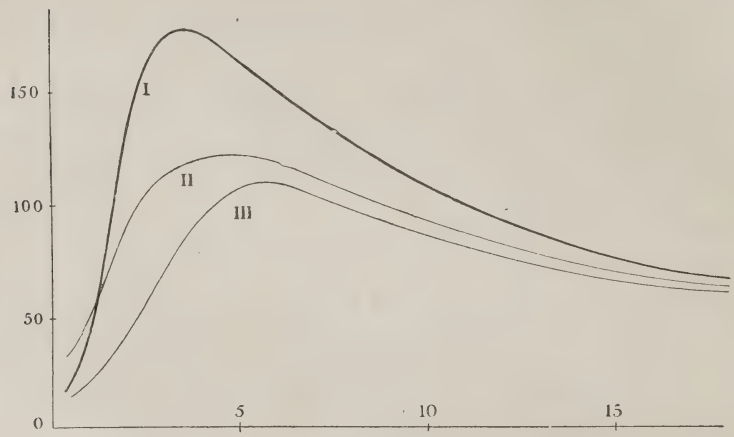


Fig. 249.

plus démonstrative parce qu'elle donne, pour toutes les aimantations, des courbes finies très régulières. Elle consiste à

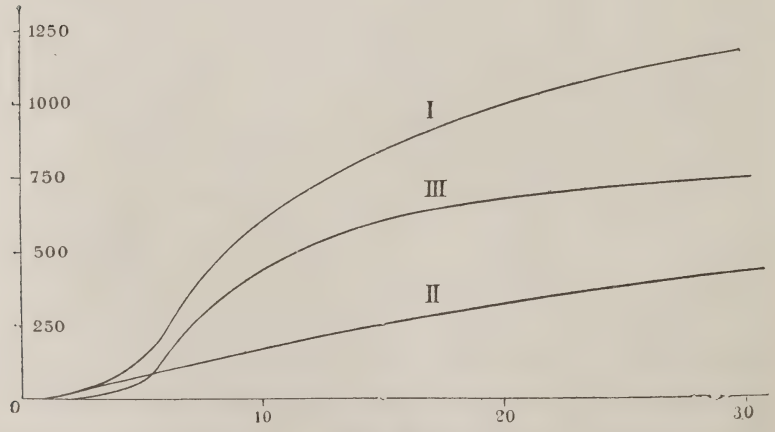


Fig. 250.

prendre comme abscisse l'aimantation A, ou l'induction magnétique $F_1 = F + 4\pi A = \mu F$, et à porter en ordonnées la perméabilité magnétique μ, ou la quantité $\lambda = 4\pi\mu$.

Les courbes ainsi obtenues (fig. 251) ont la forme de paraboles inclinées et sont bien représentées par la formule

$$\lambda = L \sin \frac{F_1 + a\lambda + b}{c},$$

dans laquelle a, b et c, sont des constantes qui dépendent du métal observé et L la valeur maximum de λ.

La figure se rapporte à une série d'observations sur un fer forgé de bonne qualité. La constante L est égale à 30860, ce

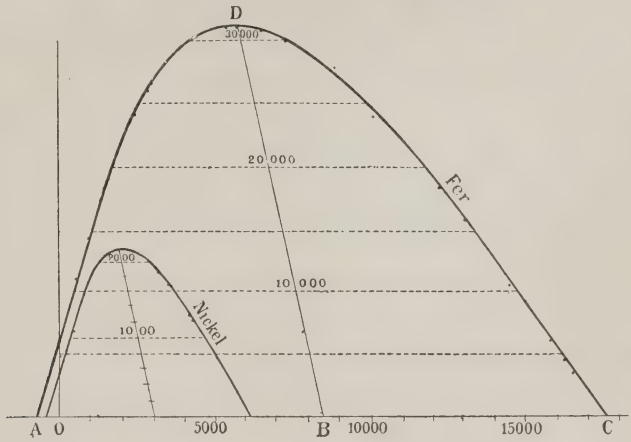


Fig. 251.

qui donne $\mu = 2456$, ou $k = 195$, pour $F_1 = 5968$ ou $F = 2,43$. Le point où la courbe rencontre l'axe des x correspond au maximum d'aimantation, qui serait de 1400 pour $F_1 = 17500$.

Le fer de Norvège déjà cité donnait $L = 57820$, ou $\mu = 4602$ et $k = 366$, pour $F_1 = 5380$ ou $F = 1,169$.

Il est digne d'attention que les valeurs les plus élevées du coefficient d'aimantation ont été obtenues par la méthode d'induction appliquée à des pièces de fer doux en forme d'anneaux, tandis que la mesure des moments magnétiques par les déviations ne conduit pas à des nombres de même ordre. De telles différences peuvent tenir en partie aux défauts de la méthode d'observation, mais elles sont dues surtout à l'action démagnétisante des tiges cylindriques. Cette action ne devient négligeable que si le rapport de la longueur du cylindre à son

diamètre est extrêmement grand ; on le reconnaît en employant simultanément les deux méthodes [1].

En opérant sur des tiges de fer aimantées dans le champ F d'une longue bobine cylindrique, on détermine le coefficient f d'aimantation moyenne et, par la décharge induite dans une bobine qui entoure la section centrale, l'induction correspondante que l'on peut écrire $4\pi A' = 4\pi f' F$.

L'expérience montre d'abord que dans toutes les circonstances on a $f' > f$; très différents pour des cylindres courts, ces deux coefficients se rapprochent de plus en plus à mesure que la tige devient plus longue. En second lieu, le champ dans lequel se produit le maximum de f ou de f' est d'autant plus intense que la tige est plus courte.

Avec des fils de fer de même nature, quand la longueur variait de 40 à 600 fois le diamètre, la valeur maximum des coefficients f ou f' a varié de 25 à 190, ou de 40 à 220, lorsque les champs correspondants diminuaient depuis 20 unités jusqu'à 3 unités. Les mêmes fils, employés sous forme d'anneaux, donnaient pour k un maximum d'environ 200 avec un champ de 3 unités. La concordance de ces résultats peut être considérée comme suffisante.

On peut donc étudier les propriétés du fer avec des tiges cylindriques dont la longueur atteint 500 fois le diamètre ; on y trouve l'avantage de connaître à chaque instant l'état magnétique du métal, qu'il est facile de désaimanter pour le soumettre à de nouvelles épreuves.

820. Hystérésis magnétique. — Les travaux de M. Ewing [2] ont appelé l'attention sur l'importance que présente le retard d'aimantation, ou l'hystérésis magnétique (**285**). Dans un cycle fermé, si A désigne l'aimantation, F la force magnétisante et F_1 l'induction, le travail perdu relatif à un corps de volume v a pour expression (**286**)

$$\mathfrak{T} = v \int A\, dF = v \int A\, dF_1 = \frac{v}{4\pi} \int F_1\, dF.$$

Il n'est pas inutile de montrer l'analogie de ce phénomène avec le frottement ordinaire. Imaginons qu'un corps soit placé

[1] E. Mascart, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CII, p. 992; 1886.
[2] Voir J. A. Ewing, *Magnetic induction in iron and others metals;* 1894.

sur un plan horizontal ; il est retenu d'un côté par un ressort, dont l'action R est proportionnelle à son changement de longueur x, et tiré de l'autre par une force F.

En appelant φ le frottement, les forces se font équilibre quand $F = R + \varphi$; si le corps se déplace dans ces conditions, le travail de F entre les positions x_0 et x_1 est

$$\int_0^1 F\,dx = \int_0^1 R\,dx + \int_0^1 \varphi\,dx.$$

Pour le mouvement en sens contraire, le frottement change de signe et la condition d'équilibre devient $F' = R - \varphi'$. Entre les positions x_1 et x_3, on a donc

$$\int_1^3 F'\,dx = \int_1^3 R\,dx - \int_1^3 \varphi'\,dx.$$

Lorsque le corps revient à sa position primitive, décrivant un cycle fermé, on a $x_3 = x_0$; le travail total du ressort est nul et celui de la force extérieure a pour expression

$$\mathfrak{T} = \int_0^1 (F - F')\,dx = \int_0^1 (\varphi + \varphi')\,dx,$$

laquelle se réduit à $2\varphi(x_1 - x_0)$ si le frottement est constant. Ce travail perdu se transforme en chaleur, comme celui qui correspond à l'aimantation. On peut remarquer encore que le frottement diminue beaucoup quand on maintient le corps en vibration, ce qui complète l'analogie.

Pour étudier la marche de l'aimantation, on peut employer du fer en anneau, en mesurant les décharges induites, ou la méthode des moments magnétiques avec des tiges dont la longueur est au moins 400 fois le diamètre. Comme l'aimantation A est sensiblement proportionnelle à l'induction F_1, les courbes qui représentent les valeurs de A ou de F_1 en fonction du champ F ont la même forme.

Les figures 252 et 253 donneront une idée du phénomène.

Pour la première, le champ F a varié d'abord de 0 à 7, puis de $+7$ à -7, avec deux retours au zéro dans l'intervalle, ensuite de -7 à $+7$, retour au zéro, etc. A chaque suppression du champ il existe une aimantation résiduelle. L'induction maximum était voisine de 11000 et le premier résidu OB de 9000, soit 81 °/₀ ; ce résidu peut quelquefois atteindre 93 °/₀.

Avec du fer très doux, l'induction résiduelle a atteint 15000, ce qui correspond à une aimantation de 1 200, tandis que les plus grandes aimantations obtenues pour l'acier sont de 780. Aux points d'inflexion des courbes, tels que C, le coefficient angulaire de la tangente n'est pas inférieur à 14 500.

La figure 253 correspond à une suite de champs d'intensité croissante, avec retour au zéro dans les intervalles. Le résidu augmente à chaque opération ; l'induction a finalement dépassé 16 000, pour un champ de 23 unités, et le résidu était alors de 15 000.

La fraction résiduelle d'aimantation croît d'abord avec le

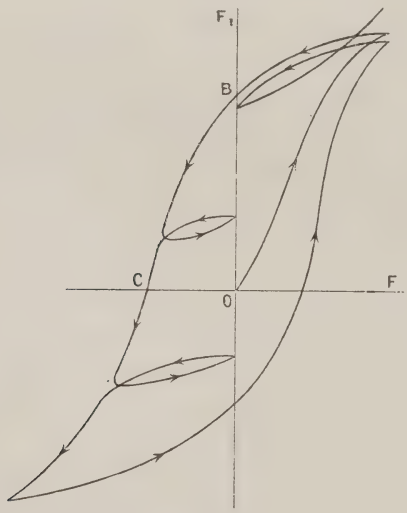


Fig. 252.

champ et passe par un maximum qui paraît avoir lieu au voisinage du point où la tangente à la courbe passe par l'origine, c'est-à-dire au *coude* de l'aimantation.

Lorsque le champ est alternatif, les courbes d'induction se modifient rapidement au début et ne tardent pas à prendre une forme régulière, en feuille de saule, lorsque le régime permanent est établi. M. Ewing a même imaginé un appareil qui permet de voir ou d'enregistrer par la photographie ces courbes d'aimantation. Le métal forme un circuit magnétique presque fermé, à l'exception d'un petit entrefer dans lequel

est tendu un fil parcouru par un courant constant. Ce fil est déplacé par l'aimantation et les mouvements sont transmis à un miroir. Les courbes ainsi obtenues paraissent plus renflées et moins hautes que dans les observations directes, et leur surface croit avec la fréquence des alternations. Ce changement de surface peut tenir aux courants induits ou à une viscosité magnétique, et l'appareil présente sans doute une inertie dont il est difficile d'évaluer l'importance.

Si l'on fait abstraction de l'hystérésis, on peut prendre les valeurs moyennes relatives aux chemins d'aller et de retour.

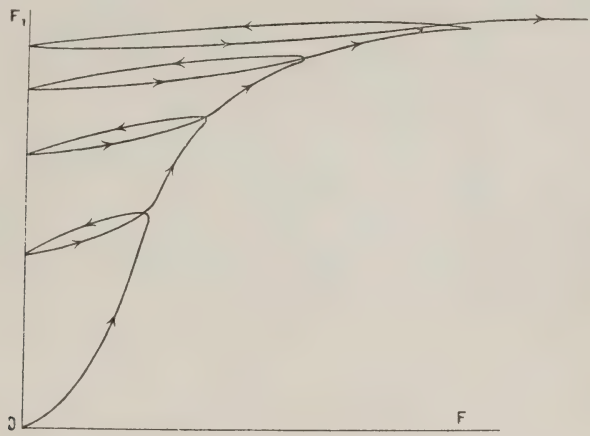


Fig. 253.

Avec un fer forgé et recuit, par exemple, on a obtenu pour une série de champs alternatifs,

F.	F_1.	μ.	*k*.
1,66	5 000	3 000	238
4	9 000	2 250	179
5	10 000	2 000	159
12	13 000	1 083	94
50	16 000	320	25,4
200	18 000	90	7,1
350	19 000	54	4,2
666	20 000	30	2,3

On admet, en général, que l'aire S du cycle peut être représentée, en fonction de l'induction maximum F_m, par une

expression de la forme cF_m^n, dans laquelle c est un coefficient caractéristique de la matière, et dont la traduction en logarithmes donne une expression linéaire

$$\log S = \log c + n \log F_m = C + n \log F_m.$$

M. Steinmetz [1] indique pour l'exposant n la valeur constante 1,6. Les expériences de Lord Rayleigh donneraient $n = 3$ et celles de M. Ewing $n = 1,7$ pour les grandes aimantations. En opérant sur des alliages de fer et d'antimoine, avec des champs compris entre 0,8 et 3, M. Weiss [2] trouve que l'exposant n, d'abord égal à 2,17 pour un alliage contenant 43 % de fer, diminue progressivement vers 1,6 à mesure que la teneur en fer augmente.

Si l'on adopte la loi de Steinmetz, on peut ainsi calculer, pour chaque cycle, la perte d'énergie w_1 par unité de volume, la perte w par unité de masse et l'élévation θ de température. Pour un échantillon de fer recuit, par exemple, la valeur du coefficient c est voisine de 0,002; on obtient alors, en prenant 7,67 comme densité du métal,

F_m.	w_1.	w.	θ.
2 000	420	55	$12^\circ.10^{-6}$
4 000	1 230	160	35
6 000	2 200	287	62
8 000	3 450	450	98
10 000	5 000	652	142
12 000	6 720	876	191
15 000	9 670	1261	275

S'il y a p périodes par seconde, l'élévation de température est $3600\,p\theta$ par heure et la puissance absorbée par gramme pw. Pour une fréquence égale à 100, la puissance absorbée dans le dernier cas serait de 126 000 par gramme, ou 126.10^{-4} watts, c'est-à-dire 12,6 kilowatts par tonne et l'élévation de température pendant une heure, abstraction faite des pertes dues au rayonnement, serait de 99°.

[1] Steinmetz, *Am. Inst. of electr. eng.*, t. IX, p. 1 et 671; 1892.
[2] P. Weiss, *Société de Phys.*, 15 mai 1896.

Les pertes sont souvent beaucoup plus grandes. Par rapport au fer précédent, les coefficients seraient

Fil de fer étiré. . .	6,5	Corde de piano. . .	12,5
Fil d'acier recuit. .	7,6	» recuite. . . .	10,1
Acier trempé dur .	8,2	» trempée dur.	12,6

Cette absorption d'énergie par les alternatives d'aimantation a une importance particulière pour les *transformateurs* industriels (400). En outre, les fils ou les tôles n'ont jamais une section assez faible pour qu'il ne se produise pas des courants induits dans la masse de fer ; ces courants sont inutilisés localement et contribuent pour une grande part avec les courants des deux bobines, à l'échauffement de l'appareil.

821. Champs très faibles. — En opérant sur un anneau de fer doux par la méthode balistique, M. Baur [1] trouve que le coefficient k d'aimantation se représente par une droite qui ne part pas de l'origine. En unités C.G.S., ces expériences conduisent aux valeurs suivantes, au moins pour des champs compris entre 0,0158 et 0,384 :

$$k = 14{,}5 + 110\mathrm{F}, \qquad \mu = 183 + 1\,382\mathrm{F}.$$

Lord Rayleigh [2] a opéré sur des tiges dont la longueur était 100 fois le diamètre. Ces tiges étant perpendiculaires au méridien magnétique, on compense par une bobine b l'action de l'hélice magnétisante sur le déclinomètre et par une seconde bobine, située à une distance convenable, l'action due à l'aimantation de la tige. Pour des champs compris entre 0,04 et 0,00004, c'est-à-dire $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{5000}$ du champ terrestre, l'équilibre une fois établi persiste quelle que soit l'intensité du courant commun aux trois circuits ; l'expérience est particulièrement délicate quand on permute le courant d'une manière synchronique avec les oscillations du déclinomètre afin de multiplier les déviations. Il en résulte que l'aimantation reste proportionnelle au champ.

(1) C. Baur, *Wied. Ann.*, t. XI, p. 399; 1880.
(2) L. Rayleigh, *Phil. Mag.* [5], t. XXIII, p. 225; 1887.

Cette relation cesse quand le champ varie de 0,04 à 1,2; on a ainsi, avec le fer non recuit,

$$k = 6,4 + 5,1\,F, \qquad \mu = 81 + 64F.$$

Les résultats sont plus complexes quand on emploie du fer recuit. Dans un champ de 0,04 la compensation ne se maintient plus ; à la fermeture du courant, l'aiguille du déclinomètre reste d'abord immobile, puis elle prend une déviation croissante pendant 20 ou 30 secondes. Ce phénomène particulier de *trainage*, ou de *viscosité* magnétique, déjà observé par M. Ewing, se retrouve aussi dans la désaimantation, qui n'est pas instantanée quand on supprime le courant. Avec les champs de 0,02 à 0,002 le trainage paraît proportionnel au champ et atteint environ le dixième de l'aimantation instantanée.

Pour des champs plus élevés, de l'ordre du champ terrestre, l'excès d'aimantation paraît proportionnel à F^2, même quand on produit des alternances ; en outre, les phénomènes de viscosité apparaissent. Si l'échantillon étudié a une aimantation primitive, on la compense par un aimant et la même méthode s'applique ; la compensation du magnétisme ajouté reste exacte dans les mêmes limites de variation du champ.

Cette étude de la viscosité a été reprise par M. Ewing avec des tiges de 400 diamètres, disposées dans une direction verticale, pour éviter l'influence du déplacement des pôles. Quand la compensation est bien établie, l'aiguille du déclinomètre reste immobile à la fermeture du courant et se meut ensuite pendant plus d'une minute comme dans un milieu visqueux. Le trainage a été la moitié ou les deux tiers de l'aimantation instantanée dans des champs de 0,044 ou 0,084 ; le coefficient instantané d'aimantation était d'abord égal à 9,9 et augmenta jusqu'à 15 après trainage.

L'application prolongée du champ donne au métal une sorte de trempe qui augmente beaucoup, quelquefois jusqu'à une heure, la durée d'aimantation définitive.

Tous ces effets ne se manifestent plus dans le fer écroui ou l'acier ; ils s'atténuent quand on augmente le nombre de fils qui constituent le faisceau aimanté et quand on diminue leur

diamètre. Il est facile de voir qu'on ne peut les expliquer par les courants induits dans le fer lui-même, car ces courants s'amortissent en une fraction de seconde.

Les valeurs les plus élevées obtenues par M. Ewing dans des champs de l'ordre de 0,2 ont été $\mu = 20000$ et $k = 1600$.

822. Champs très intenses. — Dans le cas extrême de champs très intenses, MM. Ewing et Low ont employé une disposition dite *méthode de l'isthme*. Les armatures d'un électro-aimant forment un circuit magnétique presque fermé, les pôles étant terminés par des pièces en tronc de cône dont les parties les plus minces sont rapprochées à une petite distance ; on place dans cet intervalle un cylindre de fer, qui forme ainsi l'isthme d'un canal étroit de flux d'induction. On mesure l'induction par la décharge dans une bobine qui couvre le cylindre, et le champ s'évalue par différence au moyen d'une seconde bobine, de diamètre plus grand, qui entoure la première ; suivant la manière de relier ces deux bobines, les décharges du galvanomètre balistique correspondent à la somme ou à la différence des décharges. Les impulsions du galvanomètre s'observent quand on enlève le cylindre de fer ou qu'on renverse le courant d'aimantation.

Il est préférable encore de terminer les pièces polaires par des surfaces sphériques concaves dans l'intervalle desquelles est placé le cylindre muni de ses bobines. Dans ce cas, le retournement du cylindre bout pour bout donne le double de l'induction totale.

L'expérience montre, comme il était à prévoir, que l'aimantation n'augmente plus quand le champ varie de 7000 à 11200 et même à 24500 ; l'induction continue de croître et ses variations sont proportionnelles à celles du champ.

M. Du Bois [1] utilise la rotation du plan de polarisation qu'éprouve la lumière réfléchie sur un des pôles de l'électro-aimant (**489**), après s'être assuré que cette rotation est proportionnelle à l'aimantation, par un coefficient qui ne dépend que de la nature du métal et de la radiation employée. Les résultats ainsi obtenus sont tout-à-fait analogues à ceux que fournissent les autres méthodes.

[1] H. Du Bois, *Ph. Mag.* [5], t. XXIX, p. 293 ; 1890.

823. Nickel et cobalt. — M. Rowland trouve que les phénomènes, à la grandeur près, suivent la même marche que dans le cas du fer (fig. 251). A la température ordinaire, le maximum d'aimantation serait de 500 environ pour le nickel et 800 pour le cobalt. La perméabilité maximum est environ 10 fois plus grande pour le cobalt doux que pour le métal trempé. Le nickel laminé est aussi plus coercitif que le métal fondu ; l'aimantation permanente est alors supérieure à l'aimantation temporaire [1].

Les expériences ultérieures de MM. Ewing et Low, faites sur des barres cylindriques, ont montré d'ailleurs que l'on y retrouve encore tous les effets d'hystérésis ; elles conduisent toutefois à des valeurs notablement plus faibles pour le maximum d'aimantation.

824. Influence de la température. — D'après M. Rowland, la perméabilité du *fer* varie très peu entre les températures de 0° et 280° ; les expériences de M. Berson porteraient même la limite supérieure jusqu'à 330°.

Au-delà, l'aimantation s'affaiblit rapidement ; elle serait nulle à 760° ou plutôt entre 690° et 870° suivant les échantillons [2], c'est-à-dire au voisinage du point critique où le métal éprouve un changement de constitution qui se traduit par l'ensemble de ses autres propriétés. La trempe modifie d'ailleurs beaucoup les propriétés du métal.

Toutefois, par une méthode sur laquelle nous reviendrons plus loin, M. P. Curie trouve qu'au dessus de 700° le fer passe progressivement de l'état très magnétique à celui des corps faiblement magnétiques dont le coefficient d'aimantation est constant. Ce coefficient diminue assez vite de 750° à 950°, puis lentement jusqu'à 1280°, température à laquelle il augmente brusquement de la moitié de sa valeur, pour diminuer ensuite régulièrement jusqu'à 1365°.

M. Hopkinson a constaté aussi que l'aimantation maximum s'obtient avec des champs d'autant plus faibles que la température est plus élevée. Dans un cycle de températures qui comprend le point critique, l'aimantation n'est pas la même sur

[1] G. Berson, *Ann. de Ch. et de Phys.* [6], t. VIII, p. 432 ; 1886.

[2] Ledeboer, *Journ. de Phys.* [2], t. VII, p. 199 ; 1888. — Hopkinson, *Phil. Tr., L. R. S.*; 1889, p. 443. — *Proc. L. R. S.*; 1888, 1889 et 1890.

les chemins d'aller et de retour ; il se manifeste donc une hystérésis particulière qui semble correspondre aux effets de *recalescence* observés par M. Osmond.

Les alliages de *fer et de nickel* présentent des particularités singulières. Si l'on chauffe, par exemple, un alliage à 25 °/₀ de nickel depuis — 50°, pour le ramener à la température primitive, la susceptibilité magnétique croît d'abord, puis éprouve un changement brusque vers 450° et diminue ensuite rapidement pour s'annuler à 600° ; elle reste ensuite nulle pendant le refroidissement jusqu'à zéro. L'alliage est donc, suivant les circonstances, magnétique on non magnétique.

Pour le *nickel* (¹), l'aimantation croît d'abord avec le champ,

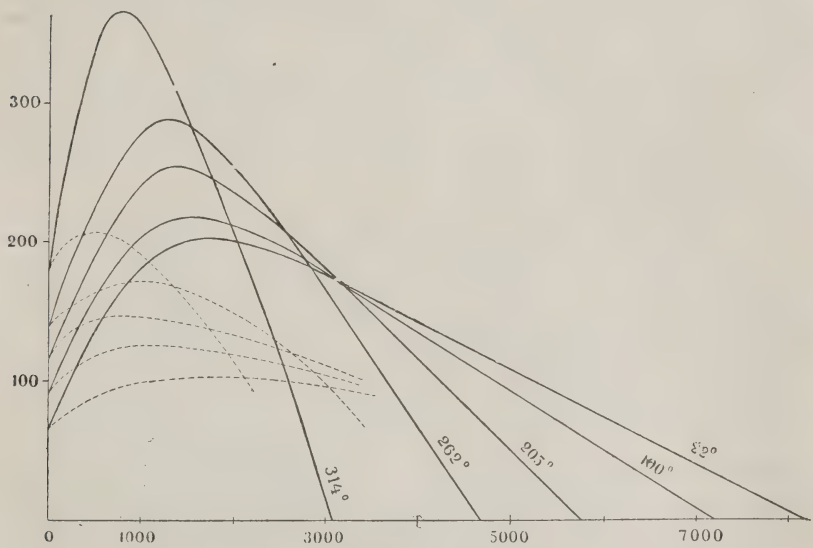


Fig. 254.

passe par un maximum et finit par s'annuler, mais la valeur du maximum et le champ correspondant varient beaucoup avec la température, comme on le voit sur les traits pleins de la figure 254, empruntée à M. Perkins.

Les courbes pointillées se rapportent au magnétisme temporaire ; elles ont le même caractère et partent de la même

(¹) Rowland, *Ph. Mag.* [4], t. XLVIII, p. 321 ; 1874. — Perkins, *Am. Journ. of Sc.*, t. XXX, p. 218 ; 1885.

origine que celles du magnétisme total, c'est-à-dire que l'aimantation produite par les champs très faibles est uniquement temporaire.

D'après M. Berson, l'aimantation temporaire croît de 0° jusqu'à 250° ou 260° et diminue ensuite pour s'annuler vers 340°, tandis que l'aimantation résiduelle décroît d'une manière continue à mesure que la température s'élève et s'annule vers 330°. Quant à l'aimantation totale, elle croît lentement jusqu'à 200°, puis diminue et devient nulle à 340°.

Le magnétisme d'un barreau de nickel aimanté à froid s'affaiblit graduellement quand on le chauffe et disparaît vers 330° ; mais, si l'aimantation a été produite de 200° à 290°, le magnétisme résiduel augmente d'abord par refroidissement pour diminuer ensuite, tout en restant à la température ordinaire supérieur à sa valeur primitive.

M. Curie a constaté aussi que le nickel éprouve une transformation vers 340° ; le coefficient d'aimantation devient ensuite indépendant du champ et diminue rapidement à mesure que la température s'élève.

Le *cobalt* se comporte autrement. Les aimantations temporaire et résiduelle vont toujours en croissant avec la température, entre 20° et 325°, et le magnétisme résiduel diminue toujours quand on s'éloigne de la température d'aimantation, dans un sens ou dans l'autre.

825. Aciers et fontes. — Quand un aimant d'acier trempé est arrivé à l'état permanent, les variations modérées de température ne produisent qu'une altération temporaire (**229**) ; l'aimantation subit un affaiblissement définitif si on l'a chauffé jusqu'à 100°, et elle disparaît entièrement vers 350°.

Les températures basses paraissent avoir un effet analogue, Dans un mélange d'acide carbonique solide et d'éther [1], par exemple, un aimant avait perdu les deux tiers de son magnétisme ; l'aimantation se releva à la température primitive, mais le moment magnétique avait diminué de moitié.

Les propriétés de l'*acier* et des *fontes* sont tellement variables, suivant leur constitution, le degré et le mode de trempe, les dimensions des barreaux ainsi que les aimantations suc-

[1] J. Trowbridge, *Am. Journ.*, t. XXI, p. 316 ; 1881. — *Journ. de Phys.* [2], t. I, p. 150 ; 1882.

cessives qu'ils ont subies, dans le même sens ou en sens contraires, que le magnétisme final peut être très irrégulier; cette étude présente donc de grandes difficultés.

L'influence des substances étrangères peut se traduire par une modification profonde de l'aimantation. Ainsi, pour un acier contenant 12 °/₀ de manganèse et 1 °/₀ de carbone, la perméabilité est voisine de 1,4; elle varie peu avec le champ et le magnétisme résiduel est sensiblement nul. Le métal est donc à peine magnétique [1]. Un acier contenant 25 °/₀ de nickel se comporte de la même manière ; en outre, il présente la particularité singulière de devenir fortement magnétique à une température même peu élevée et de rester ensuite magnétique quand on le ramène à la température ordinaire.

M. Weiss a obtenu des résultats analogues avec les alliages de *fer* et d'*antimoine*. La valeur initiale du coefficient d'aimantation, c'est-à-dire pour de faibles champs, a été, suivant les proportions du fer,

Fer.	*k*.	Fer.	*k*.
26,0 °/₀	0,00009	42,7 °/₀	0,125
33,9	0,00050	51,2	0,33
38,6	0,0051	56,8	1,06

Dans tous les cas, le coefficient est beaucoup moindre que celui qui serait dû au fer contenu dans l'alliage. Il y a même une variation brusque, qui semble correspondre à la formation du composé défini Sb^3F^4.

MM. Barus et Strouhal [2] ont cherché les relations qui peuvent exister entre les qualités magnétiques et les autres propriétés des différentes variétés de *fer*, d'*acier* et de *fonte*.

La résistivité, par exemple, qui est d'environ 10 microhms pour le fer doux, s'élève à près de 100 microhms pour la fonte dure et varie de 47 à 15 pour l'acier, suivant le degré de recuit. Le coefficient de variation avec la température se modifie d'une manière continue avec la résistivité : dans la figure 255, les résistivités sont portées en abscisses, les ordonnées représentant la variation pour 1° à partir de zéro.

(1) Hopkinson, *Proced. L. R. S.*; 1889 et 1890.
(2) Barus et Strouhal, *Bull. of U. S. Geolog. Survey*, n° 14. p. 1; 1885.

Le pouvoir thermo-électrique varie aussi avec la résistance et dans le même rapport. Il serait donc équivalent de définir les qualités d'un acier par sa résistivité ou par son pouvoir thermo-électrique.

Le recuit agit également d'une manière très marquée, même pour les températures inférieures à 100°, et son influence augmente avec le temps vers une limite définie.

Des barreaux très minces d'acier, connu sous le nom de *silver steel*, étaient d'abord portés au rouge par un courant,

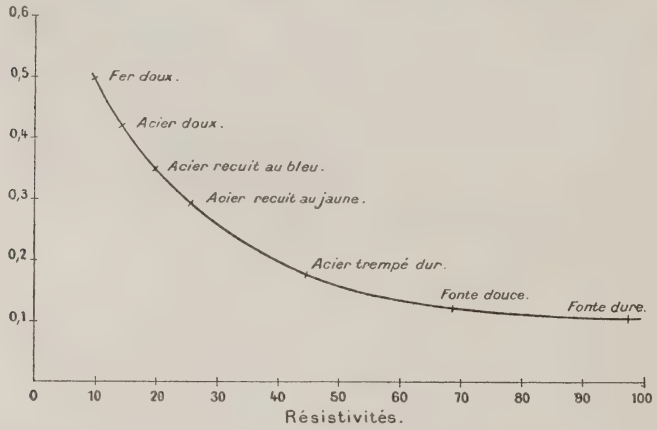


Fig. 255.

puis trempés à l'eau ; on les aimantait alors à saturation par une bobine dont on faisait croître le courant lentement jusqu'à une valeur fixe, pour l'abaisser de même, et on déterminait l'aimantation permanente. Le barreau était ensuite recuit à des températures successives, plus ou moins longtemps, puis aimanté de nouveau comme précédemment et dans le même sens. La résistivité a varié de la manière suivante :

Barreau trempé dur.	47,2 micromhs.
Recuit de 1^h à 10^h à 100°.	42,0 à 37,4
» de 20^m à 13^h à 185°.	31,5 à 24,8
» 10^m à 240°	24,0
» 10^m à 330°	20,0
» 1^h à 420°.	17,5
» au rouge	15,7

Les courbes de la figure 256 représentent le moment magnétique par gramme, ou moment spécifique, qui correspond aux divers degrés de recuit ou de résistivité, pour des barreaux ayant le même diamètre $0^c,15$ et des longueurs respectivement égales à 10, 20, 30, 40 et 50 fois le diamètre.

On voit que le recuit commence par faire croître le moment spécifique jusqu'à un maximum qui est atteint pour un recuit d'autant plus faible que le barreau est plus long. Le

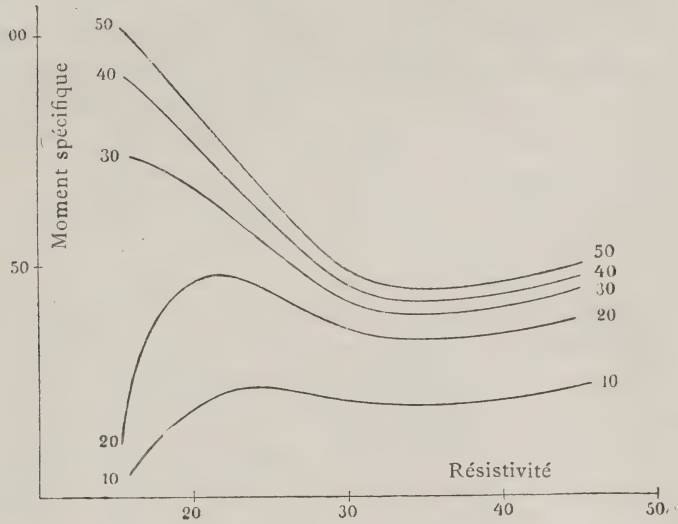


Fig. 256.

moment diminue ensuite très rapidement et retombe à une valeur très faible pour l'acier recuit au rouge ou tout à fait doux. Avec les barreaux longs recuits au bleu, on peut obtenir un moment spécifique dépassant 100 unités C.G.S, autrement dit une aimantation égale à 780 ; c'est la moitié environ de l'aimantation maximum du fer doux.

La grandeur du moment spécifique n'est pas la seule qualité à considérer dans un aimant ; il faut encore que ce moment reste aussi constant que possible et n'éprouve aucune altération permanente par l'effet des changements de température, des chocs, des vibrations et du temps.

D'autre part, si on fait recuire un barreau à une tempéra-

ture déterminée pendant un temps suffisant à des intervalles quelconques, en le réaimantant chaque fois, on finit par le rendre insensible, quant au moment permanent, à l'action de toute température inférieure à celle du recuit. On obtiendrait des aimants satisfaisant le mieux possible aux conditions de permanence, en les portant pendant 20 ou 30 heures en une ou plusieurs fois dans la vapeur d'eau à 100°, les aimantant à saturation, les soumettant de nouveau à l'action de la vapeur pendant 5 ou 6 heures et les aimantant une dernière fois. Les aimants possèdent alors la résistance limite correspondant à 100° et ne sont plus modifiés d'une manière permanente par les températures inférieures. Le moment spécifique ainsi obtenu peut atteindre 45 ou 50 et l'aimantation 300 environ. Les variations temporaires dues aux changements de température sont également très faibles.

M. Berson a constaté aussi qu'avec de l'acier trempé recuit à une température supérieure à celles qui seront atteintes dans les expériences, l'aimantation temporaire et l'aimantation totale croissent avec la température, entre 0° et 340°, tandis que l'aimantation résiduelle va constamment en décroissant. Les variations de température pendant l'action de la force magnétisante ont une influence très marquée. Pour un barreau aimanté à 290° par exemple, les trois espèces d'aimantation, temporaire, résiduelle et totale, sont notablement plus petites que si la force magnétisante a été appliquée pendant que la température s'élève de 240° à 290°.

Il se présente même des cas singuliers d'équilibre instable. Un barreau d'acier trempé et non recuit, aimanté à 240° et refroidi brusquement aussitôt après l'aimantation, garde une aimantation résiduelle notablement supérieure à celle qu'il aurait prise à froid sous l'action de la même force magnétisante. Mais le barreau est pour ainsi dire sursaturé, car cette aimantation disparait sous l'influence des chocs et des trépidations, beaucoup plus vite que celle qui serait produite dans les conditions ordinaires.

D'après M. Curie, la température de transformation magnétique de la fonte blanche est de 670° et la fusion du métal n'a aucune influence. La fonte est donc assimilable à un corps faiblement magnétique plus tôt que le fer doux.

826. Actions mécaniques. — L'influence des actions mécaniques sur l'aimantation est un fait très anciennement connu. Un coup de marteau frappé à l'extrémité d'une barre de fer doux placée verticalement dans le champ terrestre rend permanente l'aimantation induite; un nouveau coup sur la barre quand elle est perpendiculaire au champ lui enlève son magnétisme. On peut dire, en général, que toute *vibration* vient en aide aux forces magnétiques, comme si elle facilitait l'orientation des molécules, soit pour s'aimanter dans un champ, soit pour obéir à leurs actions mutuelles démagnétisantes.

Les courbes d'aimantation sont alors profondément modifiées. Si l'on soumet le fer à une force magnétisante qui croît d'une manière continue et qu'on donne au métal une série de chocs, le magnétisme monte brusquement à chaque vibration; pendant le retour du champ à zéro, les chocs produisent également des baisses rapides du magnétisme. Le cycle ainsi obtenu se traduit par une courbe fermée à échelons dont la surface est très petite.

La surface est encore moindre lorsque le fer est entretenu en vibration continue; c'est ce qui a lieu en réalité dans la plupart des appareils industriels, *dynamos*, *transformateurs* ou *téléphones*. La perte d'énergie que l'on doit rapporter spécialement au phénomène d'hystérésis est donc beaucoup plus faible que ne l'indiqueraient les cycles d'aimantation sur le métal en repos.

Joule [1] a constaté aussi qu'un fil de fer s'allonge par l'aimantation, sans revenir à sa longueur primitive quand on supprime le champ. Le fil s'allonge moins quand il est déjà tendu et se raccourcit lorsque la tension est voisine de celle qui produirait la rupture.

Le cobalt se comporte comme le fer et l'effet est inverse pour le nickel. Avec une même force magnétisante, les variations de longueur, d'après M. Barrett [2], seraient 4.10^{-6} pour le fer, $2,35.10^{-6}$ pour le cobalt et 8.10^{-6} pour le nickel.

M. Bidwell emploie les métaux sous forme de tores, en mesurant les variations de longueur d'un diamètre au moyen d'un levier amplificateur et d'un miroir. Le fer se dilate pour

[1] Joule, *Ann. of El.*, t. VIII, p, 219; 1842. — *Ph. Mag.* [3], t. XXX; 1847.
[2] Barrett, *Nature*, t. XXVI, p. 585; 1882.

des forces magnétisantes inférieures à une certaine limite, à partir de laquelle il se contracte et tend vers une longueur définie. Le nickel se contracte d'abord rapidement, puis d'une manière très lente. Le cobalt se comporte à l'inverse du fer, contraction dans les champs faibles et dilatation dans les champs plus intenses. Le fer trempé se dilate moins que le fer doux et passe plus vite à la période de contraction. On peut même, en recuisant le fer après la trempe, l'amener à un état pour lequel la variation de longueur est toujours négative, même pour les champs faibles. Dans les différents cas, les métaux ne reprennent pas leur longueur primitive après un cycle d'aimantation (1).

Comme phénomène corrélatif, Lord Kelvin (2) montra que la *tension* augmente l'aimantation du fer et diminue celle du nickel. Pour le fer, l'accroissement d'aimantation produit par la tension augmente d'abord avec le champ, passe par un maximum, puis s'annule ; au-delà de cette valeur critique du champ, la tension diminue l'aimantation. Il paraît en être de même pour les variations inverses du nickel, mais la valeur critique du champ serait beaucoup plus élevée.

L'importance des effets de tension est d'autant plus grande que le fer est plus dur. En outre, si l'on fait varier le poids tenseur suivant un cycle fermé, l'aimantation est plus faible ou plus grande dans la période de retour, suivant qu'elle a diminué ou augmenté par la tension, mais la courbe d'aimantation ne prend une forme définitive qu'après plusieurs opérations répétées. Cette forme nouvelle d'hystérésis est statique, c'est-à-dire que chaque point de la courbe d'aimantation est indépendant du temps pendant lequel agit la charge et de l'intervalle qui sépare l'application de poids différents. La nature des modifications change aussi de caractère quand on dépasse la limite d'élasticité du métal.

La susceptibilité magnétique du fer est modifiée même si la traction a été produite avant l'aimantation, mais cette altération résiduelle disparaît par les vibrations ou par l'action des champs alternatifs.

(1) Sh. Bidwell, *Proc. L. R. S.*; 1886 et 1890. — Chree, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1890, p. 329. — N. Nagoaka, *Ph. Mag.* [5], t. XXXVII, p. 131; 1894.

(2) Sir W. Thomson, *Proc. L. R. S.*; 1875 et 1878. — *Ph. Trans.*; 1877.

La *compression* produit un effet de sens contraire ; elle augmente le magnétisme du nickel. Pour le cobalt, la compression augmente le magnétisme quand il est faible et le diminue dans les champs plus intenses. On devrait observer exactement l'inverse avec le fer.

Ces déformations qui accompagnent l'aimantation doivent intervenir pour une part dans les sons rendus par le fer ou l'acier soumis à une succession rapide de champs alternatifs, comme dans le téléphone et les transformateurs.

L'influence de la *torsion*, observée d'abord par Matteucci (1), a été particulièrement étudiée par M. Wiedemann (2). L'aimantation du fer est réduite par la torsion dans un sens ou dans l'autre, mais elle ne reprend pas sa valeur primitive quand on ramène le fer à son état initial.

On peut en déduire (505) qu'un fil aimanté circulairement doit prendre une aimantation longitudinale si on le tord ; c'est ce que M. Wiedemann a constaté en faisant traverser le fil par un courant. De même, quand un fil est aimanté dans le sens longitudinal, il prend une aimantation circulaire par la torsion ; il est donc parcouru par un courant instantané qu'on manifestera au galvanomètre balistique. Ce courant est de sens contraire pour le nickel (3).

M. Wiedemann a reconnu également que l'aimantation longitudinale modifie la torsion d'un fil de fer. Cette torsion est toujours augmentée quel que soit le sens de l'aimantation. D'après M. Smith (4), la torsion magnétique croît d'abord avec le champ et la torsion initiale, pour diminuer ensuite ; le nickel présente le même caractère à un moindre degré.

M. Moreau (5) trouve que si une bobine magnétisante est placée au milieu d'un fil tordu, deux points du fil situés de part et d'autre à la même distance du centre éprouvent des torsions magnétiques égales et de signes contraires ; ces torsions temporaires sont d'abord proportionnelles au champ et indépendantes du diamètre pour les fils très fins. Les phéno-

(1) Matteucci, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXIV, p. 301 ; 1847.
(2) G. Wiedemann, *Pogg. Ann.*, t. CIII, p. 563 ; 1858.
(3) H. Nagoaka, *Phil. Mag.* [5], t. XXIX, p. 123 ; 1890.
(4) F. J. Smith, *Ph. Mag.* [5], t. XXXII, p. 383 ; 1891.
(5) G. Moreau *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXXII, p. 1192 ; 1896.

mènes pourraient s'expliquer d'une manière suffisante par une dilatation longitudinale et une contraction transversale dues à la variation du champ sur l'axe de la bobine.

CORPS PEU MAGNÉTIQUES.

827. Méthodes d'observation. — Après le fer, le nickel et le cobalt, les corps les plus magnétiques sont les oxydes et les sels de fer, mais dans une proportion beaucoup moindre ; l'aimantation est encore bien plus faible quand on passe aux corps diamagnétiques. L'expérience présente alors des difficultés spéciales et les moindres traces de fer dans les substances employées peuvent entraîner de graves erreurs.

Dans ce cas, la réaction qui s'exerce entre les différents éléments du corps aimanté est en général négligeable et l'on a recours, sous diverses formes, aux déplacements produits par un champ non uniforme (279). La variation d'énergie d'un petit volume v dans le champ F étant $-\frac{v}{2}k\,dF^2$, la composante de l'action qu'il subit suivant l'axe des x a pour expression

$$X = \frac{v}{2}k\frac{\partial F^2}{\partial x} = vkF\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Lorsque l'aimantation est très faible, on doit tenir compte du milieu qui entoure les corps et, en particulier, de l'air ambiant. Dans ce cas, l'expérience donne la différence des coefficients relatifs au corps et au milieu (271).

Pour les expériences de comparaison, on fait en sorte que le champ, produit par des aimants ou des courants, reste invariable ; la susceptibilité est alors proportionnelle à l'action par unité de volume.

Le procédé le plus direct consiste à placer la substance que l'on veut étudier, une petite sphère par exemple, à l'extrémité d'une aiguille suspendue par un fil métallique et à déterminer la torsion α nécessaire pour ramener l'aiguille dans sa position primitive.

En appelant l le bras de levier et C le coefficient de torsion du fil, la condition d'équilibre devient

$$C\alpha = Xl = \varphi l k F \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Si l'on emploie, comme le faisait Faraday, des électro-aimants munis d'armatures symétriques par rapport à l'axe commun et à un plan perpendiculaire, le corps sera placé dans le plan de symétrie, en dehors du centre et autant que possible au point où la dérivée du carré du champ par rapport à la direction possible du déplacement soit maximum.

M. Curie [1] se sert de deux électro-aimants dont les axes sont dirigés vers le même point, mais formant entre eux un certain angle, un peu plus grand que 90°, et dispose l'aiguille de manière que le corps soit mobile suivant la bissectrice.

L'action du champ peut encore être équilibrée par la balance [2]; cette disposition convient en particulier pour les gaz ou les liquides. Un ballon contenant la substance est situé au-dessus des pôles de l'électro-aimant et suspendu à un fléau de balance ; on compense par des poids l'effet dû au champ magnétique.

M. Becquerel a employé aussi des électro-aimants de même axe, munis d'armatures symétriques par rapport au centre mais dissymétriques par rapport au plan perpendiculaire, et place dans ce champ une aiguille de la substance à étudier. Désignant par θ l'angle que fait l'aiguille avec l'axe commun des bobines, le couple produit sur chaque élément de volume est $kF \frac{\partial F}{\partial \theta} d\varphi$ et la torsion α qui équilibre le couple total a pour expression

$$C\alpha = k \int F \frac{\partial F}{\partial \theta} d\varphi = kM.$$

Le facteur M est une quantité constante pour des aiguilles de même forme placées dans le même champ, pourvu que la position d'équilibre ne soit pas modifiée.

(1) P. Curie, *Ann. de Ch. et de Phys.* [7], t. V, p. 289 ; 1895.
(2) Ed. Becquerel, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. XXXII, p. 68; 1851.

Enfin, si le champ normal à l'axe de rotation est symétrique par rapport à deux directions rectangulaires (282), on peut encore observer les oscillations d'une petite aiguille portée par un fil sans torsion. La durée t des oscillations simples de faible amplitude donnera encore la susceptibilité magnétique k par l'expression

$$k = \frac{\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{D}{A + B},$$

dans laquelle D désigne la densité de la substance, A et B deux constantes définies par la forme du champ dans la région où se trouve l'aiguille.

828. Corps diamagnétiques. — Les mêmes méthodes s'appliquent aux corps diamagnétiques, avec cette seule différence que le coefficient k change de signe et que toutes les actions sont de sens contraires. Pour une aiguille oscillante, par exemple, la position d'équilibre serait perpendiculaire à la direction du champ.

Au moment de la découverte du diamagnétisme, Faraday l'avait expliqué d'abord en admettant que les corps prennent une polarité inverse de celle du fer. Il parut ensuite abandonner cette première idée après avoir montré que les corps marchent vers les points de champ maximum ou minimum suivant qu'ils sont magnétiques ou diamagnétiques. Ces deux vues, en apparence différentes, sont au fond identiques, d'après l'interprétation donnée par Lord Kelvin.

Deux expériences de Tyndall [1] mettent bien en évidence la polarité inverse du bismuth.

Un barreau de bismuth est suspendu horizontalement dans une bobine magnétisante, de manière que ses extrémités soient placées respectivement au voisinage de deux pôles d'un électro-aimant situés latéralement.

Quand on fait passer le courant d'aimantation, le barreau se dévie dans une direction opposée à celle qu'on observerait avec un barreau de fer ; cette déviation change d'ailleurs de sens avec le courant d'aimantation.

Pour la seconde expérience, dont le principe est emprunté

[1] Tyndall, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1855, p. 24.

à Weber [1], l'appareil se compose de deux bobines verticales A B et A'B', placées côte à côte (fig. 257). Un fil sans fin *f*, passant sur des poulies de renvoi, porte deux barreaux de bismuth *ab* et *a'b'*. Deux aiguilles aimantées *ns* et *n's'*, formant un système presque astatique, sont situées dans un même plan horizontal de part et d'autre des bobines. Les bobines A et A' sont parcourues par un courant en sens contraires ; leur action propre sur le système d'aiguilles est très

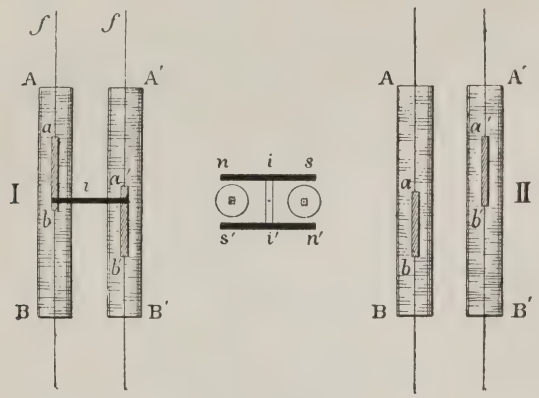


Fig. 257.

faible et on le compense par une bobine auxiliaire que traversera le courant commun.

La déviation produite par les barreaux de bismuth change de sens suivant qu'ils occupent la position I ou la position II ; l'effet produit dans les deux cas est inverse de celui qu'on obtiendrait avec un corps magnétique.

On peut encore augmenter ces déviations en imprimant aux barreaux un mouvement de va-et-vient en concordance avec les oscillations du système d'aiguilles ; ces déplacements ne produisent d'ailleurs aucun courant induit appréciable, car le champ des bobines est sensiblement uniforme et l'effet est presque nul quand on remplace les barreaux de bismuth par des barreaux de cuivre.

829. Méthodes d'induction. — Une autre disposition, due à Faraday, consiste à employer une longue bobine magnéti-

[1] W. Weber, *El. Maasb.*, *Diamag.* — *Abh. des K. G. S.*, t. I, p. 483 ; 1852.

sante B, dans laquelle se trouve une seconde bobine b dont les deux moitiés sont enroulées en sens contraires et réunies à un galvanomètre sensible. Un barreau de bismuth occupe la partie moyenne de ces deux bobines. Quant on le déplace suivant l'axe, son aimantation ne change pas, mais les pôles développent dans les deux moitiés de la bobine b des courants induits qui s'ajoutent. Il suffit de combiner ces mouvements avec ceux de l'aiguille du galvanomètre pour multiplier les déviations ; on pourrait encore, par un mouvement rapide de va-et-vient combiné avec un commutateur, redresser les courants induits et obtenir une déviation permanente. Weber a trouvé par ce procédé qu'à poids égal l'aimantation du bismuth est 456 000 fois plus petite que celle du fer.

Considérons encore deux bobines concentriques. L'établissement d'un courant dans l'une d'elles provoque dans l'autre un courant induit, mais on peut compenser cet effet avec un second système identique de bobines dont l'induite est enroulée en sens contraire et réunie au même galvanomètre. Si alors on introduit un barreau de bismuth dans le premier système, son aimantation par le courant principal diminue l'induction ; la déviation du galvanomètre indique la différence des deux effets et permet de déterminer le coefficient k.

Il est vrai qu'un noyau conducteur, sans propriétés magnétiques, donnerait aussi une diminution de même ordre par suite des courants induits dans la masse, mais il est facile de s'assurer que l'effet produit par un barreau de cuivre est beaucoup moindre que pour le bismuth. Toutefois, il y a là une cause d'erreur qui peut être notable si les corps ne sont pas mauvais conducteurs : elle tend à donner une valeur trop grande pour le coefficient de diamagnétisme.

830. Corps anisotropes. — Dans un champ qui n'est pas uniforme, l'action produite sur un corps homogène anisotrope (498) donne lieu à des phénomènes très complexes, parce que chaque élément de volume est attiré vers les régions de maximum ou de minimum, suivant qu'il est magnétique ou diamagnétique, en même temps que l'axe de plus grande aimantation tend à prendre une direction parallèle ou perpendiculaire au champ.

Considérons un corps homogène de volume v, dont les

coefficients principaux d'aimantation sont a, b et c. Dans un champ uniforme F, dont les cosinus directeurs par rapport aux axes principaux d'aimantation sont α', β' et γ', les composantes du moment magnétique sont (497)

$$M_1 = \nu a \alpha' F, \qquad M_2 = \nu b \beta' F, \qquad M_3 = \nu c \gamma' F.$$

Les couples relatifs aux trois axes ont pour expressions

$$\frac{C_1}{(b-c)\beta'\gamma'} = \frac{C_2}{(c-a)\gamma'\alpha'} = \frac{C_3}{(a-b)\alpha'\beta'} = \nu F^2.$$

Lorsque la structure est symétrique par rapport à une droite, l'axe des z par exemple, il en résulte $a = b$ et la valeur du couple C_3 relatif à cet axe est nulle.

Autour d'une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie, la composante normale H du champ est seule efficace. En appelant δ l'angle de ce champ avec l'axe de symétrie, on aura

$$C_2 = \nu H^2 (c-a) \sin\delta \cos\delta.$$

L'équilibre a lieu quand l'axe de symétrie est parallèle ou perpendiculaire à H, suivant que $c > a$ ou $c < a$.

On mesurera ce couple par une méthode de torsion, par exemple en portant le corps par un bifilaire dont le coefficient est C et que l'on a tourné de l'angle α, ce qui donne

$$c - a = \frac{2C \sin(\alpha - \delta)}{\nu H^2 \sin 2\delta}.$$

Si le corps est suspendu à un fil sans torsion et oscille librement, le couple directeur est $\nu H^2 (c-a)$. En appelant D sa densité, ρ son rayon de giration et n le nombre des oscillations simples par seconde, on aura

$$c - a = n^2 \pi^2 \frac{D \rho^2}{H^2}.$$

Tel est le cas du *bismuth* [1], dont la forme cristalline est

[1] FARADAY. *Exp. Researches*, XXIIe série; 1848.

un rhomboèdre de 87°40′, avec un clivage plus facile perpendiculaire à l'axe. Le cristal est diamagnétique et l'axe se met en équilibre stable dans une direction parallèle au champ ; le coefficient d'aimantation parallèle à l'axe est donc minimum en valeur absolue.

Le *spath d'Islande* (¹) paraît souvent magnétique, mais il ne présente ce caractère que lorsqu'il renferme des traces de carbonate de fer. A l'état pur, il est diamagnétique; à l'inverse de ce qui a lieu pour le bismuth, l'axe de cristallisation se met en équilibre perpendiculairement au champ.

Lorsque les trois coefficients a, b et c sont inégaux, on peut déterminer leurs différences deux à deux au moyen des couples correspondants C_1, C_2 et C_3.

Les nombres d'oscillations n_1, n_2 et n_3, observés dans les trois cas donneraient, en supposant $a > b > c$,

$$\frac{a-c}{n_2^2} = \frac{a-b}{n_3^2} = \frac{b-c}{n_1^2} = \pi^2 \frac{D\rho}{H^2}.$$

L'équation de condition $n_3^2 = n_2^2 + n_1^2$ qui en résulte a été vérifiée par Plücker pour le *formiate de cuivre*, qui cristallise dans le système clinorhombique.

Lorsque les trois coefficients principaux sont de même signe, l'ellipsoïde

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

permet, comme on l'a vu précédemment (**496**), de traduire les phénomènes relatifs à l'action d'un champ uniforme sur un corps cristallisé. Par rapport à un axe quelconque, le couple est proportionnel à la différence des inverses des carrés des axes de l'ellipse obtenue en coupant cet ellipsoïde par un plan diamétral perpendiculaire à l'axe.

En particulier l'équilibre est indifférent si cet axe est normal à l'un des plans cycliques de l'ellipsoïde, puisque la courbe d'intersection est circulaire. En supposant $a > b > c$, les directions correspondantes sont situées dans le plan xz, définies par la relation $(a-b)x^2 = (b-c)z^2$, et l'angle A qu'elles

(¹) Tyndall et Knoblauch, *Phil. Mag.* [3], t. XXXVI, p. 178; 1850.

font avec l'axe z de plus petite aimantation est

$$\tang^2 A = \frac{x^2}{z^2} = \frac{b-c}{a-b}.$$

Les coefficients a, b et c jouent le même rôle que les carrés des vitesses principales de propagation des ondes planes dans un milieu biréfringent à deux axes et tous les phénomènes d'optique ont leurs analogues dans l'aimantation. On peut donc aussi considérer des cristaux à un axe ou à deux axes magnétiques.

De même, les corps magnétiques uniaxes seront dits positifs ou négatifs, suivant que le coefficient d'aimantation dans la direction de l'axe de symétrie est le plus grand ou le plus petit en valeur absolue.

Pour les biaxes, le signe du cristal serait positif ou négatif suivant que le demi-angle A des axes optiques est inférieur ou supérieur à 45°, c'est-à-dire que l'on a

$$b - c \lesseqgtr a - b, \qquad 2b \lesseqgtr a + c.$$

La direction que prend le cristal dans un champ uniforme ne dépend que de la différence des coefficients ; on peut donc ajouter à chacun d'eux une valeur constante sans modifier les phénomènes. Il résulte de là que les conditions d'équilibre ne changent pas quand le corps est plongé dans un milieu quelconque, magnétique ou diamagnétique [1].

S'il existait des corps dont les coefficients principaux ne fussent pas tous de même signe, le corps étant magnétique dans certaines directions et diamagnétique dans d'autres, les propriétés pourraient encore se représenter par un ellipsoïde d'induction qne l'on obtiendrait en ajoutant une quantité constante à tous les coefficients.

Cette indifférence du milieu n'existe plus pour un champ non uniforme, puisqu'un élément de volume est attiré vers les points de maximum ou de minimum suivant que le coefficient d'aimantation apparente est positif ou négatif. Faraday a reconnu, par exemple, qu'un cristal de *cyanure rouge*, verni

[1] Faraday, *Exp. researches*, séries XXII et XXX ; 1855.

à sa surface pour éviter la dissolution, est entraîné vers les maxima quand il est plongé dans l'eau et, au contraire, vers les minima quand il est plongé dans une dissolution concentrée de sulfate de fer. Si le liquide est formé par 15 volumes de la dissolution concentrée et 6 volumes d'eau, le cristal se montre magnétique ou diamagnétique, suivant que son axe de symétrie est parallèle ou perpendiculaire aux lignes de force; il tend à se déplacer vers les maxima du champ dans le premier cas et, dans le second, vers les minima.

Tyndall et Knoblauch ont obtenu des phénomènes analogues avec des corps en poudre comprimés dans une direction déterminée, ou des systèmes formés de couches superposées. La direction de plus grande densité tend toujours à se diriger parallèlement aux lignes de force, quand il s'agit de corps magnétiques, et normalement à ces lignes pour les corps diamagnétiques. On réalise, par exemple, ces expériences avec une pâte de gomme dans laquelle on a incorporé du bismuth réduit en poudre ou des grains de carbonate de fer.

En comprimant une série de feuilles de papier qu'on découpe ensuite sous forme de cylindre, l'axe du cylindre est magnétique pour du papier d'émeri et diamagnétique pour du papier recouvert de poudre de bismuth.

De même, un cube de bismuth qui a été comprimé se dirige de manière que la ligne de pression soit axiale.

Ces expériences sembleraient indiquer que les phénomènes de magnétisme cristallin sont dus en partie aux inégalités de pression qui résultent de la structure moléculaire, plutôt qu'aux molécules elles-mêmes.

831. Corps isotropes de différentes formes. — Les considérations qui précèdent cessent de s'appliquer lorsque les coefficients d'aimantation ont des valeurs notables, parce que l'aimantation induite n'est plus uniforme, mais on obtient encore des résultats analogues avec les corps isotropes.

Supposons qu'un ellipsoïde de substance isotrope soit placé dans un champ uniforme et que le coefficient k soit constant. Les aimantations parallèles aux trois axes (**276**) sont respectivement proportionnelles à

$$\frac{k}{1+kL}, \quad \frac{k}{1+kM} \quad \text{et} \quad \frac{k}{1+kN}.$$

Ces trois facteurs, que nous désignerons par f_1, f_2 et f_3, sont des coefficients d'aimantation moyenne et jouent le même rôle que les coefficients principaux d'un corps anisotrope. En particulier les couples relatifs aux axes sont proportionnels respectivement aux différences $f_1 - f_2, f_2 - f_3$ et $f_1 - f_3$.

Quelle que soit d'ailleurs la forme d'un corps isotrope, placé dans un champ uniforme, il existe toujours trois directions rectangulaires pour lesquelles l'aimantation induite est parallèle au champ et peut être définie par des coefficients f_1, f_2 et f_3. Les phénomènes seront encore représentés, comme pour les corps anisotropes, par l'ellipsoïde

$$f_1 x^2 + f_2 y^2 + f_3 z^2 = 1.$$

On a vu, par exemple (**804**), que le couple directeur produit sur un aimant que l'on fait osciller dans le champ terrestre est augmenté d'un terme proportionnel à la différence $f_1 - f_2$ des coefficients moyens d'aimantation relatifs aux directions longitudinale et transversale.

832. Liquides et gaz. — On doit alors renfermer ces corps dans des vases, ballons ou ampoules de verre, et tenir compte de l'influence du vase par une expérience préalable.

Pour l'air, par exemple, on emploiera une ampoule pleine de gaz, puis vide, en observant la différence des actions. C'est ainsi que Faraday et Ed. Becquerel ont démontré que l'air est magnétique par l'oxygène seul.

Dans le cas des liquides, on peut encore utiliser la méthode d'induction (**829**), comme l'a fait M. Silow ([1]), en plaçant le liquide dans un tube cylindrique suivant l'axe d'une bobine.

Quincke ([2]) s'est servi également d'une méthode ingénieuse. Le liquide est placé dans un tube en U dont une des branches est soumise au champ magnétique F. L'excitation du champ produit une élévation de niveau si le liquide est magnétique et une dépression s'il est diamagnétique. La différence de niveau h des deux branches, qui atteint quelquefois

([1]) Silow, *Wied. Ann.* t. XI, p. 324; 1880.

([2]) Quincke, *Wied. Ann.*, t. XXIV, p. 347; 1885 et t. XXXIV, p. 401: 1888. — Adler, *ibid.* t, XXVII, p. 509; 1886. — *J. de Phys.* [2], t. IV, p. 40 et t. V, p. 465.

plusieurs centimètres, est proportionnelle au carré du champ et au coefficient d'aimantation.

Supposons, en effet, que le liquide, de densité D, soit contenu dans un tube de section s. Pour une variation dh, le travail dépensé serait $gsDhdh = gDhdv$; la variation correspondante d'énergie magnétique étant égale à $-\frac{k}{2}F^2dv$, la condition d'équilibre donne

$$gDh - \frac{k}{2}F^2 = 0, \qquad k = \frac{2gDh}{F^2}.$$

Si le liquide est comprimé par un gaz à une grande pression, l'expérience déterminera aussi, par différence, le coefficient d'aimantation du gaz.

833. Résultats généraux. — Si l'on met à part les corps très magnétiques, le coefficient d'aimantation est presque toujours une quantité constante, indépendante du champ. Pour le *perchlorure de fer* seulement, M. Silow a trouvé que ce coefficient commence par croître rapidement avec la force magnétisante et diminue ensuite d'une manière plus lente; sa valeur maximum serait de 179.10^{-6} dans un champ de 0,4.

Les valeurs obtenues par différents expérimentateurs pour le coefficient du *bismuth*, qui est la substance la plus diamagnétique, varient de $16,4.10^{-6}$ à $13,25.10^{-6}$ dans les conditions ordinaires de température.

M. Curie a fait beaucoup d'expériences sur un grand nombre de corps, à des températures comprises entre 15° et 1370° et pour des champs de 25 à 1350 unités. La température était déterminée avec un couple thermo-électrique de M. Le Chatelier à platine-rhodium. On mesurait le champ par la décharge induite dans une bobine retournée face pour face et la dérivée du champ relative à la direction du mouvement du corps par le déplacement de la même bobine.

Pour les corps diamagnétiques solides ou liquides, le coefficient d'aimantation, toujours indépendant du champ, est aussi indépendant de la température, à l'exception du bismuth et de l'antimoine.

Le coefficient relatif à l'*eau*, par exemple, qui sert de terme de comparaison dans la plupart des autres mesures, serait

égal à — $0,79.10^{-6}$, valeur un peu différente de celles qui ont été obtenues par d'autres observateurs.

L'*antimoine* présente des particularités spéciales suivant son mode de préparation. Pour le *bismuth* solide, le coefficient diminue linéairement à mesure que la température s'élève et peut être représenté par

$$-k.10^6 = 1,38(1 - 0,00113\,t).$$

A la température de fusion, il diminue brusquement pour conserver ensuite une valeur constante 25 fois moindre.

Le *quartz* et le *soufre* à ses différents états ont des coefficients constants, qui ne paraissent pas dépendre de la forme cristalline. M. Tumlirz [1] a trouvé cependant que le quartz, soumis à un champ énergique, conserve ensuite une polarité et que dans un champ uniforme l'aimantation est plus faible suivant la direction de l'axe.

La température a, au contraire, une grande influence sur les propriétés des corps magnétiques.

Dans le cas des gaz, le coefficient d'aimantation *spécifique*, c'est-à-dire la valeur expérimentale divisée par la densité, ne dépend pas de la pression, et il est en raison inverse de la température absolue.

On aurait $\frac{33700}{T}.\,10^{-6}$ pour l'*oxygène*, et $\frac{7830}{T}\,10^{-6}$ pour l'*air*, en négligeant dans le dernier cas l'influence de l'azote qui est diamagnétique.

Le coefficient d'aimantation de l'oxygène à la température de 0° et à la pression de 76^c, serait ainsi de $0,176.10^{-6}$; Faraday avait obtenu $0,143.10^{-6}$. En opérant sur l'oxygène liquide, par la mesure du flux d'induction dans un transformateur en forme de tore, MM. Fleming et Dewar [2] ont trouvé des nombres qui conduisent pour les mêmes conditions à $0,173.10^{-6}$. L'air liquide a donné à peu près le même résultat : la perméabilité observée fut 1,0024 au lieu de 1,0027, sans doute parce que l'azote s'était évaporé en grande partie et que le liquide ne renfermait guère que de l'oxygène.

(1) Tumlirz, *Wied. Ann.*, t. XXVII, p. 133; 1886.
(2) J. H. Fleming and J. Dewar, *Proc. L. R. S.*, t. LX, p. 283; 1896.

Comme l'air intervient dans plusieurs cas, il est nécessaire de calculer son coefficient rapporté au volume, lequel volume est aussi proportionnel à la température absolue. Sous la pression ordinaire, le coefficient k de l'air serait $\frac{2760}{T^2}10^{-6}$, ce qui donne $10^6 k = 0{,}0322$ à 20°. Sur un corps comme l'eau, dont le coefficient est $-0{,}79.10^{-6}$, la correction due à la présence de l'air serait ainsi de 4 centièmes.

Sur le *palladium* et les *sels magnétiques* [1] la température agit encore de la même manière; la diminution du coefficient paraît plus rapide pour le *sulfate de nickel* solide.

La *magnétite*, ou oxyde de fer magnétique, présente un intérêt particulier. Elle subit, comme le fer, une transformation vers 535° et conserve ensuite un coefficient constant. M. Weiss a étudié les propriétés du cristal suivant différentes directions par la méthode de l'isthme (822). Le coefficient d'aimantation est maximum suivant l'axe ternaire, moindre pour l'axe binaire et minimum suivant l'axe quaternaire.

[1] G. Wiedemann, *Pogg. Ann.*, t. CXXVI, p. 1; 1885. — Plesner, *Wied. Ann.*, t. XXXIX, p. 336; 1890.

CHAPITRE DEUXIÈME

CHAMPS MAGNÉTIQUES.

MÉTHODES GÉNÉRALES.

834. Oscillations. — Les oscillations d'un barreau dans un champ H permettent de déterminer le couple directeur MH et, par suite, de comparer deux champs. Les nombres d'oscillations n et n' pendant le même temps donnent

$$\frac{n^2}{n'^2} = \frac{MH}{M'H'}. \tag{1}$$

Cette méthode a été souvent employée pour étudier les rapports de la composante horizontale du champ terrestre en divers lieux et doit être discutée avec soin.

Une première difficulté tient aux modifications du moment magnétique par la variation de température, l'influence du temps et celle des accidents divers.

Pour la température, on peut écrire $M = M_0(1 - at)$. On déterminera le coefficient a par deux observations pour lesquelles l'aimant est placé dans des enceintes à températures différentes t et t' ; on a alors

$$\frac{M}{M'} = \frac{1 - at}{1 - at'} = \frac{n^2}{n'^2} \cdot \frac{H'}{H} = 1 + a(t' - t). \tag{2}$$

On pourra disposer l'expérience de manière que les deux

champs H et H′ conservent la même valeur dans les deux cas ou évaluer leur rapport par une autre aiguille.

Comme le coefficient a est toujours inférieur à 0,001, la différence $t' - t$ doit être assez grande et il n'est pas commode de maintenir constante la température de l'enceinte dans laquelle se font les oscillations.

Il est préférable d'évaluer les variations du champ produit par le barreau en le faisant agir sur un déclinomètre.

On constitue une sorte de calorimètre avec deux vases en verre de Bohème, emboités l'un dans l'autre, qui laissent entre eux une couche d'air immobile. Le barreau est enfermé dans un tube de verre ou de métal et placé au milieu du vase intérieur, qui est rempli d'eau et fermé par un couvercle en bois. On y introduit d'abord de l'eau chaude à une température d'environ 60° ; on agite le liquide en y insufflant de l'air au moment de chaque observation. Dans ces conditions, le refroidissement est très lent et le liquide met plus de six heures pour revenir à la température ambiante.

Le barreau M étant placé dans un plan perpendiculaire au méridien magnétique et dirigé vers le déclinomètre, on détermine les déviations α, α',... produites aux températures différentes t, t', ... ; il en résulte

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1 - at} = \frac{\operatorname{tang}\alpha'}{1 - at'} = \ldots. \tag{3}$$

Comme l'expérience dure quelque temps, il est bon d'éliminer les variations de déclinaison. Le calorimètre est placé sur une plate-forme mobile autour d'un axe vertical qui passe à peu près par le centre de l'aimant. Quand on tourne la plate-forme de 180°, l'action de l'aimant sur le déclinomètre change de signe et la différence des lectures correspond au double de la déviation α. Si la composante horizontale du champ terrestre change d'une manière notable dans le cours des expériences, on fera les corrections nécessaires par les indications d'un appareil de variations.

On peut même compenser d'abord l'action du barreau à la température t par celle d'un second aimant maintenu à température constante et situé du côté opposé.

La variation du moment magnétique $M_0 a(t' - t)$ est alors

en relation directe avec la déviation α et on a

$$\frac{M_0}{R^3} a(t'-t) = H \tang \alpha, \qquad a = \frac{1}{t'-t} \frac{R^3 H}{M_0} \tang \alpha.$$

Il suffit, pour cet usage, de déterminer d'une manière approchée le rapport $\frac{R^3 H}{M_0}$.

Les valeurs du coefficient a sont très différentes suivant la nature et la trempe de l'acier. On peut profiter de cette circonstance [1] pour constituer un système formé de deux aimants opposés M et M′ dont les coefficients a et a' sont très différents. Dans ce cas, le moment magnétique du système,

$$M_0(1-at) - M'_0(1-a't) = M_0 - M'_0 + (M'_0 a' - M_0 a)t,$$

est indépendant de la température si les aimantations ont été choisies de manière que le coefficient du dernier terme soit nul, mais la compensation exacte est difficile à réaliser.

L'influence du temps est plus grave. Le magnétisme d'un barreau diminue d'abord assez rapidement dans les premières semaines qui suivent l'aimantation et ensuite d'une manière plus lente.

On atténue beaucoup cette cause d'erreur en soumettant l'aimant à une série de chocs qui font disparaître la plus grande partie du magnétisme variable. Dans le voyage de la *Recherche*, par exemple (), l'affaiblissement du magnétisme des aiguilles pendant une année a varié de 0,0025 à 0,0486; on fait la correction correspondante, pour les observations intermédiaires, en admettant que cette diminution est proportionnelle au temps, de sorte qu'au bout du temps T le moment serait devenu $M' = M(1 - bT)$.

Le rapport des champs donné par l'équation [2] serait alors

$$\frac{H'}{H} = \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{M}{M'} = \frac{n'^2}{n^2} [1 + a(t'-t) + bT].$$

Quant aux variations accidentelles, on les élimine en grande

(1) Lamont, *Handbuch des Magnetismus*, p. 402; 1867.
(2) Voyage de la Recherche. — *Magnétisme*, t. II, p. 326.

partie par l'emploi de plusieurs aiguilles différentes, trois au moins. Si le rapport des résultats obtenus dans deux stations est le même pour toutes, l'expérience présente des garanties ; si l'une des aiguilles se met en désaccord, on doit admettre que son magnétisme s'est modifié et a pris une nouvelle valeur qui servira pour les observations suivantes. De cette manière, pourvu que deux des aiguilles aient conservé le même état dans l'intervalle de deux stations, la série des observations n'est pas interrompue, quels que soient les changements subis par toutes les aiguilles dans le cours du voyage.

Enfin, la correction relative à l'aimantation induite n'a pas d'intérêt dans les expériences de comparaison, puisqu'elle est toujours très faible (**804**), mais on doit en tenir compte pour les mesures exactes et il est important de la déterminer sur le barreau même qui sert aux observations.

Lamont dispose le barreau verticalement près d'un déclinomètre, de manière à faire agir une de ses extrémités (**816**) et met alternativement le pôle sud en haut ou en bas.

Les champs produits sont proportionnels à $M(1 + mZ)$ dans le premier cas, à $M(1 - m'Z)$ dans le second. Si l'observation est faite par la méthode des sinus, les déviations correspondantes étant α et α', il en résulte

$$\frac{1 + mZ}{\sin\alpha} = \frac{1 - m'Z}{\sin\alpha'} = \frac{2 + (m - m')Z}{\sin\alpha + \sin\alpha'} = \frac{(m + m')Z}{\sin\alpha - \sin\alpha'}.$$

Si l'on remplace Z par H tang I, en remarquant que les angles α et α' sont très peu différents, il en résulte

$$\frac{(m + m')\,\mathrm{H}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}}{2 + (m - m')\,\mathrm{H}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}} = \frac{\alpha - \alpha'}{2\,\mathrm{tang}\,\dfrac{\alpha + \alpha'}{2}}.$$

Pour connaître chacun des coefficients m et m', on doit encore admettre entre eux une certaine relation assez difficile à évaluer ; en outre, la distribution inégale du magnétisme aux deux extrémités de l'aimant n'est pas compensée par le retournement face pour face et intervient en partie dans la différence des déviations.

Joule [1] indique une méthode qui paraît d'abord plus satisfaisante. Deux barreaux à peu près identiques M_1 et M'_1 sont montés ensemble sur le même équipage et à une distance telle que le champ de chacun d'eux sur le milieu de l'autre soit sensiblement égal au champ terrestre. Pour la position d'équilibre, le système ne conserve que son magnétisme rigide, mais l'aimantation transversale intervient encore dans les oscillations (804). En appelant K le moment d'inertie du système total, K_1 et K_2 les moments d'inertie qui correspondent aux barreaux observés isolément, n, n_1 et n_2 les nombres d'oscillations par seconde et prenant les mêmes valeurs pour les aimantations rigide et induite dans les termes de correction, on aurait alors

$$n^2\pi^2 K = (M_1 + M_0) H \left(1 - f_2 \frac{H}{A}\right),$$

$$n_1^2\pi^2 K_1 = M_1 H \left(1 + f \frac{H}{A}\right),$$

$$n_2^2\pi^2 K_2 = M_2 H \left(1 + f \frac{H}{A}\right);$$

$$\frac{n_1^2 K_1 + n_2^2 K_2}{n^2 K} = \frac{1 + f\frac{H}{A}}{1 - f_2\frac{H}{A}} = 1 + (f + f_2)\frac{H}{A} = 1 + f_1 \frac{H}{A}.$$

Il faut encore admettre un certain rapport, par exemple 5, entre les coefficients f_1 et f_2, pour en déduire la correction relative aux oscillations de chaque aimant, qui est

$$f\frac{H}{A} = \frac{f_1 - f_2}{f_1} f_1 \frac{H}{A} = \frac{4}{5}\left(\frac{n_1^2 K_1 + n_2^2 K_2}{n^2 K} - 1\right).$$

Le procédé le plus correct consiste à faire osciller le barreau et à déterminer ensuite le couple directeur MH relatif à l'aimantation rigide par un système de torsion.

835. Propriétés diverses. — On fait souvent usage des décharges induites observées au galvanomètre balistique (643).

[1] Joule, *Proced. of the Manch, Lit. and Phil. Soc.*, t. VI, p. 129; 1867.

Une bobine plate de surface S, faisant partie d'un circuit de résistance R, est placée dans un champ magnétique. On lui donne successivement deux positions pour lesquelles les valeurs moyennes du champ normal à la surface S sont X_1 et X_2; la décharge induite q est $Rq = S(X_2 - X_1)$. Si on retourne la bobine face pour face, $X_1 = -X_2$ et, par suite,

$$X_2 = \frac{S}{2R} q.$$

C'est la méthode employée par Verdet dans ses recherches sur le pouvoir rotatoire magnétique (**479**). Le rapport des décharges induites, ou des impulsions correspondantes du galvanomètre, donne ainsi le rapport des deux champs. La bobine induite peut être de dimensions assez petites pour permettre l'étude par points de la distribution du champ.

Cette disposition s'applique aux champs de toute grandeur, suivant les dimensions de la bobine ; elle convient surtout pour les champs très intenses, comme ceux des appareils industriels ; il est utile alors d'avoir un champ de même ordre, comme terme de comparaison, qui permette le tarage de l'instrument. Pour cet usage, M. Hilbert [1] munit un aimant d'armatures en fer doux qui relient l'un des poles à l'autre et constituent un circuit magnétique fermé, à l'exception de deux entailles ou entre-fer. La bobine étant intercalée dans un entre-fer, on l'enlève brusquement; la comparaison de la décharge induite avec celle qu'on obtient par retournement de la même bobine dans le champ terrestre montre que le champ de cet appareil reste invariable, à 0,005 près, pendant plusieurs années.

Si l'on considère un conducteur de longueur L, parcouru par le courant I, dans un champ dont la composante normale est H, l'action latérale du champ est LHI ; c'est le principe du galvanomètre de M. Lippmann (**632**). M. Leduc [2] a construit ainsi un petit appareil, où la chambre à mercure a 10^{mm} de hauteur et $0^{mm},5$ d'épaisseur e, et le changement de niveau est amplifié par une colonne d'eau. En appelant p

[1] W. Hilbert, *Ph. Mag.* [5], t. XXXIII, p. 307; 1892.
[2] A. Leduc, *Journ. de Phys.* [2], t. VI, p. 184; 1887.

la différence de pression mesurée en unités C.G.S., la condition d'équilibre se réduit alors à

$$HI = ep.$$

Le courant I étant maintenu invariable, cet instrument permettrait de déterminer, à 5 unités près, des champs de plusieurs milliers d'unités.

Lord Kelvin [1] applique la même méthode à un conducteur métallique, au moins quand il s'agit de champs à peu près uniformes.

Un conducteur rectiligne de longueur L, auquel on attache une masse P, est suspendu à un fil et le courant I est amené par des conducteurs flexibles. L'action latérale LHI du champ peut être évaluée de différentes manières.

Si le conducteur est abandonné à lui-même, il s'incline d'un angle α, ce qui donne la condition d'équilibre $Pg \tang \alpha = LHI$ Une autre disposition consiste à suspendre par des fils f_1 et f_2, situés dans un plan perpendiculaire au champ H, des masses P_1 et P_2 qui sont reliées aux extrémités A_1 et A_2 du conducteur par des fils horizontaux h_1 et h_2. On règle l'expérience de manière à ramener le conducteur dans la position primitive qu'il occupait avant le passage du courant; l'action latérale du champ est alors égale à la somme des tensions t_1 et t_2 des fils horizontaux, lesquelles sont déterminées par les angles α_1 et α_2 dont les fils de suspension f_1 et f_2 ont dû s'incliner. La condition d'équilibre devient

$$LHI = g(P_1 \tang \alpha_1 + P_2 \tang \alpha_2).$$

On évalue les angles α_1 et α_2 par le déplacement des fils f_1 et f_2 sur une règle horizontale.

Les différentes propriétés du champ magnétique fournissent d'autres méthodes moins directes.

Il suffit, par exemple, de mesurer la rotation R du plan de polarisation (479) dans un corps dont le pouvoir rotatoire magnétique est ρ; on aura ainsi le produit de l'épaisseur e du milieu par la composante moyenne X du champ, parallèle à

[1] A. Gray, *Abs. Meas. in Elect. and Magn.*, t. II, p. 701; London, 1893.

la direction du rayon, ou la différence des potentiels magnétiques $V_1 - V_2$ relatifs aux extrémités.

M. Leduc propose aussi d'utiliser la variation de résistance du bismuth (**696**), en déterminant par une expérience préalable la relation qui existe entre le champ H et l'accroissement de résistance z de la tige de bismuth sur laquelle on opère, ou en représentant cette relation par une formule telle que

$$H^2 = \alpha z + \beta z^2.$$

La mesure des résistances par le pont de Wheatstone comporte une telle précision, que les champs peuvent ainsi être évalués avec une assez grande exactitude.

Citons encore la méthode de Quincke (**832**) pour déterminer l'aimantation des liquides, où la différence de niveau est proportionnelle au carré du champ. M. Du Bois [1] rend l'appareil plus sensible en inclinant le tube et observant au microscope les déplacements du liquide; l'expérience peut servir pour la mesure des champs très intenses.

836. Appareils de torsion. — Nous avons indiqué cette disposition (**804**) en supposant que l'aimant est d'abord en équilibre dans le méridien. Si l'appareil n'est pas réglé, l'aimant subit dans l'expérience primitive une déviation α_0, comme si le système avait une torsion θ_0. Pour éliminer cette cause d'erreur, on donne deux torsions θ_1 et θ_2 dans des sens différents et on observe les déviations correspondantes α_1 et α_2. Avec une suspension unifilaire, les conditions d'équilibre sont

$$\begin{aligned} C(\theta_0 - \alpha_0) &= HM \sin \alpha_0, \\ C(\theta_1 + \theta_0 - \alpha_1 - \alpha_0) &= HM \sin(\alpha_1 + \alpha_0), \\ C(\theta_2 - \theta_0 - \alpha_2 + \alpha_0) &= HM \sin(\alpha_2 - \alpha_0). \end{aligned}$$

On en déduirait l'angle α_0, comme on l'a vu déjà pour une expérience analogue (**616**), et la somme des deux dernières équations donne

$$C\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = HM \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \alpha_0\right).$$

[1] Du Bois, *Wied. Ann.*, t. XXXV, p. 166; 1888.

Lorsque les déviations α_1 et α_2 relatives à des torsions égales $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ sont très peu différentes, l'angle α_0 est lui-même très petit ; on peut alors prendre la moyenne α des angles α_1 et α_2 et écrire simplement

$$C(\theta - \alpha) = HM \sin\alpha. \tag{4}$$

Une suspension bifilaire donnerait des résultats analogues Il est d'ailleurs facile de s'assurer, dans chaque cas, que les angles α_0 et θ_0 sont nuls en vérifiant si la position d'équilibre ne change pas quand on remplace l'aimant par un barreau de cuivre de même poids.

Le produit HM étant ainsi déterminé, deux expériences comparatives avec le même aimant donneront le rapport des deux champs, sans qu'il soit nécessaire de connaître le coefficient C de torsion.

Comme l'action du champ ne correspond alors qu'au magnétisme rigide quand la déviation est voisine de 90°, cette expérience fournit la meilleure méthode pour déterminer le terme de correction x relatif à l'aimantation induite dans les oscillations (834). On a alors, avec un bifilaire,

$$n^2\pi^2 K = MH(1 + x),$$
$$MH \sin\alpha = C \sin(\theta - \alpha);$$
$$1 + x = \frac{n^2\pi^2 k}{C} \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

La même disposition permet de suivre les variations du champ. Supposons, pour plus de généralité, qu'avec une suspension bifilaire, les angles θ et α soient comptés à partir d'une direction fixe, telle que le méridien géographique, la déclinaison étant D.

L'équation d'équilibre est

$$C \sin(\theta - \alpha) = HM \sin(\alpha - D). \tag{5}$$

Si toutes les quantités varient à la fois, à l'exception de l'angle θ qui est défini par la position donnée au bifilaire, il en résulte

$$\frac{dC}{C} - \cot(\theta - \alpha)\, d\alpha = \frac{dH}{H} + \frac{dM}{M} + \cot(\alpha - D)(d\alpha - dD).$$

Lorsque le barreau a été réglé d'abord dans la position transverse, l'angle $\alpha - D$ est voisin de 90° et le dernier terme est négligeable. D'autre part, les quantités C et M varient avec la température et le moment magnétique diminue même quelquefois avec le temps. En appelant t l'excès de température sur sa valeur initiale et T l'intervalle des deux observations, on peut donc écrire

$$\frac{dC}{C} = ct, \qquad \frac{dM}{M} = -mt - m'T;$$

$$(6) \qquad \frac{dH}{H} = (c+m)t + m'T - \cot(\theta - \alpha)\,d\alpha.$$

Il reste à déterminer par expérience les coefficients $c+m$ et m'; la valeur de $\cot(\theta - \alpha)$ serait donnée par l'opération même du réglage, mais on la déduit également d'une expérience de comparaison.

Les appareils de torsion permettent aussi d'évaluer directement un champ extérieur F qui fait l'angle β avec le méridien magnétique (**616**). L'équilibre étant d'abord établi dans le champ terrestre, on détermine la torsion θ nécessaire pour ramener le barreau à sa position primitive pour la seconde expérience, ce qui donne, avec un unifilaire,

$$(7) \qquad FM \sin\beta = C\theta.$$

Enfin, on combinera encore ces différentes méthodes avec l'étude des oscillations. Les couples directeurs relatifs à des oscillations de faible amplitude, dans le cas des équations (4), (5) et (7), sont alors, à part l'aimantation induite,

$$C_1 = C + HM\cos\alpha = HM\left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\theta - \alpha}\right),$$

$$C_2 = C\cos(\theta - \alpha) + HM\cos(\alpha - D) = HM\left[\cos(\alpha - D) + \frac{\sin(\alpha - D)}{\cos(\theta - \alpha)}\right],$$

$$C_3 = C + HM + FM\cos\beta = HM + FM\left(\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\theta}\right].$$

Il en résulte différents moyens de contrôle.

837. Cadres mobiles. — Si l'on substitue à l'aimant dans les expériences précédentes un cadre mobile de surface totale S parcouru par le courant I, on déterminera ainsi le couple directeur HSI, soit par la déviation δ qu'éprouve le cadre à partir d'une position pour laquelle la surface S est parallèle au champ (628), soit par la torsion nécessaire pour le maintenir dans sa position primitive.

On peut même construire sur ce principe des appareils portatifs [1] de très petites dimensions, qui permettent de mesurer des champs intenses avec une approximation de 2 °/₀ et d'étudier leur distribution dans les machines industrielles. Le courant I est donné par un ampèremètre et le rapport du coefficient de torsion à la surface de la bobine est une constante empirique.

Pour les mesures de précision, il est nécessaire de connaître avec une exactitude suffisante le coefficient de torsion du système, que l'on déterminera en général par le moment d'inertie de la partie mobile et la durée des oscillations. Si la suspension est unifilaire, on l'utilise pour conduire le courant dans la bobine, et l'autre prise de courant se fait par un fil flexible ou une hélice de torsion négligeable ; avec un bifilaire, les deux fils servent naturellement d'électrodes.

Dans la suspension unifilaire le coefficient de torsion est à peu près indépendant de la charge, sans que cette loi puisse être considérée comme absolument rigoureuse ; en outre, l'influence de la viscosité des métaux (549) et celle de la température (550) sont des causes d'erreur qu'il est difficile d'éliminer complètement.

La suspension bifilaire ne présente pas les mêmes inconvénients. Le couple est alors exactement proportionnel au poids tenseur et au sinus de la torsion ; l'influence de la température est aussi mieux définie et, avec les précautions employées par Kohlrausch (552), le coefficient de torsion peut être déterminé par la mesure directe de la longueur des fils et de la distance de leurs points d'attache.

[1] E. Edder et H. Stansfield, *Phil. Mag.* [5], t. XXXIV, p. 186 ; 1892.

CHAMP TERRESTRE.

838. Méthode de Poisson. — C'est en 1828 que Poisson [1] a indiqué pour la première fois comment il est possible d'évaluer en mesures absolues la composante horizontale du champ terrestre. On a d'abord, par les oscillations d'un barreau,

$$(1) \qquad n^2\pi^2 K = HM\left(1 + f\frac{H}{A}\right).$$

Placé ensuite à la distance R dans le méridien d'une autre aiguille oscillante, ce barreau produit sur l'aiguille un champ moyen

$$F = \frac{2M}{R^3}(1+p)\left(1 + f_1\frac{H}{A}\right).$$

Si A′ est l'aimantation moyenne de cette aiguille et f' le coefficient relatif à l'induction, les nombres d'oscillations m_0 et m qu'elle exécute sous l'influence des champs H et H + F donnent

$$\frac{m^2}{m_0^2} = \frac{H+F}{H}\,\frac{1 + f'\dfrac{H+F}{A'}}{1 + f'\dfrac{H}{A'}} = \frac{H+F}{H} + \frac{m^2}{m_0^2}f'\frac{F}{A'},$$

$$(2) \qquad \frac{F}{H} = \frac{m^2 - m_0^2}{m_0^2}\left(1 - \frac{m^2}{m_0^2}f'\frac{H}{A'}\right) = \frac{2M}{HR^3}(1+p)\left(1 + f_1\frac{H}{A}\right).$$

On déduit alors des équations (1) et (2)

$$H^2 = \frac{m_0^2 n^2}{m^2 - m_0^2}\,\frac{2\pi^2 K}{R^3}(1+p)\left(1 + f_2\frac{H}{A} + \frac{m^2}{m_0^2}f'\frac{H}{A'}\right).$$

Quand il s'agit d'expériences comparatives, tous les facteurs peuvent être considérés comme constants, à l'exception du premier, car les corrections de température sur le moment d'inertie et sur la distance R sont de l'ordre de la dilatation

[1] Poisson, *Connaissance des Temps pour 1828*, p. 113.

des métaux et restent inférieures à 0,0002 quand la variation de température ne dépasse pas 10°.

Pour les mesures absolues, on déterminera la distance R par deux expériences faites en plaçant le barreau de part et d'autre de l'aiguille. Il faut ensuite évaluer le terme p du second ordre et les corrections relatives aux aimantations induites. La plus grande difficulté tient à ce que le champ F de l'aimant est en général plus petit que H et que leur rapport est donné par la différence des carrés $m^2 - m_0^2$ de nombres d'oscillations peu différents l'un de l'autre; outre que l'expérience est très longue, cette circonstance diminue beaucoup la précision des résultats.

839. Méthode de Gauss [1]. — La déviation produite sur un déclinomètre (807), quand le barreau déviant est dans une des positions principales, a l'avantage de donner une quantité directement proportionnelle au rapport des champs F et H.

On a d'abord l'équation (1) par les oscillations du barreau. Pour les déviations, l'aimantation induite n'intervient pas d'une manière appréciable. Le barreau étant supposé dans la première position principale, c'est-à-dire dirigé vers le déclinomètre, on aura donc, en posant $u = \tang\theta$ ou $u = \sin\delta$, suivant qu'on emploie la méthode des sinus ou la méthode des tangentes,

$$\mathrm{H}u = \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{R}^3}(1+p),$$

$$\mathrm{H}^2 u = \frac{2n^2\pi^2\mathrm{K}}{\mathrm{R}^3}(1+p)\left(1 - f\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}\right).$$

Si la correction relative à l'aimantation induite est inférieure à 0,004, ce qui a lieu généralement, elle n'intervient que pour une quantité moitié moindre dans la valeur de H et peut être connue avec une exactitude suffisante.

D'autre part, on a vu (808) combien il est difficile de déterminer le terme p du second ordre; c'est là l'obstacle principal et l'on peut considérer comme très douteux que la méthode permette d'évaluer par des aimants la composante

[1] Gauss, *Intensitas vis mag.* — *Comm. S. R. Gott*, t. VIII. — *Ann. de Ch. et de Phys.* [2], t. LVII, p. 5; 1834.

horizontale du champ terrestre à moins d'un millième. Il va de soi d'ailleurs que les indications d'un appareil de variations sont nécessaires pour ramener toutes les lectures à la même valeur du champ.

Kohlrausch [1] supprime l'influence de l'aimantation induite en déterminant le couple directeur HM par la torsion d'un appareil bifilaire, mais la difficulté reste en ce qui concerne le terme p du second ordre.

840. Emploi des courants. — Si l'on dispose d'un appareil propre à déterminer un courant I en valeur absolue, la déviation δ produite par le même courant dans une boussole des tangentes (**618**) donne la composante H par la relation

$$GI = H \operatorname{tang} \delta.$$

Si le cadre de la boussole porte N tours de rayon moyen a, la constante G est sensiblement égale à $\frac{2\pi N}{a}$. Pour que la déviation soit voisine de 45°, ce qui correspond au cas le plus favorable, il faut que l'on ait, en prenant $H = 0,2$ et supposant que I_1 soit la valeur du courant en ampères,

$$NI_1 = \frac{NH}{10G} = 0,2\,\frac{a}{20\pi} = 0,01\,\frac{a}{\pi},$$

c'est-à-dire que le nombre d'ampère-tours de la bobine serait à peu près $\frac{1}{300}$ de la valeur du rayon en centimètres.

Kohlrausch mesure le courant par une bobine à suspension bifilaire et détermine ainsi (**836**) le produit $HSI = P$. Le même cadre étant dans une position parallèle au méridien et parcouru par le courant I′, on mesure la déviation δ produite sur un déclinomètre placé dans la direction de l'axe. En appelant G′ la constante galvanométrique du cadre sur l'aiguille supposée très courte (**560**), on a

$$H \operatorname{tang} \delta = G' I', \quad H^2 = P\,\frac{G'}{S}\,\frac{I'}{I \operatorname{tang} \delta}.$$

[1] F. Kohlrausch, *Wied. Ann.*, t. XVII, p. 737; 1882.

Le rapport des courants I et I′ peut être évalué par un galvanomètre quelconque. Si les deux observations sont faites en même temps et que l'action du déclinomètre sur le cadre soit négligeable, les courants I et I′ sont égaux, mais on doit tenir compte de la rotation du cadre (**629**) pour calculer son action sur l'aiguille.

Avec cette méthode, l'erreur relative des mesures sur la composante H peut être inférieure à 0,0001.

841. Déclinaison. — Pour connaître la déclinaison, il faut déterminer d'abord le méridien géographique, puis l'azimut dans lequel se place l'axe magnétique d'un aimant mobile. Comme la direction de cet axe n'est pas connue, on corrige l'erreur par le retournement de l'aimant face pour face, en observant dans chaque position la direction d'une ligne de foi et prenant la moyenne des deux azimuts.

La ligne de foi est formée soit par les extrémités d'une aiguille taillée en losange aigu, soit par deux croisées de fils portées aux extrémités d'un barreau, comme dans la boussole de Gambey, soit par deux traits tracés sur les faces terminales de l'aimant et que l'on vise avec un microscope. On peut encore employer des barreaux creux transformés en collimateurs par un objectif encastré dans l'un des bouts et une échelle divisée sur verre ou un réticule à l'autre bout.

Une boussole de déclinaison, ou *déclinomètre*, est un véritable théodolite muni de pièces accessoires pour les observations magnétiques.

Dans les instruments de construction ancienne, tels que ceux de Gambey et de Gauss, l'aimant était en général d'une grande longueur, ce qui présente beaucoup d'inconvénients dont le principal est la durée des oscillations. En effet, pour une même aimantation moyenne et des barreaux semblables, le moment magnétique est proportionnel au volume et le moment d'inertie au produit du volume par le carré de la longueur; la durée des oscillations est donc proportionnelle à la longueur. L'équilibre est difficile à établir et les observations sont très longues.

Nous indiquerons, comme exemple, le dernier modèle de boussole construit par Brunner (fig. 258). L'aimant est un prisme à section carrée muni de deux goupilles au milieu ; il

porte à chaque extrémité un disque d'argent sur lequel est tracée une division. Cet aimant se place dans un étrier E suspendu par un fil de cocon qui s'enroule sur un treuil I à la partie supérieure. L'aimant se meut dans une boîte métallique terminée par deux lames de verre à faces parallèles et montée

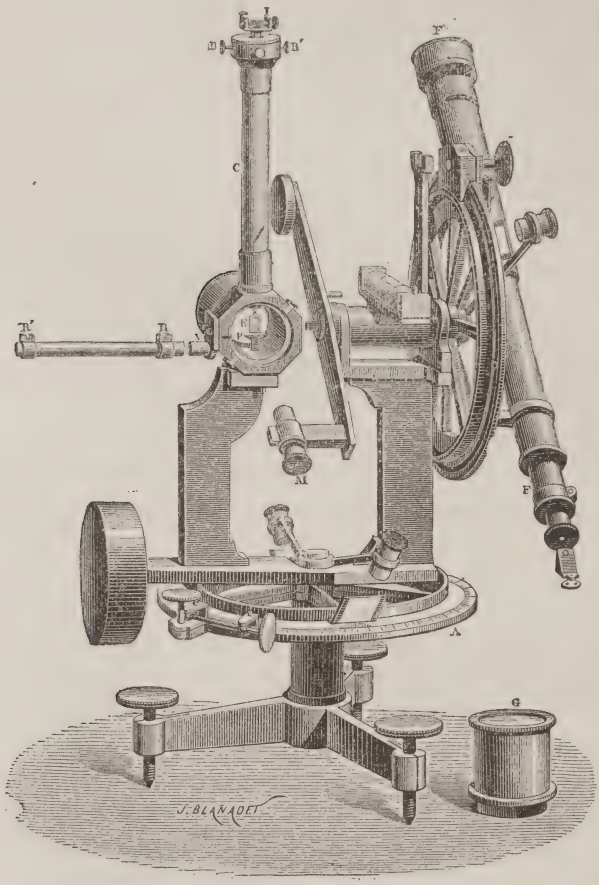


Fig. 258.

sur l'équipage mobile du théodolite. L'axe horizontal porte un microscope M qui peut passer sous la boîte et viser les extrémités de l'aimant : un réticule à trois fils verticaux équidistants sert à faire les pointés.

Un petit plan P, que l'on fait monter ou descendre par un bouton extérieur, permet d'arrêter les oscillations.

Enfin, le treuil est monté sur un cercle divisé et des boutons latéraux permettent de centrer le fil de suspension, de manière que, pour une position de l'aimant, le microscope pointe alternativement sur les traits médians des divisions.

Le théodolite étant réglé à la manière ordinaire, on détermine d'abord le méridien géographique, soit par l'étoile polaire, soit par les hauteurs correspondantes d'une étoile ou du soleil, etc. ; le soleil est observé à l'aide d'un verre noir et, au lieu de viser un des bords, il est plus avantageux d'employer un réticule qui permette d'encadrer l'image entre quatre fils tangents rectangulaires.

Supposons par exemple, que l'on connaisse seulement la latitude du lieu. Soit OP (fig. 259) l'axe du monde, OA la

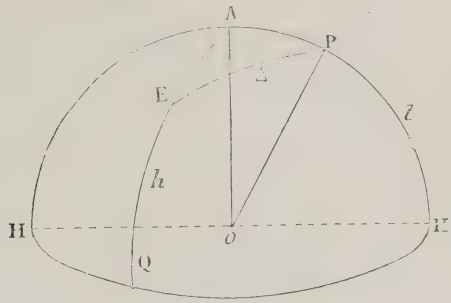


Fig. 259.

verticale, OE la direction de l'astre au moment de l'observation, l la latitude du lieu ou la hauteur du pôle, h la hauteur EQ de l'astre.

Dans le triangle sphérique APE, le côté PA est égal à $90^\circ - l$, le côté AE à $90^\circ - h$, et le côté EP est la distance polaire Δ de l'astre, ou le complément de sa déclinaison. L'angle h est donné par le cercle vertical et on fait la lecture correspondante des verniers sur le cercle horizontal.

En posant $h + l + \Delta = 2S$, les angles A et P seront déterminés par les formules

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \cos(S - \Delta)}{\cos l \cos h}},$$

$$\sin\frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \cos(S - h)}{\cos l \sin \Delta}}$$

L'angle A est l'azimut de l'astre, ou la rotation de l'équipage nécessaire pour amener la lunette dans le méridien géographique; on connaîtra la position correspondante des verniers sur le cercle horizontal; P est l'angle horaire de l'astre, on en déduit l'heure locale de l'observation.

Plusieurs corrections sont nécessaires. Comme le zéro de la graduation du cercle vertical ne correspond pas rigoureusement à la position horizontale de la lunette, deux observations avec lunette à droite et à gauche donnent le double de la distance zénithale de l'astre.

D'autre part, la hauteur observée doit être corrigée de la réfraction atmosphérique. Enfin, pour les astres à mouvement rapide, la déclinaison astronomique change avec l'heure de la journée, mais cette variation n'atteint pas 1′ par heure pour le soleil; une connaissance approchée de l'heure ou de la longitude suffit donc pour calculer la déclinaison par les tables astronomiques. L'observation est surtout précise lorsque la hauteur de l'astre varie très rapidement, c'est-à-dire quand il est situé à l'est ou à l'ouest, dans le voisinage du premier vertical.

Pour l'observation magnétique, on doit s'assurer d'abord que le fil n'a pas de torsion initiale. On y suspend un barreau de cuivre de même poids que l'aimant et on tourne le cercle du treuil jusqu'à ce que ce barreau reste immobile dans le plan de visée du microscope. On substitue l'aimant au barreau, on vise l'une des extrémités avec le microscope et, après avoir rendu les oscillations très petites, on règle la direction du microscope par la vis de rappel de l'équipage de façon que les oscillations de trait médian soient symétriques par rapport au système de fils verticaux ; on lit alors les verniers et on répète la même observation à l'autre bout. La moyenne des deux lectures correspond à la direction de la ligne de foi de l'aimant. On retourne ensuite l'aimant face pour face dans son étrier et on répète deux observations semblables. La moyenne des quatre lectures correspond à la direction de l'axe magnétique; on en déduit la déclinaison.

Comme l'observateur est placé très près de l'aimant, les moindres objets en fer qu'il peut porter et même les traces de fer qui existent dans certaines étoffes peuvent produire

des perturbations considérables ; les précautions que l'on prend sous ce rapport sont rarement suffisantes.

L'instrument lui-même doit être en cuivre ou en bronze, exempt de fer, car il n'existe aucune méthode de correction qui permette d'éliminer cette cause d'erreur. On peut bien retourner l'aimant bout par bout et répéter les observations, mais la concordance des résultats n'est pas une garantie absolue et la moyenne ne corrige par l'erreur si elle existe.

La série des quatre observations étant d'assez longue durée, la déclinaison magnétique a pu varier dans l'intervalle des lectures ; les indications d'un appareil de variations observé en même temps, ou plutôt d'un enregistreur, permettraient de corriger chacune des lectures pour les ramener à la même époque. Dans tous les cas, il est avantageux de faire les observations au moment où la déclinaison passe par un maximum ou un minimum ; cette précaution est surtout importante en été, lorsque l'amplitude de la variation diurne est la plus grande.

Au lieu de faire coïncider, dans chaque pointé, le trait médian des divisions avec le fil central du réticule, on peut déterminer la valeur angulaire des divisions et celle de la distance des fils, ce qui permettrait quelquefois de faire les observations d'une manière plus rapide, en déterminant chaque fois la division qui correspond au fil central.

Enfin, il est bon d'évaluer le coefficient C de torsion du fil en observant la déviation δ produite par une torsion notable, par exemple d'une demi-circonférence ; on a alors

$$C\pi = HM \sin\delta, \qquad \text{ou} \qquad \frac{C}{HM} = \frac{\sin\delta}{\pi}.$$

Le mode de suspension doit être modifié si ce rapport n'est pas très petit.

Des formes très différentes ont été données aux boussoles de déclinaison ; quel que soit le mode de construction, l'appareil doit comporter les corrections nécessaires, et la marche des observations est toujours la même. Avec un bon appareil, la déclinaison se mesure au dixième de minute.

Dans la boussole qu'on vient de décrire, le point d'attache

de l'étrier au fil de suspension est assez élevé au-dessus du centre de gravité du système mobile pour que le couple provenant de la composante verticale ne fasse pas incliner le barreau d'une manière appréciable ; mais, si l'aiguille est portée sur un pivot, il est quelquefois nécessaire de tenir compte de cette cause d'erreur, et on est obligé à différentes latitudes magnétiques de ramener l'aiguille à l'horizontalité par de petits contre-poids.

842. Inclinaison. — On peut déterminer, soit directement l'inclinaison d'une aiguille qui se meut autour d'un axe perpendiculaire au méridien magnétique, soit l'inclinaison apparente dans un plan qui fait un angle connu avec le méridien, soit dans deux plans rectangulaires.

Dans les boussoles d'inclinaison, ou *inclinomètres*, comme celles de Gambey, on employait autrefois des aiguilles longues en observant à la loupe la position des pointes sur un cercle vertical. Ici encore, outre que l'appareil est difficile à manier, la durée des oscillations rend les observations plus lentes, sans rien ajouter à leur exactitude.

La figure 260 représente en demi-grandeur une boussole d'inclinaison de Brunner, où l'aiguille n'a que 7 centimètres de longueur. C'est une lame d'acier en forme de losange très aigu, traversée en son milieu par un axe d'acier dont les bouts sont bien cylindriques et qui repose sur deux agates en biseau dont les bords supérieurs sont dans le même plan horizontal. Les agates sont portées par un équipage qui tourne sur un cercle horizontal, et l'aiguille se meut en face d'un cercle vertical. L'axe de l'aiguille en roulant sur les agates peut quitter le centre du cercle ; on l'y ramène en relevant par un bouton L un étrier taillé en V qui soulève l'axe et on laisse ensuite reposer cet axe doucement sur les agates. La moitié supérieure de la boîte s'enlève quand on veut toucher à l'aiguille ; elle n'existe pas dans la figure.

Les lectures se font par un procédé très délicat, décrit précédemment (**520**). Le cercle vertical est mobile et porte aux extrémités d'un même diamètre des miroirs M dont les centres de courbure sont situés dans le plan de l'aiguille ; en observant avec des loupes *l*, on fait coïncider la pointe de l'aiguille avec son image réelle.

843. Corrections. — Les causes d'erreur sont ici encore plus nombreuses que dans la boussole de déclinaison. En effet, pour que l'inclinaison puisse être déterminée par une seule lecture, il est nécessaire : 1° de connaître la ligne d'horizon sur le cercle vertical ; 2° que l'aiguille soit centrée sur ce cercle ; 3° que l'axe magnétique de l'aiguille soit parallèle à la ligne des pointes ; 4° que le centre de gravité de l'aiguille

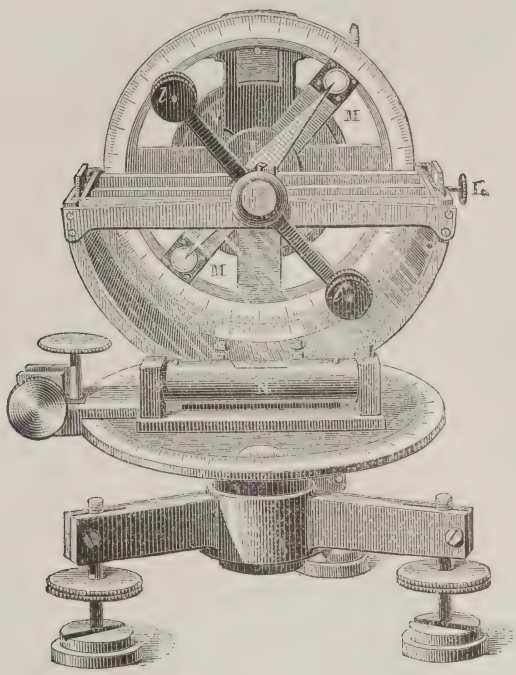


Fig. 260.

soit sur l'axe de rotation ; 5° enfin que le plan des agates soit horizontal. Toutes ces conditions ne peuvent être réalisées que d'une manière approximative.

1° Pour connaître la ligne d'horizon ou la verticale, on remplace l'aiguille par un fil à plomb situé dans le même plan et on observe ce fil successivement haut et bas dans les deux miroirs ; la moyenne des lectures donne la division qui se trouve au zéro du vernier quand le plan qui passe par les axes des deux miroirs est vertical. Cette détermination serait utile dans certains cas, mais il suffit, pour l'observation ordi-

naire, de tourner l'équipage de 180° ; la différence des lectures donne le double de l'angle de l'aiguille avec la verticale.

2° Le défaut de centrage est éliminé par la moyenne des lectures relatives aux deux bouts de l'aiguille.

3° Après avoir observé l'aiguille dans une position, on la retourne face pour face; la moyenne des lectures dans les deux cas élimine le défaut de parallélisme de l'axe magnétique avec la ligne des pointes.

4° Le poids de l'aiguille augmente ou diminue l'inclinaison apparente, suivant que le centre de gravité est situé plus bas ou plus haut que l'axe de rotation. On obtiendra un effet inverse en renversant l'aimantation de l'aiguille et on prendra encore la moyenne des résultats.

5° Si le plan des agates, quoique parallèle à l'axe du cercle vertical, n'est pas lui-même horizontal, l'aiguille a une tendance à rouler dans un sens ou dans l'autre et l'erreur change de signe quand on tourne l'équipage de 180° ; cette erreur est également éliminée par la moyenne des lectures. En outre, on s'assurera que le défaut n'existe pas si la demi-différence des lectures correspond à la verticale donnée par l'observation du fil à plomb.

Toutefois, comme plusieurs causes d'erreur agissent simultanément, il est nécessaire de démontrer que la compensation donnée par ces retournements est exacte, surtout en ce qui concerne la position du centre de gravité.

Supposons que l'aiguille se meuve dans un plan qui fait l'angle α avec le méridien magnétique. Soient : F la composante du champ terrestre dans ce plan (fig. 261) et I_α l'inclinaison apparente ; I' l'inclinaison donnée par la ligne des pointes OA de l'aiguille ; G le centre de gravité de l'aiguille, situé à la distance d de l'axe sur une droite qui fait l'angle γ avec la ligne des pointes, p la masse de l'aiguille en grammes et ϖ le produit pdg ; M_1 le moment magnétique de l'aiguille et β l'angle de son axe OB avec la ligne des pointes.

Le plan des agates étant supposé horizontal, la condition d'équilibre est

$$\varpi \cos(I' - \gamma) = FM_1 \sin(I_\alpha - I' + \beta).$$

Quand on retourne l'aiguille face pour face, les angles β et

γ interviennent en signes contraires ; l'inclinaison observée I'' donne alors

$$\varpi \cos(I'' + \gamma) = FM_1 \sin(I_\alpha - I'' - \beta).$$

Ces équations ajoutées membre à membre donnent, en appelant I_1 la demi-somme $\frac{I' + I''}{2}$ et i la demi-différence $\frac{I'' - I'}{2}$,

$$\varpi \cos I_1 \cos(i + \gamma) = FM_1 \sin(I_\alpha - I_1) \cos(i + \beta).$$

Lorsque l'aiguille est assez symétrique pour que les an-

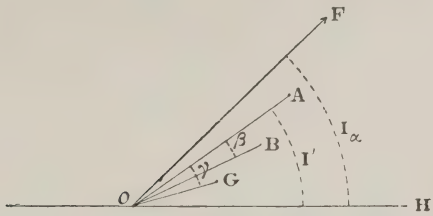


Fig. 261.

gles γ et β soient très petits, les inclinaisons observées sont aussi très voisines et on peut écrire

$$\varpi \cos I_1 = FM_1 \sin(I_\alpha - I_1).$$

L'aiguille ayant reçu, en sens contraire, un moment magnétique M_2 peu différent du premier, le centre de gravité se met au-dessous de l'axe; la valeur moyenne I_2 des inclinaisons observées avec retournement est alors plus grande que I_α, ce qui conduit à l'équation

$$\varpi \cos I_2 = FM_2 \sin(I_2 - I_\alpha).$$

Nous supposerons encore que les angles I_1 et I_2 diffèrent très peu l'un de l'autre et, par suite, de l'inclinaison apparente I_α, sans quoi l'aiguille serait défectueuse. Remplaçant les sinus par les angles correspondants, il en résulte

$$(3) \qquad \frac{I_\alpha - I_1}{I_2 - I_\alpha} = \frac{M_2}{M_1} \frac{\cos I_1}{\cos I_2}.$$

Enfin, si les moments magnétiques sont presque égaux dans les deux cas, on remplacera encore le second membre de cette équation par l'unité, ce qui donne, à une erreur du second ordre près,

$$(4) \qquad I_\alpha - I_1 = I_2 - I_\alpha, \qquad I_\alpha = \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

En réalité, l'angle I′ s'obtient par la moyenne des lectures relatives aux deux pointes de l'aiguille et de deux autres lectures correspondant au retournement du cadre de 180°. Les angles I_1 et I_2 sont donc chacun la moyenne de huit lectures; l'inclinaison I_α est ainsi déterminée, sans erreur sensible, par la moyenne des seize lectures relatives au retournement face pour face et au changement d'aimantation.

Le retournement du cadre a d'abord pour but d'éviter la connaissance exacte de la ligne d'horizon; on verrait aussi qu'il élimine le défaut d'horizontalité des agates.

Si les aimantations étaient très inégales, on pourrait déterminer le rapport m des moments M_1 et M_2 par les durées d'oscillation de l'aiguille dans un même azimut; on aurait alors, par l'équation (3),

$$(3)' \qquad I_\alpha = \frac{m I_2 + I_1}{1 + m}.$$

On a toujours soin de vérifier si les durées d'oscillation sont notablement différentes, mais la nécessité de cette correction nouvelle est une condition désavantageuse.

Lorsque le retournement de l'aiguille, l'aimantation inverse et la rotation du cadre donnent des variations de plusieurs degrés dans les lectures, l'appareil est manifestement médiocre, et aucun mode de correction n'est suffisant. Dans les boussoles de Brünner, les différences de toutes les lectures ne dépassent pas 5′, mais on doit ajouter qu'une si grande perfection est rarement atteinte.

844. Modes d'observation. — Pour observer l'inclinaison directement, on peut déterminer le méridien magnétique par cette propriété que dans un plan perpendiculaire l'aiguille se place dans une direction verticale.

Avec une bonne aiguille, il suffit de prendre la direction moyenne des deux azimuts dans lesquels l'aiguille est verticale avant et après un retournement face pour face. On peut même viser une pointe dans un azimut quelconque, puis tourner l'équipage jusqu'à ce que cette pointe se retrouve dans la même position, par rapport au cercle vertical. Les plans bissecteurs correspondants déterminent le méridien et le plan perpendiculaire. Il est facile de trouver rapidement par cette méthode, sauf quand l'inclinaison dépasse 70°, la direction du méridien à moins de quelques minutes, et il suffit que l'écart reste inférieur à 1°.

La disposition mécanique des boussoles ne permet pas en général d'observer des inclinaisons très petites. Au voisinage de l'équateur il est donc préférable de faire l'observation dans deux azimuts quelconques situés de part et d'autre à la même distance du méridien.

Dans ce dernier cas, il n'est pas nécessaire encore de connaître exactement la direction du méridien. Si les inclinaisons sont peu différentes dans deux plans dont l'angle est 2α, la moyenne des observations représente l'inclinaison I_α que l'on obtiendrait dans l'azimut α à partir du méridien. On en déduit l'inclinaison réelle par la relation

$$\operatorname{tang} I = \operatorname{tang} I_\alpha \cos\alpha.$$

La mesure de l'inclinaison est toujours le résultat d'un assez grand nombre de lectures différentes ; il est important de disposer les observations dans un ordre méthodique pour simplifier la manœuvre et toucher le moins possible à l'aiguille. L'une des faces de l'aiguille porte d'un côté une marque distinctive, par exemple un point gravé sur la monture près de l'axe, qui permet de définir la position qu'elle occupe dans chaque cas.

Supposons par exemple, qu'on fasse les observations dans deux azimuts rectangulaires, à peu près à 45° de part et d'autre du méridien.

Pour aimanter l'aiguille, on la place sur une planchette dans une cavité un peu plus profonde que l'épaisseur de l'aiguille et on l'y maintient par une vis de pression. Avec

deux aimants dont la largeur est plus grande que celle de la cavité, de manière qu'ils ne frottent jamais sur l'aiguille, on fait un nombre de passes déterminé, 10 ou 20 par exemple, par la méthode des touches séparées, et on répète la même opération pour l'autre face. On obtient une aimantation plus régulière, lorsque l'expérience est possible, en passant l'aiguille un certain nombre de fois dans une bobine parcourue par un courant d'intensité à peu près constante.

On porte l'aiguille dans la boussole et on met le cercle vertical dans un premier azimut. Nous appelerons *face* de l'instrument celle qui regarde l'observateur pendant les pointés. Si la marque de l'aiguille se met en haut, les opérations pourront être indiquées de la manière suivante :

PREMIÈRE AIMANTATION. — MARQUE EN HAUT.

Premier azimut.

Face au S.-E.	Face au N.-O.	Face au S.-E.	Face au N.-O.
(1)	(2)	(8)	(7)

Deuxième azimut.

Face au N.-E.	Face au S.-O.	Face au N.-E.	Face au S.-O.
(3)	(4)	(6)	(5)

En faisant les observations dans l'ordre indiqué par les différents chiffres, on n'aura besoin de toucher à l'aiguille qu'une fois pour le retournement.

Après aimantation en sens contraire la marque se trouve en bas et on reprend les lectures dans le même ordre.

Ajoutons encore que, pour chaque position, on ne doit pas se contenter d'une seule lecture haut et bas ; il est nécessaire de répéter les observations plusieurs fois, en soulevant l'aiguille par son étrier et la laissant reposer sur les agates, pour prendre finalement la moyenne des lectures.

Quelle que soit la perfection des aiguilles, il est difficile d'obtenir sûrement l'inclinaison à une minute près.

845. Méthodes d'induction. — Dans l'inclinomètre à induction, le rapport des composantes H et Z est déterminé par les

décharges induites dans un cadre qui tourne de 180° autour d'une verticale à partir d'un plan perpendiculaire au méridien, puis autour d'une horizontale parallèle au méridien à partir d'un plan horizontal (1).

Avec cette disposition, il est nécessaire de mesurer les impulsions du galvanomètre balistique qui correspondent aux deux décharges induites et l'erreur relative sur l'inclinaison est de même ordre que celle des deux lectures.

L'approximation est plus grande quand on cherche par tâtonnements quelle doit être la position initiale du cadre dans le second cas pour que la décharge soit la même que dans le premier (2). D'une manière plus générale, le cadre étant rendu mobile autour d'un axe perpendiculaire au méridien, on peut déterminer par tâtonnements deux positions initiales telles que la déviation du galvanomètre balistique soit la même pour une rotation de 180°; la bissectrice donne la direction de l'aiguille d'inclinaison.

On élimine même toute mesure de décharge, ainsi que le réglage des positions initiale et finale du cadre, en déterminant par expérience la droite autour de laquelle doit avoir lieu la rotation, pour qu'il n'y ait aucun courant induit (3). L'appareil est entièrement analogue à une boussole d'inclinaison ; l'axe de rotation du cadre peut se déplacer sur un cercle vertical mobile lui-même par rapport à un cercle horizontal.

Un bouton permet de donner au cadre des déplacements de 180° à droite et à gauche, limités par des butoirs. En observant les déviations dans un galvanomètre balistique, on arrive aisément, par une série d'opérations méthodiques, à mettre d'abord l'axe de rotation dans le méridien, puis dans la direction de l'aiguille d'inclinaison. La précision est ainsi beaucoup augmentée parce qu'on peut, dans le voisinage du courant nul, combiner les mouvements du cadre avec les oscillations de l'aiguille du galvanomètre et multiplier les angles d'impulsion.

Le réglage relatif au méridien magnétique est même assez précis pour que l'appareil soit propre à servir comme boussole

(1) W. Weber, *Pogg. Ann.*, t. XLIII, p. 293; 1838.
(2) H. Wild, *Bull. de l'Acad. des Sc. de St.-Pétersb.*, t. XXVII, p. 320; 1881.
(3) E. Mascart, *C. R. de l'Acad.. des Sc.*, t. XCVII, p. 1191; 1883.

de déclinaison. On augmentera encore la sensibilité en mettant du fer doux dans le cadre, puisque les changements d'aimantation restent nuls pour une rotation quelconque autour d'un axe parallèle au champ.

On peut enfin remplacer le galvanomètre balistique par un téléphone, en donnant au cadre un mouvement continu. Les courants périodiques produits dans ces conditions ne varient pas d'une manière assez brusque et sont difficilement perceptibles ([1]), mais ils deviennent plus appréciables quand on introduit dans le circuit un interrupteur, par exemple une roue dentée. Avec ce mode d'observation, la sensibilité n'est pas suffisante ; on obtient de meilleurs résultats en introduisant du fer doux dans le cadre ([2]).

Il paraît que les appareils d'induction bien construits permettent de déterminer l'inclinaison à moins de 10″.

846. Instruments de voyage. — La boussole d'inclinaison décrite plus haut (fig. 260) convient particulièrement pour les voyages par son extrême légèreté, le poids de l'instrument avec sa boîte étant inférieur à 2 kilogrammes. Le théodolite magnétique (fig. 258) est déjà beaucoup plus encombrant, la lunette ayant environ 25ᶜ de longueur ; les cercles permettent d'évaluer 10″ par la lecture des verniers, précision superflue dans les observations magnétiques.

Pour alléger l'instrument en donnant aux différentes lectures des approximations de même ordre, j'ai fait construire par Brunner un théodolite magnétique, représenté par la figure 262 en demi-grandeur et qui ne pèse que 4 kilogrammes boîte comprise. Les cercles ont 8ᶜ de diamètre et les verniers donnent directement la minute. Les barreaux B sont cylindriques, de 6ᶜ,5 de longueur et la visée se fait encore par une méthode de réflexion. Les extrémités du barreau sont polies sous forme de miroir concave ; un index I en argent, mobile avec la lunette L, porte sur sa face postérieure trois traits verticaux et sur la face interne un trait unique qu'on amène près du centre de courbure du miroir. On vise avec la loupe M l'image de ce trait que l'on fait coïncider avec le trait médian de la face externe. Les barreaux portent naturellement des

([1]) J. Stefan, *Sitzb. der K. Ak. der Wiss. in Wien.;* 1880, p. 262.
([2]) W. Shaper, *Météorolog. Zeitchrift.*; 1886, p. 7.

goupilles d'arrêt qui permettent de les retourner de 180° autour de leur axe.

Pour déterminer la composante horizontale, on observe

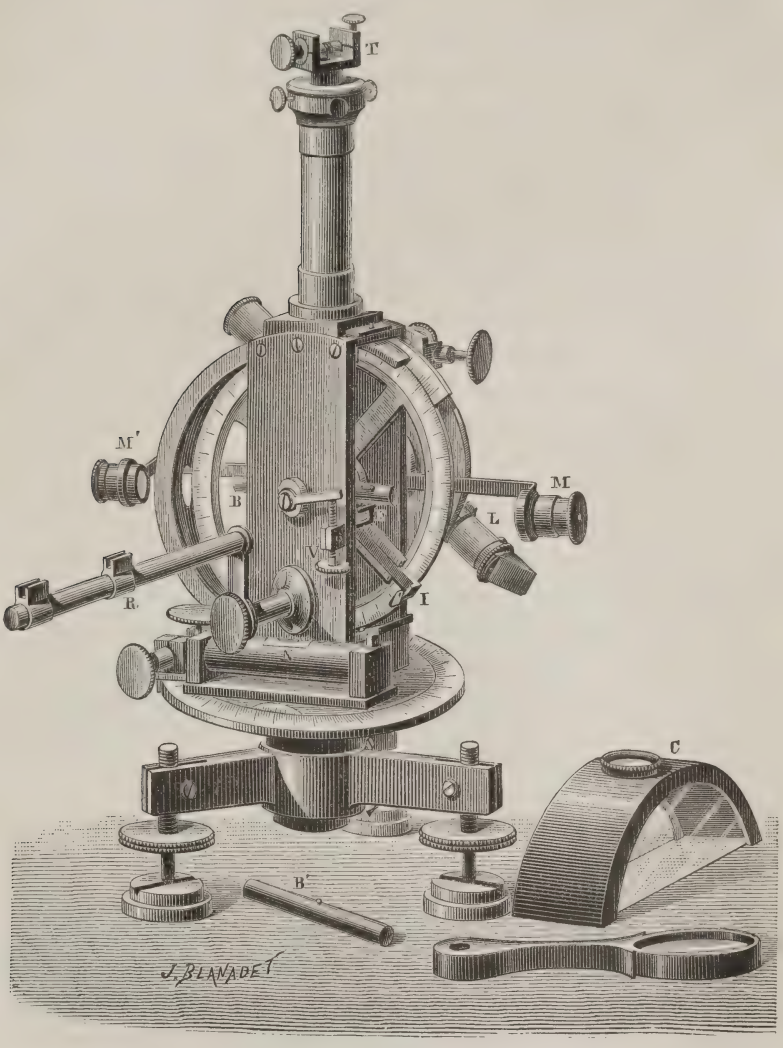


Fig. 262.

d'abord les oscillations de l'un des barreaux et on l'emploie ensuite comme barreau déviant, en le plaçant sur une tige latérale dans des montures R et R' (fig. 258 et 262). Il est bon que cette tige puisse être installée des deux côtés, pour que

les distances moyennes à l'axe de suspension puissent être déterminées avec plus d'exactitude. Afin de se placer dans les meilleures conditions, on prend alors comme déclinomètre un barreau de longueur moitié moindre, prolongé de part et d'autre par des parties en cuivre pour que les pointés se fassent de la même manière. Les déviations s'observent alors par la méthode des sinus.

On a ainsi tous les éléments nécessaires pour les observations aux deux distances, mais il est préférable de considérer la seconde série comme un contrôle et d'évaluer le terme p du second ordre par comparaison dans un observatoire.

M. Moureaux [1] a fait un excellent usage de ces instruments légers dans un grand nombre d'explorations. La manœuvre est si rapide que deux heures suffisent pour toutes les observations répétées en double, inclinaison, visée du soleil, déclinaison et composante horizontale.

847. Déflecteurs. — On peut aussi simplifier l'expérience et prendre pour déflecteur, comme dans le théodolite de Lamont, un barreau aimanté vertical, qui se place dans une monture liée à l'équipage azimutal, et disposé de manière que l'un des pôles soit dans le plan horizontal du déclinomètre.

Le champ moyen ainsi produit sur l'aiguille est perpendiculaire à sa direction pour la position d'équilibre et proportionnel à la masse du pôle, ou au moment magnétique M du barreau, et peut être représenté par AM. La déviation observée α donne alors

$$\sin\alpha = \frac{AM}{H}, \qquad H = \frac{AM}{\sin\alpha}.$$

On élimine autant que possible tous les défauts de symétrie en retournant le barreau face pour face, puis en mettant le pôle supérieur en bas, enfin en changeant le signe du pôle déviant. L'angle α étant donné par la moyenne de toutes ces lectures, si l'on a déterminé le coefficient a de variation avec la température, on aura ainsi

$$H = AM_t \frac{1 - a(t' - t)}{\sin\alpha} = C_t \frac{1 - a(t' - t)}{\sin\alpha}.$$

[1] Th. Moureaux, *Ann. de ch. et de Phys.* [6], t. XXI, p. 5; 1890.

La constante C_t relative à la température t est évaluée par comparaison dans un observatoire.

Cette méthode n'offre pas de garanties suffisantes parce que l'aimantation du barreau peut subir des changements brusques et on devrait en outre tenir compte des aimantations induites par le champ terrestre.

Le théodolite permet encore de déterminer l'inclinaison si l'on remplace l'aimant par un barreau de fer doux [1].

Pour plus de symétrie, Lamont installe sur le théodolite deux barreaux situés de part et d'autre, de manière que le bout supérieur de l'un et le bout inférieur de l'autre soient dans le plan horizontal du déclinomètre. Le champ ainsi produit est proportionnel à la composante verticale Z, par exemple BZ. Après une série de retournements et d'inversions des deux barreaux, pour éliminer les défauts de symétrie, la déviation moyenne α donnera encore

$$\sin\alpha = \frac{CZ}{H} = C \operatorname{tang} I.$$

Si le coefficient C est déterminé par comparaison, on aura ainsi la valeur de I. Toutefois, les propriétés du fer sont modifiées par tant de causes, physiques ou mécaniques, qu'on ne peut pas être assuré que le barreau reste toujours identique à lui-même ; l'expérience montre, en effet, que cette mesure de l'inclinaison ne donne que des valeurs approchées.

Lloyd [2] applique les déflecteurs à la boussole d'inclinaison pour déterminer la valeur totale T du champ terrestre.

Outre les aiguilles A_1 et A_2, qui servent pour les observations ordinaires, on emploie deux aiguilles spéciales A_3 et A_4, dont l'aimantation n'est jamais renversée. La première A_3 est bien équilibrée, et la seconde A_4 munie d'un contrepoids convenable qui met le centre de gravité en dehors de l'axe.

L'observation est d'abord faite avec la dernière aiguille dans le méridien magnétique. L'inclinaison correspondante I′ donne alors (843)

$$\varpi \cos I' = TM \sin(I - I'). \tag{5}$$

(1) Lloyd, *Account of the Mag. observatory of Dublin ;* 1842.
(2) *Admiralty Manual of Scient. enquiry*, 4e édit. p. 105 ; 1871

Cette aiguille est ensuite montée à angle droit sur l'alidade qui porte les microscopes ou les loupes de visée ; l'aiguille A_3 mise en place est déviée et on observe son inclinaison apparente I_1. Le retournement de l'équipage donne une nouvelle inclinaison apparente I_2, qui correspond à une déviation de sens contraire : la moyenne des déviations est

$$\delta = \frac{I - I_1}{2} + \frac{I_2 - I}{2} = \frac{I_2 - I_1}{2}.$$

Le champ magnétique moyen de l'aiguille déviante est proportionnel à son moment, soit CM, et fait avec l'axe de l'aiguille mobile un angle constant θ très voisin de 90° ; la condition d'équilibre est

$$\text{(6)} \qquad CM \sin\theta = T \sin\delta.$$

Il résulte alors des équations (5) et (6)

$$T^2 = C\varpi \sin\theta \frac{\cos I'}{\sin\delta \sin(I - I')} = B \frac{\cos I'}{\sin\delta \sin(I - I')}.$$

On connaîtra ainsi la valeur de T si la constante B a été déterminée par comparaison avec des mesures absolues.

848. Boussole de Fox. — Quand on veut faire des observations à la mer, les mouvements du navire ne permettent guère d'employer des aiguilles dont l'axe roule sur des plans d'agate. Dans la boussole de Fox [1], l'axe est terminé par des pivots très courts pénétrant dans deux chapes en rubis.

L'aiguille est alors moins libre, mais on facilite les oscillations en faisant vibrer l'appareil par le frottement d'un disque en ivoire strié sur une tige métallique ; en outre, les chapes sont portées par une monture qui peut tourner à droite et à gauche d'un certain angle, de manière à changer les points d'appui des pivots.

Comme il est difficile d'enlever l'aiguille, on ne peut plus la retourner face pour face ni changer son aimantation ; on doit s'attacher à la maintenir dans un état aussi invariable que possible, et il sera nécessaire de recourir à des opérations de contrôle.

[1] Walker, *Terrestrial and cosmical Magnetism.*; London, 1840.

L'aiguille porte une poulie sur laquelle est enroulé un fil aux extrémités duquel on suspendra des poids inégaux.

Si l'aiguille est bien construite, la moyenne I′ des observations faites dans le méridien magnétique en visant les deux pointes, avec une rotation droite et gauche des pivots, et retournant l'appareil de 180°, ce qui compense en même temps l'erreur de repérage de la ligne d'horizon, donne d'abord l'équation (5). Le rapport $\frac{\varpi}{M} = B$ étant déterminé par comparaison avec des observations à terre aussi souvent que possible, afin d'éliminer les changements d'aimantation, on en déduit l'inclinaison I en fonction de I′ et du champ total T.

On charge ensuite le fil de poids dont le moment par rapport à l'axe est ϖ'. La première observation donne une inclinaison apparente I_1, et la condition d'equilibre devient

$$\varpi' + \varpi \cos I_1 = TM \sin(I - I_1).$$

Quand la charge est portée à l'autre extrémité du fil, la déviation change de signe et l'on a

$$\varpi' - \varpi \cos I_2 = TM \sin(I_2 - I).$$

On en déduit, par addition et soustraction, en appelant i la demi-somme des angles I_1 et I_2, et δ la déviation moyenne,

$$\varpi' + \varpi \sin i \sin \delta = TM \sin \delta \cos(I - i),$$
$$\varpi \cos i = TM \sin(I - i).$$

Comparant la dernière équation avec (5), on voit qu'il en résulte la condition $i = I'$.

Les déviations $I - I_1$ et $I_2 - I$ étant très peu différentes de la moyenne δ, on peut remplacer $\cos(I - i)$ par l'unité dans la première équation et il reste

$$T \sin \delta = \frac{\varpi'}{M} + \frac{\varpi}{M} \sin i \sin \delta = A + B \sin i \sin \delta.$$

On éliminerait encore le dernier terme en opérant avec des

charges inégales sur le fil. Les opérations faites en deux lieux différents donnent alors

$$T' \sin \delta' - T \sin \delta = B (\sin i' \sin \delta' - \sin i \sin \delta),$$

et on déterminera B par une expérience de comparaison.

Deux montures situées derrière l'appareil et mobiles avec les loupes de visée permettent encore d'y installer des aimants latéraux qui servent de déflecteurs, comme l'aiguille fixe de Lloyd ; le couple produit par ces aimants, dont la distance au pôle de l'aiguille le plus voisin est constante pendant les observations, dépend des deux moments magnétiques et il équivaut à une charge déterminée du fil, ce qui fournit un nouveau moyen de contrôle [1].

L'instrument est placé à bord sur un plateau supporté par une triple suspension à la Cardan. On ne peut pas en espérer autant d'exactitude que dans les observations à terre, mais il donne des résultats très satisfaisants par temps maniable, même avec un peu de roulis, pourvu que le bâtiment soit maintenu bien en route pendant la série des opérations.

849. Appareils de variations. — Dans les observatoires permanents il est nécessaire d'installer des appareils qui donnent, soit par l'observation directe fréquemment répétée, soit plutôt par un enregistrement continu, les variations des éléments magnétiques. Il nous suffira d'en indiquer le principe.

La boussole de Gambey, pour les variations de déclinaison, se compose d'un barreau aimanté de 50 centimètres de longueur suspendu par des fils de soie et portant à chaque extrémité une échelle divisée que l'on observe avec un microscope La valeur angulaire de la division étant déterminée, l'observation donne la variation de la déclinaison dD, à partir d'un repère qui correspond à une déclinaison connue.

On a renoncé à l'emploi de longs barreaux à cause de la lenteur des oscillations ; les variations rapides peuvent alors échapper à l'observation et les perturbations notables provoquent des oscillations de grande amplitude qui s'éteignent trop lentement. Les aimants courts prennent vite leur position d'équilibre et suivent mieux les détails des variations.

[1] Voir Schwerer et E. Guyon, *Annales hydrogr.* [2], t. XVIII, p. 5; 1896.

Pour la composante horizontale, on emploie habituellement un barreau porté par une suspension bifilaire (836), réglée de manière que l'équilibre ait lieu dans une direction voisine de la normale au méridien. Les indications de l'appareil sont alors indépendantes des changements de déclinaison et la variation relative de la composante est proportionnelle aux déviations observées, à part des termes qui dépendent de la température et des modifications que peut éprouver le magnétisme du barreau.

Une autre méthode consiste à se servir d'un déclinomètre en plaçant dans le voisinage un barreau déviant dont le champ moyen F est à peu près perpendiculaire au méridien.

Soient, d'une manière générale, α et θ les angles que fait la direction fixe du champ auxiliaire F avec la normale au méridien et avec la direction de l'aimant dévié. La condition d'équilibre est

$$H\cos(\theta+\alpha)=F\sin\theta,$$

et les variations simultanées donnent

$$\frac{dH}{H}-\operatorname{tang}(\theta+\alpha)(d\theta+d\alpha)=\frac{dF}{F}+\cot\theta\, d\theta.$$

La quantité $d\alpha$ représente la variation dD de déclinaison. Si l'erreur de réglage α est très petite et l'angle θ voisin de 45°, comme on le fait habituellement, on peut écrire

$$\frac{dH}{H}=\frac{dF}{F}-2\,d\theta+dD,$$

ou en tenant compte des changements qu'éprouve l'aimantation du déflecteur avec la température et avec le temps,

$$\frac{dH}{H}=-a(t'-t)-bT+2\,d\theta+dD.$$

Les indications doivent alors être corrigées par celles d'un déclinomètre de variations. Dans les deux cas, la plus grande difficulté est de connaître le coefficient b d'affaiblissement graduel ; il est nécessaire de faire un contrôle fréquent par des déterminations directes de H.

Les variations d'inclinaison peuvent s'obtenir par une aiguille spéciale munie d'un miroir réflecteur, mobile autour d'une arête de couteau et réglée de manière à se placer très sensiblement dans la direction du champ terrestre. Toutefois une telle aiguille est difficile à construire et paraît manquer de stabilité.

On préfère, en général, observer les variations de la composante verticale. L'appareil est formé d'un barreau qui repose par un couteau sur un plan d'agate et on l'équilibre de manière qu'il se maintienne à peu près horizontal. L'axe de rotation est habituellement dans le méridien magnétique.

Soient Z et H′ les composantes verticale et horizontale de la projection du champ terrestre sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, I′ l'inclinaison apparente dans ce plan, θ l'angle de l'axe magnétique du barreau avec l'horizon, β l'angle du plan normal à cet axe avec la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'arête du couteau. L'équation d'équilibre est

$$(7) \qquad ZM\cos\theta = \varpi\sin(\beta+\theta) + H'M\sin\theta.$$

Comme l'angle θ est très petit, les variations donnent, abstraction faite de quantités négligeables,

$$M\,dZ + Z\,dM = \varpi\cos\beta\,d\theta + \sin\beta\,d\varpi + H'M\,d\theta.$$

Si l'on divise cette équation par la première, membre à membre, en tenant compte de la relation $Z = H'\tang I'$ on obtient, au même degré d'approximation,

$$\frac{dZ}{Z} + \frac{dM}{M} = (\cot\beta + \cot I')\,d\theta + \frac{d\varpi}{\varpi},$$

ou, en désignant par a un coefficient qui comprend les variations de M et de ϖ avec la température,

$$\frac{dZ}{Z} = (\cot\beta + \cot I')\,d\theta + a(t'-t) + bT.$$

Le facteur principal $(\cot\beta + \cot I')$ sera déterminé par expérience. Si le barreau oscille dans le méridien, on a $I' = I$; si

l'axe de rotation est parallèle au méridien, $\cot I' = 0$. Dans ce dernier cas, la formule est plus simple, mais l'action de la terre tend à faire tourner le couteau sur les plans, et la marche de l'instrument peut être moins régulière.

Le couple qui tend à ramener le barreau dans sa position d'équilibre, quand il est dévié d'un angle très petit δ, est

$$[\varpi \cos(\beta + \theta) + H'M \cos\theta + ZM \sin\theta]\,\delta.$$

Comme l'angle θ est très petit, l'expression du couple directeur peut se réduire à

$$C = \varpi \cos\beta + H'M = \varpi \cos\beta + ZM \cot I.$$

Remplaçant la quantité $\varpi \sin\beta$ par sa valeur approchée ZM tirée de l'équation (7), on a sensiblement

$$C = ZM(\cot\beta + \cot I').$$

D'autre part, le couple directeur du barreau soutenu par un fil vertical est $HM = ZM \cot I$.

Si n et n' désignent les nombres d'oscillations effectuées par la balance dans le méridien et dans un plan perpendiculaire, et N le nombre relatif aux oscillations autour d'un axe vertical, on aura

$$\frac{n^2}{\cot\beta + \cot I} = \frac{n'^2}{\cot\beta} = \frac{N^2}{\cot I}.$$

La première équation détermine $\cot\beta$; il en résulte alors, comme vérification, $N^2 = n'^2 - n^2$.

Il est préférable de déterminer les constantes des trois instruments de variations par une comparaison directe. A part les effets de température, les variations des deux composantes sont données par des expressions telles que

$$\frac{dH}{H} = A\,d\theta, \qquad \text{et} \qquad \frac{dZ}{Z} = B\,d\theta,$$

les angles $d\theta$ étant d'ailleurs évalués de part et d'autre avec des échelles arbitraires.

On place un barreau déflecteur M′ successivement à la même distance des trois appareils de variation, de manière que son action F soit perpendiculaire au méridien pour le déclinomètre, parallèle au méridien pour le bifilaire, et verticale pour la balance. Le déflecteur étant, par exemple, dans la deuxième position de Gauss pour chaque expérience, les déviations correspondantes δ, δ' et δ'' des trois appareils, supposées très petites, donnent

$$F = H\delta = AH\delta' = BZ\delta'';$$

les coefficients des appareils ont pour valeurs

$$A = \frac{\delta}{\delta'}, \qquad B = \frac{H}{Z}\frac{\delta}{\delta''} = \frac{\delta}{\delta''}\cot I.$$

Les variations de l'inclinaison et du champ total T se déduiront de celles des deux composantes horizontale et verticale par les équations

$$Z = H \operatorname{tang} I \qquad \text{et} \qquad T^2 = Z^2 + H^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{2}{\sin 2I}\, dI = \frac{dZ}{Z} - \frac{dH}{H},$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{Z\,dZ + H\,dH}{T^2} = \frac{dZ}{Z}\sin^2 I + \frac{dH}{H}\cos^2 I.$$

MAGNÉTISME DES NAVIRES.

850. Boussoles marines. — On donne habituellement le nom de *compas* aux boussoles employées pour la navigation. Elles sont formées d'une aiguille ou d'un système d'aiguilles tournant sur un pivot; l'aiguille porte un disque ou *rose*, sur laquelle est une *ligne de foi* correspondant à l'axe magnétique et une série de divisions circulaires. La ligne de foi ne se met pas en général dans le méridien magnétique : le fer et l'acier qui entrent dans la construction ou dans le chargement du navire causent une déviation qu'il est nécessaire de

corriger ou de compenser. La théorie de la correction des compas a été donnée par Poisson [1].

Les masses d'acier ou de fer dur qui ont été aimantées pendant la construction se comportent comme des aimants; on appelle quelquefois ce magnétisme *sous-permanent*, parce que sa valeur, qui dépend de la position du navire en chantier, diminue lentement à la mer et ne devient définitive qu'après un certain temps de navigation. D'autre part, le fer doux s'aimante par le champ terrestre; le magnétisme temporaire ainsi produit varie avec l'orientation du navire et sa position géographique. On doit donc considérer deux espèces d'actions perturbatrices, les unes constantes, les autres variables avec la position du navire.

Supposons d'abord le navire droit. On appelle *cap* la direction du plan de symétrie comptée de l'arrière à l'avant; par extension, on désigne souvent par le même nom l'azimut de ce plan avec un autre plan vertical. Soient

ζ l'azimut du cap avec le méridien magnétique, ou le *cap magnétique*, cet angle étant compté vers l'est;

ζ' l'azimut du cap avec la direction du compas, ou la *route au compas*;

$\delta = \zeta - \zeta'$ la *déviation* du compas.

On appelle *variation* l'angle V, compté aussi vers l'est, que fait le compas avec le méridien géographique, ou la déclinaison apparente. Si Δ est la déclinaison réelle, on a

$$V = \Delta + \delta.$$

Nous admettrons que le magnétisme du navire, tant permanent que sous-permanent, est indépendant de la température; les variations qu'il pourrait éprouver de ce chef sont négligeables par rapport aux autres causes d'erreur.

Pour les pièces de fer doux, on admettra que l'aimantation induite est proportionnelle à la force magnétisante et que les aimantations produites par différentes causes se superposent; ces deux hypothèses peuvent être considérées comme suffisamment exactes lorsqu'il s'agit d'actions de même ordre que celles de la terre.

(1) Poisson, *Mém. de l'Institut*, t. V, p. 521; 1824.

Enfin, on supposera que l'aiguille du compas est très petite par rapport à sa distance aux masses de fer ou d'acier les plus voisines, et par conséquent qu'elle est mobile dans un champ sensiblement uniforme. Il suffit dès lors de calculer la perturbation du champ terrestre au centre du compas.

Rapportons le phénomène à des axes de coordonnées rectangulaires, l'un x dans la direction de l'avant, l'autre y de babord à tribord, c'est-à-dire vers la droite, le troisième z de haut en bas, vers la quille. Ce dernier axe est vertical et les deux premiers horizontaux quand le navire est droit.

Le champ produit sur le compas par la coque, en raison de son magnétisme permanent et de l'aimantation induite correspondante dans les masses de fer doux, est constant en grandeur et en direction par rapport au navire; soient P, Q et R ses projections sur les trois axes. Lorsque la distribution des aimants et du fer doux est symétrique, la valeur de Q est très petite et la composante horizontale $F_1 = \sqrt{P^2 + Q^2}$ est sensiblement parallèle au plan de symétrie, si le compas est lui-même dans ce plan. Mais la composante Q a des valeurs sensibles toutes les fois que le cap du navire sur les chantiers n'était pas dans le méridien magnétique ; la composante F_1 fait alors avec le cap un angle α appelé *angle tribord*.

Si cette action existait seule on aurait, en appelant H_1 la composante horizontale du champ produit par la terre et le magnétisme permanent du navire, et δ_1 l'angle qu'elle fait avec le méridien magnétique,

$$\frac{\sin(\zeta + \alpha)}{H_1} = \frac{\sin \delta_1}{F_1} = \frac{\sin(\zeta + \alpha - \delta_1)}{H}.$$

La déviation δ_1 est nulle lorsque le cap est dans l'un des azimuts $-\alpha$ ou $\pi - \alpha$, et elle change de signe quand il passe d'un côté à l'autre de cette direction ; c'est une déviation *semi-circulaire*. Si le rapport des composantes F_1 et H est très petit, on peut écrire, d'une manière approchée,

$$(1) \qquad \sin \delta_1 = \frac{F_1}{H} \sin(\zeta + \alpha) = \frac{P}{H} \sin \zeta + \frac{Q}{H} \cos \zeta.$$

La déviation est sensiblement en raison inverse de H ; elle

a le même signe sur toute la terre et la même valeur en tous les points d'un parallèle magnétique.

Pour le champ terrestre, nous remarquerons d'abord que la composante verticale Z produit une aimantation indépendante de l'orientation du navire et que son action sur le compas donne une composante située sensiblement dans le plan de symétrie. La déviation correspondante est donc aussi *semi-circulaire* ; elle devient nulle à l'équateur et change de signe quand on passe d'un hémisphère à l'autre.

Pour calculer l'effet de la composante horizontale H, nous la remplacerons par ses deux projections

$$X = H\cos\zeta, \qquad Y = -H\sin\zeta.$$

L'aimantation produite par la première donne une action dont la composante horizontale F_2 est dirigée dans le plan de symétrie. Si on pose

$$F_2 = aH\cos\zeta,$$

et qu'on appelle H_2 la résultante de H et F_2, la déviation δ_2 due à l'action de la composante horizontale serait déterminée par les équations

$$\frac{\sin\zeta}{H_2} = \frac{\sin\delta_2}{F_2} = \frac{\sin(\zeta - \delta_2)}{H},$$

qui donnent, au moins d'une manière très approchée,

$$(2) \qquad \sin\delta_2 = \frac{a}{2}\sin 2\zeta.$$

Cette déviation est nulle quand le cap est dirigé vers l'un des quatre points cardinaux magnétiques, et elle prend des valeurs de signes contraires dans deux quadrants voisins ; c'est une déviation *quadrantale*.

La projection $Y = -H\sin\zeta$ donne, de même, une composante horizontale

$$F'_2 = -eH\sin\zeta;$$

la déviation correspondante δ'_2 est encore *quadrantale* et dé-

terminée sensiblement par l'équation

$$(3) \qquad \sin\delta'_2 = -\frac{e}{2}\sin 2\zeta.$$

Lorsque les actions perturbatrices restent assez faibles, on peut admettre que les déviations produites par chacune d'elles s'ajoutent simplement et représenter la déviation totale par une expression de la forme

$$(4) \qquad \sin\delta = (A) + B\sin\zeta + C\cos\zeta + D\sin 2\zeta + (E\cos 2\zeta),$$

les termes mis entre parenthèses étant très petits puisqu'ils tiennent uniquement aux défauts de symétrie des masses de fer et d'acier, ou de la position du compas à bord.

On peut aussi, au même degré d'approximation, remplacer dans le second membre l'azimut vrai ζ du cap, qui est inconnu, par l'azimut apparent ζ' et prendre l'expression

$$(5) \qquad \sin\delta = A + B\sin\zeta' + C\cos\zeta' + D\sin 2\zeta' + E\cos 2\zeta',$$

dont les coefficients seront à déterminer par une série d'observations méthodiques. Le terme A du second membre est la valeur moyenne de la déviation, les deux suivants représentent une déviation semi-circulaire et les deux derniers une déviation quadrantale.

Enfin il reste encore à considérer l'action produite par l'obliquité du navire, ou l'erreur de *bande*. Soit i l'inclinaison du navire sur tribord, ou vers la droite. La composante X du champ terrestre ne change pas et les autres doivent être remplacées par les valeurs nouvelles

$$Y_i = Y\cos i + Z\sin i,$$

$$Z_i = Z\cos i - Y\sin i.$$

Dans ce cas, chacun des coefficients A, C et D renferme un terme sensiblement proportionnel à l'inclinaison.

851. Équations générales. — Pour faire le calcul plus complètement, nous remarquerons que, lorsque le navire est droit, et dans l'hypothèse de la superposition des différentes ai-

mantations, les composantes X′, Y′ et Z′ du champ résultant peuvent être représentées par les expressions

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= X + P + aX + (bY) + cZ,\\ Y' &= Y + Q + (dX) + eY + (fZ),\\ Z' &= Z + R + gX + (hY) + kZ,\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles les paramètres a, b, c, d, ... sont relatifs à l'aimantation induite par la terre. On a mis entre parenthèses les termes qui sont très petits, puisqu'ils s'annulent dans les conditions de symétrie du navire et du compas.

En appelant H′ la composante horizontale du champ résultant et I l'inclinaison magnétique, on a

$$\begin{aligned} X &= H\cos\zeta, & Y &= -H\sin\zeta, & Z &= H\operatorname{tang} I.\\ X' &= H'\cos\zeta', & Y' &= -H'\sin\zeta', \end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned} P &= pH, & Q &= qH, & R &= rZ.\\ H' &= h'H, & Z' &= z'Z, \end{aligned}$$

En substituant ces différentes valeurs dans les expressions précédentes (6), on obtient

$$\begin{aligned} h'\cos\zeta' &= (p + c\operatorname{tang} I) + (1 + a)\cos\zeta - b\sin\zeta,\\ -h'\sin\zeta' &= (q + f\operatorname{tang} I) - (1 + e)\sin\zeta + d\cos\zeta,\\ z' &= (r + 1 + k) + g\cot I\cos\zeta - h\cot I\sin\zeta. \end{aligned}$$

Ces équations donnent les composantes du champ résultant en fonction du champ terrestre, du magnétisme permanent, des paramètres et de la direction du cap.

Pour avoir la déviation elle-même, on ajoute les deux premières équations, après les avoir multipliées respectivement par $\sin\zeta$ et $\cos\zeta$, puis on retranche la seconde de la première après les avoir multipliées respectivement par $\cos\zeta$ et $\sin\zeta$, afin que le premier membre renferme le sinus et le cosinus

de l'angle $\zeta - \zeta' = \delta$. On trouve ainsi, après quelques réductions indiquées par la marche du calcul,

$$h' \sin\delta = \frac{d-b}{2} + (p + c \operatorname{tang} \mathrm{I}) \sin\zeta + (q + f \operatorname{tang} \mathrm{I}) \cos\zeta + \frac{a-e}{2} \sin 2\zeta + \frac{b+d}{2} \cos 2\zeta,$$

$$h' \cos\delta = 1 + \frac{a+e}{2} + (p + c \operatorname{tang} \mathrm{I}) \cos\zeta - (q + f \operatorname{tang} \mathrm{I}) \sin\zeta + \frac{a-e}{2} \cos 2\zeta - \frac{b+d}{2} \sin 2\zeta.$$

Divisant ces deux équations par la quantité $\lambda = 1 + \frac{a+e}{2}$, puis la première par la seconde, membre à membre, on obtient, en désignant par A, B, C, D, E des coefficients dont la signification est manifeste,

$$\frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B} \sin\zeta + \mathrm{C} \cos\zeta + \mathrm{D} \sin 2\zeta + \mathrm{E} \cos 2\zeta}{1 + \mathrm{B} \cos\zeta - \mathrm{C} \sin\zeta + \mathrm{D} \cos 2\zeta - \mathrm{E} \sin 2\zeta}.$$

Chassant le dénominateur, et remplaçant l'angle $\zeta - \delta$ par sa valeur ζ', on a enfin

$$(7) \quad \sin\delta = \mathrm{A} \cos\delta + \mathrm{B} \sin\zeta' + \mathrm{C} \cos\zeta' + \mathrm{D} \sin(2\zeta' + \delta) + \mathrm{E} \cos(2\zeta' + \delta).$$

On voit que, par leur définition même, si on se reporte aux équations primitives (6), les coefficients A et E sont très petits. En négligeant δ dans les termes de correction, on retrouverait l'expression (5).

Comme l'angle δ est petit, on peut encore remplacer $\cos\delta$ par l'unité dans l'équation (7), ce qui donne

$$\sin\delta = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B} \sin\zeta' + \mathrm{C} \cos\zeta' + \mathrm{D} \sin 2\zeta' + \mathrm{E} \cos 2\zeta'}{1 - \mathrm{D} \cos 2\zeta' + \mathrm{E} \sin 2\zeta'},$$

le terme $\mathrm{E} \sin 2\zeta'$ étant négligeable au dénominateur.

Sans insister sur les méthodes employées pour déterminer les valeurs des coefficients, nous ajouterons que ce mode de correction donne d'excellents résultats lorsque la déviation

ne dépasse pas 20°, mais qu'il devient très difficile à appliquer lorsque les déviations sont considérables, comme il arrive souvent pour les navires actuels qui renferment de grandes masses de fer et d'acier.

852. Compensation des compas. — L'action du navire sur le compas équivaut en réalité à celle d'un aimant qui produirait les composantes P, Q, R et d'une masse de fer doux placée au voisinage du compas dans une direction déterminée et à une distance convenable, à la condition toutefois que l'action du compas lui-même sur cette masse de fer doux ne produise pas une aimantation induite capable de donner une perturbation notable par réaction sur le compas.

Il est donc possible de compenser exactement l'action du navire en plaçant à poste fixe, dans le voisinage du compas, un aimant dont le champ ait pour composantes $-P$, $-Q$ et $-R$, et une masse de fer doux qui fasse équilibre à l'aimantation du navire par la terre ; la déviation serait annulée. Toutefois il serait très difficile de régler la compensation de cette manière par des tâtonnements méthodiques ; il est plus pratique d'avoir recours à plusieurs aimants qui permettent d'annuler séparément les différents termes de la déviation.

C'est surtout à sir G. Airy [1] que l'on doit l'emploi de ce mode de correction. On peut remarquer d'abord que la composante verticale Z et les paramètres g, h, k n'interviennent pas dans la déviation du navire droit ; il suffit donc d'annuler les composantes P et Q et les autres paramètres. On installe sur le pont, à des distances convenables, des aimants longitudinaux et des aimants transversaux qui annulent séparément P et Q, puis des barres de fer doux ou des boîtes de chaînes qui compensent l'aimantation induite par la terre.

Les compas ordinaires ont des aiguilles longues et très aimantées, de sorte qu'il est nécessaire d'éloigner beaucoup les organes de correction pour qu'ils produisent sur l'aiguille un champ à peu près uniforme et pour éviter la réaction de l'aimantation induite. Les corrections exigent alors des aimants très puissants et des masses de fer considérables.

Pour se rapprocher davantage de la théorie, Lord Kelvin

[1] G Airy, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1856

emploie, au contraire, une série de petites aiguilles réunies par des fils de soie à une rose très légère en papier ou en mica, de manière que l'ensemble ne pèse pas plus de 30 grammes. Quoique ces aiguilles soient en outre très peu aimantées, le moment d'inertie du système est assez faible pour que le compas prenne rapidement sa position d'équilibre sans qu'on soit obligé de recourir à des moyens artificiels comme dans les compas à liquide. La petitesse des aiguilles et la faible valeur de leur moment magnétique permet de rapprocher beaucoup les organes correcteurs : les aimants sont placés dans la boîte même du compas et le fer doux est formé de deux sphères symétriques portées sur l'habitacle, aux deux extrémités d'un diamètre horizontal qui passe par l'aiguille.

La composante Q est compensée par un aimant transversal et la composante P par une paire d'aimants longitudinaux, symétriquement placés sous le compas par rapport à la verticale. On supprime ainsi l'erreur *semi-circulaire*.

L'erreur *quadrantale* est annulée par les deux sphères placées à une distance convenable et normalement au plan de symétrie du navire dans le cas habituel, ou dans une direction oblique si le coefficient E n'est pas nul, c'est-à-dire si l'erreur quadrantale est elle-même oblique. Cette dernière circonstance se présente quand le compas n'est pas dans le plan de symétrie ou que la distribution du fer à bord n'est pas symétrique. Dans ce cas, il reste aussi une erreur constante A indépendante de l'orientation du navire et qu'il suffit de déterminer une fois pour toutes, si on ne préfère la corriger par une simple rotation de l'habitacle.

Enfin un aimant vertical corrige l'erreur de *bande*.

Le réglage des corrections est facile quand le navire peut évoluer en vue de terre, ou par un ciel découvert, auquel cas il est possible de mettre le cap dans les directions qui annulent séparément les différents termes.

On doit ajouter cependant que les angles observés ne conservent pas exactement les mêmes valeurs lorsque le navire reprend sa position primitive après une révolution complète, par suite du magnétisme rémanent. C'est une nouvelle cause d'erreur, peu importante il est vrai, dont il est nécessaire de tenir compte et que nous nous bornerons à signaler.

La correction de la déviation *quadrantale* par les masses de fer doux, une fois réalisée, reste exacte sous toutes les latitudes magnétiques.

Il n'en est pas de même pour la déviation *semi-circulaire* corrigée avec des aimants. L'expérience faite en un même lieu ne permet pas de séparer, dans les coefficients B et C, le magnétisme sous-permanent de l'aimantation produite par la composante verticale de la terre. Comme cette dernière varie avec la latitude, la correction qui convient pour un lieu déterminé cesse d'être exacte à mesure qu'on s'en éloigne.

Lord Kelvin remédie à ce défaut en corrigeant la déviation *semi-circulaire* à la fois avec des aimants et avec une pièce verticale de fer doux appelée *barreau de Flinders* : on fait au départ une correction approchée et on la modifie au cours de la navigation en variant le rapport des actions du barreau et des aimants. Quand on a trouvé ainsi par tâtonnements la valeur convenable de ce rapport, la correction reste bonne pour tous les déplacements ultérieurs.

Une remarque analogue s'appliquerait à la correction de bande, mais on n'y a pas égard dans la pratique.

Lorsque la correction est complète, le compas n'est plus soumis qu'à l'action du champ terrestre. On vérifie alors, avec un aimant *déflecteur*, posé sur le couvercle du compas dans une position déterminée, que la déviation produite lorsque le déflecteur est à angle droit avec l'aiguille est indépendante de la direction du navire.

L'erreur de bande est elle-même corrigée, si l'on a $Z' = Z$, c'est-à-dire si l'inclinaison apparente déterminée à bord est égale à l'inclinaison magnétique du lieu.

Ces deux modes de vérification donnent le moyen de rétablir les corrections même en pleine mer et en supposant que l'état du ciel ne permette pas de déterminer la direction du méridien géographique par des observaiions astronomiques. Il suffit, en effet, que la déviation produite par le déflecteur soit indépendante du cap et que l'inclinaison mesurée à bord soit égale à l'inclinaison réelle que l'on connaît par la position approximative du navire.

853. Correction des observations à bord. — Pour étudier le champ magnétique terrestre sur toute la surface du globe, il

est nécessaire de faire des observations sur les navires, mais on n'obtient alors que les valeurs apparentes de la déclinaison, de l'inclinaison et du champ total, d'où l'on déduira les composantes X', Y' et Z' rapportées au navire. Le problème est particulièrement difficile avec les constructions actuelles où les masses de fer produisent de grandes perturbations.

Si le navire reste droit, les équations (6), résolues par rapport à X, Y et Z, peuvent être mises sous la forme

$$X' - X = a'X' + b'Y' + c'Z' + P',$$
$$Y' - Y = d'X' + e'Y' + f'Z' + Q',$$
$$Z' - Z = g'X' + h'Y' + k'Z' + R'.$$

Les quantités P', Q', R' sont des constantes qui dépendent du magnétisme permanent ; les coefficients a', b'..., k' ont des valeurs nouvelles qui se déduisent des précédents.

On conçoit alors que si l'on fait évoluer le navire sur place en lui donnant une série de directions dans des azimuts différents, on puisse obtenir une série d'équations qui permettent de déterminer les 12 constantes et en déduire les composantes réelles du champ terrestre. D'autres observations sur le navire penché seront, en outre, nécessaires si l'on veut aussi corriger l'erreur de bande.

Le Manuel de l'Amirauté anglais a indiqué une méthode de calcul basée sur les observations faites aux caps équidistants du compas. Dans le travail cité plus haut, M. Guyou suppose que les observations ont lieu à 8 caps magnétiques principaux, distants de 45° entre eux, ce qui donne 24 équations ; les coefficients sont alors déterminés par des formules convenablement appropriées ou par diverses constructions graphiques.

L'application de cette méthode aux observations faites par M. le lieutenant Schwerer à bord du *Dubourdieu*, dans un voyage sur l'Atlantique, a montré que la déclinaison et l'inclinaison peuvent être déterminées à moins d'un degré et le champ terrestre avec une approximation de 0,005.

QUATRIÈME PARTIE. — COMPLÉMENT.

CHAPITRE PREMIER

ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE

TRANSMISSIONS TÉLÉGRAPHIQUES

854. Caractères généraux. — Au point de vue industriel, les applications si variées de l'électricité présentent des caractères assez distincts, qui permettent de les classer en deux groupes différents.

Dans un grand nombre de cas, tels que les sonneries, les appels, les signaux de chemins de fer et les télégraphes, on se propose surtout de mettre à profit la rapidité avec laquelle les phénomènes électriques se transmettent par les conducteurs. Tout organe mis en mouvement sur la ligne absorbe évidemment un travail, mais la dépense correspondante est toujours très faible. On réduit d'ailleurs ce travail dans beaucoup de cas en utilisant l'électricité pour mettre en jeu des forces auxiliaires, par une sorte de déclic, telle que l'action d'un poids, d'un ressort, d'une pile locale.

Tous les progrès à réaliser dans ce genre d'appareils ont pour objet d'assurer la marche des organes et, quand il s'agit de transmissions télégraphiques, de réduire le temps nécessaire à la traduction de chacun des signaux, afin d'augmenter

e débit de la ligne. C'est le problème de la propagation qu'il faut alors étudier dans tous ses détails.

Une industrie entièrement différente, dont le développement s'accroît chaque année, a pour but principal, au contraire, d'utiliser l'énergie électrique sous différentes formes, dans les dépôts galvaniques, l'éclairage ou la transmission du travail à distance. Les lignes sont alors assez conductrices et assez courtes pour que les questions de propagation n'interviennent plus que pour une très faible part; on doit surtout se préoccuper de la quantité de travail utilisée et du rendement économique des machines.

855. Câbles transatlantiques — Lorsque les lignes sont très résistantes ou de grandes capacités, la propagation des phénomènes est assez lente pour que les effets d'induction restent négligeables, au moins dans une première approximation, et on peut appliquer les formules de Fourier (**166**).

On a désigné alors par α^2 le produit $\rho\gamma$ de la résistance du conducteur et de sa capacité relatives à l'unité de longueur. Si la perte latérale est nulle, l'équation différentielle qui définit le potentiel à la distance x se réduit à

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Dans ce cas, deux conducteurs se comportent de la même manière lorsque l'expression $\alpha^2 l^2 = \gamma\rho l^2$ est constante; c'est ce qu'on peut appeler la loi de similitude des circuits (**168**). Cette condition étant réalisée, si l'une des extrémités du câble communique au sol et que l'autre bout, pris pour origine, soit porté à un potentiel constant V_0, le potentiel V à la distance x de l'origine, au bout du même temps t, ne dépend que du rapport de la distance x à la longueur totale l.

Le problème est plus simple quand la propagation est assez lente pour que la ligne puisse être considérée comme un fil indéfini (**169**). En posant

$$(2) \qquad z^2 = \frac{\alpha^2 x^2}{4t} = \frac{a}{t},$$

l'équation différentielle ne renferme qu'une variable indépen-

dante z et peut s'écrire

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + 2z\frac{dV}{dz} = 0. \tag{3}$$

Le rapport φ du potentiel V au potentiel V_0 à l'origine est alors une simple fonction de z

$$\varphi = \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}dz, \tag{4}$$

et l'intensité correspondante du courant est

$$I = \frac{V_0}{\rho}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\frac{z}{x} = \frac{V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a}{t}}\,e^{-\frac{a}{t}}. \tag{5}$$

Pour une distance déterminée, la quantité a est une cons-

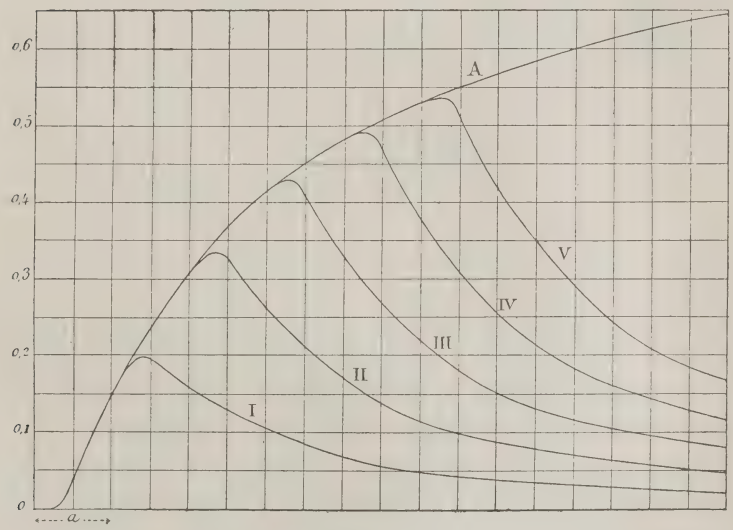


Fig. 263.

tante. La valeur de φ est d'abord nulle ; elle ne devient sensible qu'à partir de l'époque $4t = a$ et tend ensuite vers l'unité ; sa marche est figurée par la courbe A (fig. 263). Pour une même valeur de z, le courant I est en raison inverse de la dis-

tance x; il est aussi nul au début, passe par un maximum à l'époque $t_m = 2a$, proportionnelle au carré x^2 de la distance, et tend ensuite lentement vers zéro; sa marche est représentée par la courbe A de la figure 264. Ce cas particulier conduit à plusieurs conséquences pratiques.

856. Contacts momentanés. — Supposons qu'on mette l'origine du fil en relation pendant un temps très court τ avec une source à potentiel constant V_0 et que cette extrémité soit ensuite reliée avec le sol.

Comme l'équation différentielle (3) est linéaire, le potentiel

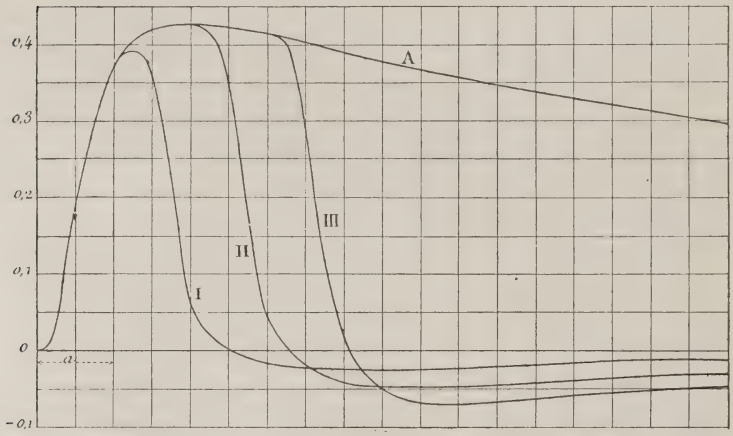


Fig. 264.

en un point quelconque s'obtiendra par la superposition de deux états, le premier dû au potentiel permanent V_0, établi au commencement du temps, le second au potentiel $-V_0$ établi à l'époque τ. Le potentiel à la distance x et à l'époque t, pour chacun des états, est une même fonction du temps écoulé depuis l'établissement à l'origine du potentiel correspondant; le potentiel résultant U est donc égal à $V(t) - V(t-\tau)$. On l'obtiendrait par une construction graphique en faisant la différence des ordonnées de deux courbes A (fig. 263) relatives aux époques t et $t-\tau$.

Les courbes I, II, III, IV et V représentent les résultats qui correspondent à des valeurs de τ respectivement égales à a,

$2a, \ldots, 5a$. Il se forme ainsi une *onde électrique* qui se transporte suivant une loi assez complexe et s'étale de plus en plus à mesure qu'elle se propage.

Si l'intervalle τ des deux contacts à la source et au sol est assez petit, on peut écrire

$$U = V(t) - V(t-\tau) = \tau \frac{\partial V}{\partial t} = \tau \frac{dV}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t},$$

ou, en tenant compte des équations (2) et (4),

$$(6) \qquad \frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{t} e^{-z^2} = \frac{\tau}{a\sqrt{\pi}} z^3 e^{-z^2}.$$

La valeur du potentiel résultant U ne dépend plus seulement de z et varie, toutes choses égales, en raison inverse du carré de la distance par la quantité a.

En un point déterminé, l'époque t_1 à laquelle se produit le maximum est définie par la condition $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ ou $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, qui donne $2z^2 = 3$, c'est-à-dire

$$t_1 = \frac{a}{z^2} = \frac{2a}{3} = \frac{t_m}{3}.$$

C'est le tiers du temps au bout duquel le courant I (fig. 264) atteint son maximum ; il correspond au point d'inflexion de courbe A (fig. 263) du potentiel pour une communication permanente avec la source. Le temps t_1 peut être considéré comme la *durée de propagation* d'une onde électrique instantanée ; il est proportionnel au coefficient $\alpha^2 = \gamma\rho$ et au carré de la distance.

Par la même raison, le courant J relatif à une communication de durée τ avec la source sera $I(t) - I(t-\tau)$ et on pourra le déterminer graphiquement. Les courbes I, II, III (fig. 264) représentent la loi des intensités en un point pour des contacts de durée a, $2a$ et $3a$. Comme la valeur de I passe par un maximum, les courants J ne tendent finalement vers zéro qu'après avoir changé de signe.

Pour une durée τ très courte, on a aussi

$$J = \tau \frac{\partial I}{\partial t} = \tau \frac{2V_0}{\rho x \sqrt{\pi}} (1 - 2z^2) e^{-z^2} \frac{\partial z}{\partial t},$$

$$(7) \qquad J = \tau \frac{V_0}{\rho a x \sqrt{\pi}} z^3 (2z^2 - 1) e^{-z^2}.$$

Ce courant est en raison inverse du produit ax, c'est-à-dire du cube de la distance. L'époque t_2 du maximum a lieu pour la condition

$$4z^4 - 12z^2 + 3 = 0, \qquad 2z^2 = 3 + \sqrt{6} = 5,45;$$

$$t_2 = \frac{2a}{5,45} = \frac{t_m}{5,45} = \frac{t_1}{1,82}.$$

La durée de propagation de l'onde devient presque moitié moindre quand on l'évalue par le maximum du courant au lieu du maximum de potentiel.

857. Contacts alternatifs. — On déterminerait encore, par une construction graphique ou par le calcul, l'onde due à la communication alternative de l'origine du fil avec des sources de potentiels $+V_0$ et $-V_0$, égaux et de signes contraires, pendant des temps égaux ou inégaux. Les courbes de la figure 265 correspondent ainsi aux potentiels produits par une série de contacts alternatifs qu'on peut résumer dans le tableau suivant :

Courbes.	Durée des contacts.		
	+	—	+
I	a	a	
II	a	a	a
III	$2a$	$2a$	
IV	$2a$	a	
V	$3a$	$2a$	
VI	$3a$	a	
VII	$3a$	$2a$	a

Par un choix convenable de ces durées de contact, on ob-

tient ainsi une onde beaucoup plus courte et le fil est ramené rapidement à l'état neutre après son passage.

Supposons que le potentiel à l'origine ait des valeurs alter-

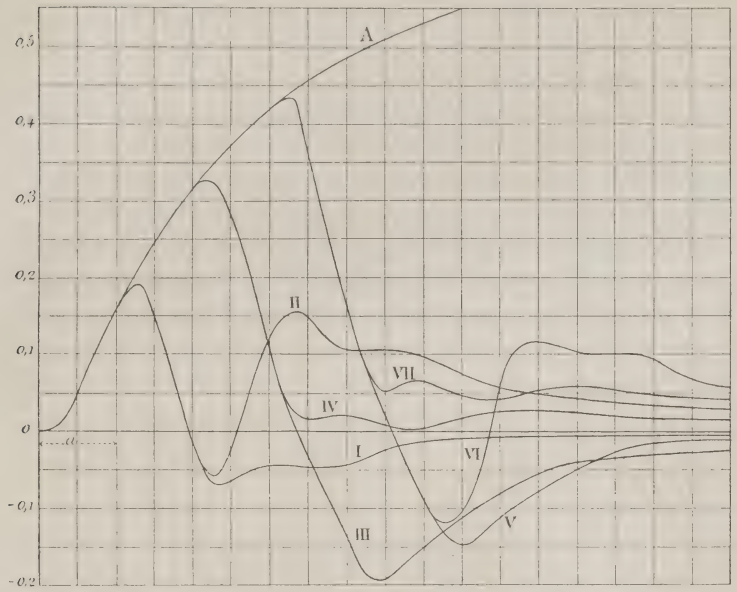


Fig. 265.

natives $+V_0$ et $-V_0$, pendant des temps très petits τ, et que l'opération soit répétée un certain nombre de fois.

Pour deux courants successifs d'ordres $2p+1$ et $2p+2$, le potentiel transmis est

$$U(t-2p\tau)-U[t-(2p+1)\tau]=\tau\frac{\partial}{\partial t}U(t-2p\tau)=\tau\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Si le nombre total des contacts est pair et égal à $2n$, le potentiel U_n à la distance x a pour expression

$$U_n=n\tau\frac{\partial U}{\partial t}=n\tau\frac{\tau V_0}{a\sqrt{\pi}}z^2(3-2z^2)e^{-z^2}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$U_n=n\tau\frac{\tau V_0}{2a^2\sqrt{\pi}}z^5(2z^2-3)e^{-z^2}. \tag{8}$$

Ce potentiel U_n est proportionnel au nombre des opérations et en raison inverse de la quatrième puissance de la distance. L'époque t_n du maximum a lieu pour la condition

$$4z^4 - 20z^2 + 15 = 0, \qquad 2z^2 = 5 + \sqrt{10} = 8,16;$$

$$t_n = \frac{2a}{8,16} = \frac{t_m}{8,16} = \frac{t_1}{2,72}.$$

Il resterait encore à traiter le problème plus général où le potentiel à l'origine varie suivant une loi quelconque, que l'on représentera par une suite de termes de la série de Fourier. On a traité déjà la question particulière d'un potentiel qui varie suivant une loi sinusoïdale (**170**), auquel cas il existe une véritable vitesse de propagation.

858. Fil limité. — Pour passer au cas d'un fil OE de longueur limitée l (fig. 266), dont l'extrémité E communique avec le

Fig. 266.

sol, considérons un fil indéfini X'X sur lequel on supposera deux séries de sources, à des distances successives égales à $2l$; les premières O_1, O_2, ... sont identiques à la source donnée qui existe au point O, et les autres O', O'', O''', ... ont la même valeur numérique changée de signe.

Toutes ces sources, O et O', O_1 et O'', ..., étant deux à deux symétriques par rapport au point E et de signes contraires, le potentiel en E sera toujours égal à zéro. De même, toutes les sources ajoutées, O_1 et O', O_2 et O'', ... sont deux à deux symétriques par rapport au point O et de signes contraires : le potentiel en ce point ne dépendra que de la source qui s'y trouve. La portion OE du fil indéfini est donc dans le même état que si elle était seule.

L'intensité du courant au point P, situé sur le fil OE à la distance x de l'origine O, est la somme algébrique des intensités qui seraient produites en ce point par toutes les sources supposées sur un fil indéfini.

Si toutes les sources sont portées au potentiel constant V_0, la portion i du courant due à la source O et pour l'époque t peut s'écrire, d'après l'équation (5),

$$i = \frac{2V_0}{\rho\sqrt{\pi}}\frac{z}{x}e^{-z^2} = \frac{V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}}e^{-z^2} = \frac{V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}}f(x).$$

Pour les sources situées à gauche, il suffira dans cette expression d'attribuer successivement à x les valeurs $x+2l$, $x+4l, \ldots x+2nl$. Les sources O′, O″, O‴, ... donneraient des courants de sens contraires aux précédentes si elles étaient au potentiel V_0, mais comme elles ont été changées de signe, les flux d'électricité qu'elles produisent sont encore de même sens; on devra donc aussi remplacer x par $2l-x\ldots, 2nl-x$. L'intensité totale I est alors

$$I = \frac{V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}}[\ldots + f(4l+x) + f(2l+x) + f(x) + f(2l-x) + f(4l-x) + \ldots)].$$

Si l'on fait $x=l$, pour considérer le phénomène à l'extrémité E du fil non isolée, l'expression se simplifie; l'intensité est double de celle que donneraient toutes les sources de gauche. La valeur de x dans z^2 devant être remplacée successivement par l, $3l$, $5l$, ..., on aura donc, en posant

$$e^{-\frac{\alpha^2 l^2}{4t}} = \rho,$$

$$(9) \qquad I = \frac{2V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}}[\rho + \rho^{3^2} + \rho^{5^2} + \rho^{7^2} + \ldots + \rho^{(2n+1)^2} + \ldots].$$

L'intensité est nulle d'abord, puisque ρ s'annule avec t; elle croît ensuite vers la valeur limite $\frac{V_0}{\rho l}$. La courbe représentée par cette série serait assez facile à calculer parce que les termes vont rapidement en décroissant lorsque ρ diffère sensiblement de l'unité.

Lord Kelvin a résolu le problème à l'aide d'une autre série plus facile à discuter qui se déduit directement de l'équation générale de Fourier (167).

D'après cette formule, l'intensité du courant à la distance x de l'origine est représentée par l'expression

$$I = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_0}{\rho l}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t}\cos\frac{n\pi}{l}x\right],$$

qui devient pour $x = l$, au point qui communique avec le sol,

$$I = \frac{V_0}{\rho l}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t}\cos n\pi\right].$$

En donnant à n les valeurs successives 1, 2, 3, ..., les cosinus prennent alternativement des valeurs égales à -1 et $+1$. On peut donc écrire, en posant

$$u = e^{-\frac{\pi^2 t}{\alpha^2 l^2}},$$

$$(10) \qquad I = \frac{V_0}{\rho l}\left[1 - 2(u - u^4 + u^9 - \ldots \mp u^{n^2}\ldots)\right] = F(t).$$

La série comprise entre parenthèses est convergente, puisque la variable u reste toujours inférieure à l'unité. Lorsque le temps t a des valeurs très petites, u tend vers l'unité et la série est égale à 0,5 ; l'intensité du courant est sensiblement nulle. A mesure que le temps augmente, u diminue ; la série tend vers zéro, de sorte que l'intensité du courant croît jusqu'à la valeur limite $\frac{V_0}{\rho l}$.

Cette série est d'ailleurs facile à calculer; elle ne diffère d'une manière appréciable de sa valeur maximum, et le courant ne devient appréciable, qu'à partir du moment où la quantité $4u$ est supérieure à 3. En appelant a' l'époque à laquelle cette valeur est atteinte, on a

$$a' = \frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2}\,\mathcal{L}.\,\frac{4}{3};$$

on peut écrire alors

$$u = e^{-\frac{\pi^2 a'}{\alpha^2 l^2}\cdot\frac{t}{a'}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{a'}}.$$

La courbe A (fig. 267) représente, en prenant a' pour unité

de temps et l'intensité finale pour unité, l'intensité du courant produite à l'extrémité du fil qui communique au sol par un potentiel constant établi à l'autre extrémité.

Pour obtenir l'intensité qui correspond à la communication du fil avec une source à potentiel constant V_0 pendant un temps τ, il suffirait encore de calculer $F(t) - F(t-\tau)$, ou de construire géométriquement la courbe dont l'ordonnée en chaque point est égale à la différence des ordonnées des deux courbes $F(t)$ et $F(t-\tau)$.

Les courbes I, II, III, IV, V, VI, VII (fig. 267), représentent ainsi les intensités qui proviennent d'une série de

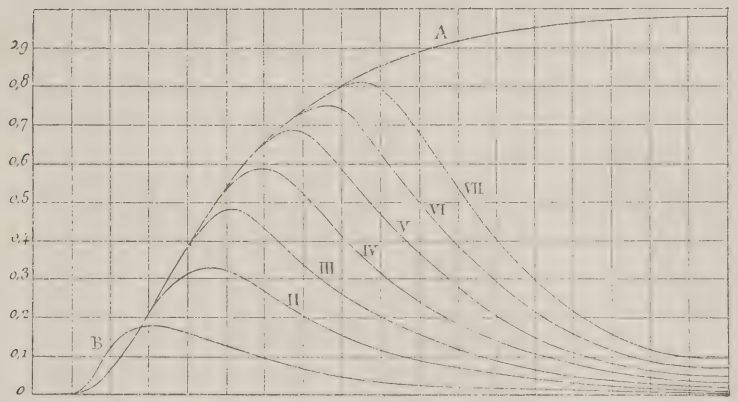


Fig. 267.

contacts différents, dont les durées sont respectivement égales à $2a'$, $3a'$....., $7a'$; le phénomène se présente encore comme une onde électrique.

Si la durée du contact est infiniment petite, l'intensité à la distance x est donnée par l'équation

$$J = \tau \frac{dF}{dt} = \tau \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dt},$$

$$J = \tau \frac{2V_0}{\rho l} \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} (u - 4u^4 + 9u^9 - \ldots \mp n^2 u^{n^2} \pm \ldots).$$

Cette intensité est représentée par la courbe B; elle est

maximum lorsqu'on a

$$1 - 16u^3 + 81u^8 \ldots \mp n^4 u n^2 - 1 \ldots = 0,$$

équation qui donne sensiblement

$$u = \left(\frac{3}{4}\right)^3, \qquad \text{ou} \qquad t = 3a'.$$

Enfin, si l'on veut réduire l'amplitude des ondes à l'arrivée et décharger le fil, on pourra encore mettre l'origine du fil alternativement à des potentiels égaux et de signes contraires, pendant des temps égaux ou inégaux, en la reliant avec l'un des pôles d'une pile.

Les courbes I, II et III de la figure 268 représentent les

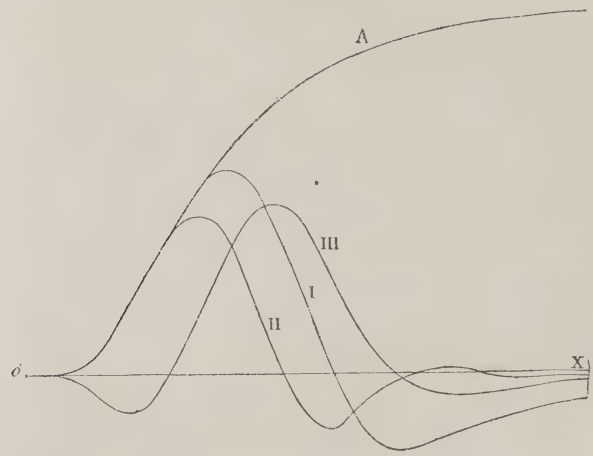


Fig. 268.

ondes d'intensité, pour une suite de contacts alternatifs dont les durées respectives sont :

	Durées des contacts.			
Courbes.	+	−	+	−
I	$4a'$	$4a'$		
II	$3a'$	$3a'$	a'	
III		a'	$4a'$	$2a'$

Sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage sur cette question, on voit quelle est la nature du problème. Lord Kelvin a fait une application célèbre de ces différentes propriétés dans la construction des appareils, galvanomètre à miroir et siphon recorder, employés pour recueillir les signaux des câbles transatlantiques, et dans l'indication des règles à suivre pour en accélérer la transmission.

859. Emploi des condensateurs. — Ajoutons encore que, dans la pratiqne, on a trouvé avantageux de maintenir le câble constamment isolé, en reliant chacune de ses extrémités avec un condensateur. La pile de charge électrise l'une des armatures du condensateur placé au poste de départ; l'autre armature, qui communique avec le câble, s'électrise en sens contraire et un flux de même signe que la source se porte sur la première armature du condensateur situé à l'autre bout. La seconde armature de ce condensateur communique avec un électromètre ou est reliée au sol par un galvanomètre.

Si le contact de la source à l'origine du câble est continu, l'électromètre tend vers une déviation maximum; la déviation du galvanomètre est d'abord croissante et s'annule ensuite, de sorte que, même pour un contact permanent, le phénomène se présente déjà sous la forme d'une onde électrique. On conçoit aisément, d'après cela, que des contacts momentanés et alternatifs, convenablement choisis, soient capables de produire des ondes plus courtes que si le fil eût été directement réuni à la pile. En outre, la charge totale du conducteur dont fait partie le câble est toujours nulle, et le système revient plus rapidement à l'état neutre.

860. Effets d'induction. — D'après la théorie qui précède, l'effet produit par l'établissement d'un potentiel V_0 à l'origine du fil, paraît se transmettre instantanément à toute distance. Il est vrai que le potentiel transmis reste quelque temps très faible et ne devient sensible qu'après un certain intervalle, mais le fait d'une vitesse de propagation infinie, si faible que soit le résultat observable, est manifestement en contradiction avec la nature des phénomènes physiques ; cette conséquence suffit pour montrer que les hypothèses doivent être considérées comme une première approximation.

On a négligé, entre autres causes, les phénomènes d'in-

duction électrodynamique. Si la ligne est formée par deux fils d'aller et de retour séparés par le même intervalle sur toute leur longueur, ou par un fil unique à distance constante du sol avec retour par la terre, le coefficient de self-induction est proportionnel à la distance totale des deux postes, et on peut désigner par λ la valeur de ce coefficient qui correspond à l'unité de longueur. La force électromotrice par unité de longueur est alors $-\frac{\partial V}{\partial x}$; en appelant I le courant relatif à la distance x, on a l'équation plus générale

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=\rho I+\lambda\frac{\partial I}{\partial t}.$$

D'autre part, la perte d'électricité $-\frac{\partial I}{\partial x}dx$ sur l'élément dx sert à l'accroissement de charge $\gamma dx\frac{\partial V}{\partial t}$ et au courant $\frac{V}{\rho'}dx$ que produit la conductibilité latérale; il en résulte

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=\gamma\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{V}{\rho'}.$$

L'élimination du courant I entre ces deux expressions conduit à l'*équation des télégraphistes :*

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\gamma\lambda\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\left(\rho\gamma+\frac{\lambda}{\rho'}\right)\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\rho}{\rho'}V.$$

Plusieurs réserves sont à faire encore, car la définition du coefficient de self-induction suppose que le courant a partout la même intensité, et on admet en outre que la capacité conserve le même sens qu'en électrostatique, c'est-à-dire qu'elle correspond à un état d'équilibre et que la distribution est uniquement superficielle; ces hypothèses sont évidemment inexactes quand il s'agit d'un état rapidement variable.

Lorsque les pertes latérales sont négligeables, l'équation se réduit à la forme plus simple

$$(10)'\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\gamma\lambda\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\rho\gamma\frac{\partial V}{\partial t}.$$

La discussion de ces équations [1] conduit à des résultats analogues à ceux qu'on a obtenus déjà pour la forme des ondes transmises, mais il existe alors une vitesse de propagation indépendante des dimensions du conducteur.

En effet, si le potentiel V et ses dérivées croissent graduellement à partir de zéro, pour un potentiel initial V_0 établi à l'origine du fil, on aura toujours, sur le front de l'onde, $V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. L'équation (10), qui devient alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \gamma\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \tag{11}$$

montre que le potentiel du front de l'onde est une fonction de $x \pm \frac{t}{\sqrt{\gamma\lambda}}$. En d'autres termes, ce front se propage avec une vitesse constante dont l'inverse est $\sqrt{\gamma\lambda}$. Or, on a vu précédemment (**410**) que le coefficient de self-induction λ, au moins pour les courants superficiels, est l'inverse de la capacité électrostatique correspondante. La vitesse de propagation du front de l'onde est donc la racine carrée du rapport des capacités de la même longueur de fil, en mesures électrostatiques et en mesures électromagnétiques, c'est-à-dire le rapport **v** des unités (**419**) ou la vitesse de la lumière. Tout se passe comme si une partie de l'électricité se mouvait avec la vitesse même de la lumière, pendant que le reste suit avec une vitesse moindre, très variable avec les conditions de la ligne. On retrouve ainsi, au moins pour le début des manifestations électriques, le même résultat que dans les expériences relatives aux oscillations hertziennes.

M. Potier [2] démontre directement cette propriété pour les courants superficiels, c'est-à-dire dans des conditions qui se rapprochent beaucoup de la pratique. Considérons un conducteur cylindrique indéfini : soit s l'abscisse d'une section droite, i le courant relatif à un élément de contour, $I = \Sigma i$ le courant total, x l'abscisse d'un point intérieur pris sur une parallèle aux génératrices.

[1] A. Vaschy, *Traité d'Électr. et de Magn.*, t. II, p. 54; 1890. — H. Poincaré, *Les Oscillations électriques*, p. 182; 1894.

[2] A. Potier, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXVIII, p. 227; 1894.

En appelant r la distance des éléments ids et dx, la force électromotrice par unité de longueur, sur la droite considérée, peut s'exprimer par la formule de Neumann ou par la variation du potentiel V, ce qui donne

$$-\frac{\partial}{\partial t}\sum\int\frac{i\,ds}{r}=\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial t}\sum\int i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)ds.$$

Or, pour chaque élément du contour, l'inverse de la distance r est une fonction de $x-s$; il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)=0,$$

$$-\int i\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds=\int i\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)ds=\left[\frac{i}{r}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int\frac{1}{r}\frac{\partial i}{\partial s}ds,$$

et le terme $\frac{i}{r}$ est nul aux deux limites.

D'autre part, si $q\,ds$ est la charge d'un élément, on a

$$ds\frac{\partial q}{dt}dt=i\,dt-\left(i+\frac{\partial i}{\partial s}ds\right)dt=-\frac{\partial i}{\partial s}ds\,dt,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial i}{\partial s}=0,$$

$$-\int\frac{1}{r}\frac{\partial i}{\partial s}ds=\int\frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial t}ds=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{q\,ds}{r},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum\int\frac{q\,ds}{r}.$$

Exprimant le potentiel électromagnétique V en fonction des masses, on en déduit finalement

$$V=\mathbf{v}^2\sum\int\frac{q\,ds}{r},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{\mathbf{v}^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

On retrouve ainsi la même vitesse de propagation **v** pour le potentiel électrique V et, par conséquent, pour le champ magnétique qui en résulte.

861. Expériences. — Il résulte de ces considérations que les tentatives faites pour mesurer la propagation de l'électricité doivent conduire à des résultats différents, suivant la méthode d'observation, la vitesse se rapprochant d'autant plus de celle de la lumière que l'on déterminera plus exactement celle qui correspond au front de l'onde.

C'est à Wheatstone [1] qu'est due la première expérience dans laquelle a été rendue manifeste la durée de la propagation des décharges d'une bouteille de Leyde. Un circuit de grande longueur, terminé par des conducteurs A et B, est interrompu en trois points *a*, *b* et *c*, les deux premiers voisins des extrémités et le troisième vers le milieu de la ligne générale; ces interruptions sont d'ailleurs rapprochées les unes des autres sur une même ligne droite verticale. Quand on relie les conducteurs A et B aux armatures d'une bouteille de Leyde chargée, des étincelles se produisent aux trois interruptions *a*, *b* et *c* du circuit. Pour vérifier si elles sont simultanées, Wheatstone a imaginé de les observer dans un miroir tournant, méthode dont on a fait depuis un si fréquent usage. Les étincelles apparaissent comme des trainées lumineuses d'une certaine longueur; les images extrêmes restent sur la même verticale, tandis que l'image intermédiaire *c* se montre manifestement en retard.

En déterminant la largeur angulaire des images, ainsi que l'écart de la troisième, et la vitesse de rotation du miroir par le son d'une carte frappée à chaque tour, on en déduit les intervalles de temps correspondants. Les conducteurs intermédiaires *ac* et *bc* étant formés par des fils de cuivre de $0^c,17$ de diamètre et 732 mètres de longueur, Wheatstone conclut de ses observations que la durée des étincelles était d'environ $\frac{1}{24000}$ de seconde, et la vitesse de propagation de 460 000 kilomètres. L'existence d'une propagation était ainsi démontrée, mais la méthode ne permettait pas d'évaluer la vitesse avec une exactitude suffisante.

[1] Ch. Wheatstone, *Phil. Trans.*, *L. R. S.*; 1835, p. 583.

Les recherches de Fizeau et Gounelle [1], relatives à la propagation des signaux dans les fils télégraphiques, reposent sur le principe célèbre de la roue dentée qui avait permis à Fizeau de mesurer la vitesse de la lumière.

Une roue en bois portait sur sa circonférence 36 divisions égales, munies de lames alternativement en platine et en bois. Des balais de platine, disposés par paires, s'appuyaient sur les divisions de manière à produire une interruption pour chaque passage sur une lame de bois.

Plusieurs paires de balais, ab, $a'b'$, $a''b''$..., formant des interrupteurs A, A′, A″,.., sont montés à différentes distances; le balai a de la première communique avec une pile, le balai b avec une ligne télégraphique qui revient au balai b' de la paire suivante, et le balai a' est finalement réuni au sol par un galvanomètre G′. Si, pendant la rotation de la roue, l'intervalle de fermeture des interrupteurs A et A′ correspond au temps que met le signal électrique à parcourir la ligne, le galvanomètre G′ sera dévié ; dans le cas contraire, l'aiguille doit rester immobile.

La meilleure disposition a été de joindre la ligne de retour à deux interrupteurs A′ et A″, les balais correspondants a' et a'' étant reliés aux cadres d'un galvanomètre différentiel. L'aiguille dévie d'un côté ou de l'autre suivant que le courant de retour passe par l'un ou l'autre des interrupteurs.

L'expérience a été faite sur la ligne de Paris à Amiens, comprenant 314 kilomètres d'un fil de fer de 4^{mm} de diamètre, et sur la ligne de Paris à Rouen, ayant 288 kilomètres, partie en fer et partie en cuivre de $2^{mm},5$ de diamètre. La propagation se traduit par des changements périodiques d'intensité d'ailleurs très différente; les courants discontinus éprouvent une sorte de *diffusion* qui en prolonge la durée au poste de retour. En admettant que la propagation soit uniforme, la vitesse a été de 100 000 kilomètres dans le fer, et 180 000 kilomètres dans le cuivre.

Cette différence pour les deux métaux peut s'expliquer par les propriétés magnétiques du fer, qui augmentent l'induction propre, et par sa plus grande résistivité.

[1] H. Fizeau et E. Gounelle, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXX, p. 437; 1850.

En tous cas, le mode d'observation ne correspond pas au front de l'onde, mais au maximum des ondes résultantes dues aux contacts successifs.

Des expériences analogues, faites aux États-Unis sur les lignes aériennes par Walker et par Gould, ont donné des vitesses beaucoup plus faibles, de 18 000 à 40 000 kilomètres par seconde; les conditions étaient très différentes et les procédés d'observation semblent avoir laissé beaucoup à désirer.

Faraday [1] a mis en évidence les causes assez complexes qui font varier, dans de si grandes proportions, la vitesse apparente de propagation.

Après avoir constaté d'abord par diverses épreuves que les câbles garnis de gutta-percha, et plongés dans le sol ou dans l'eau, ont une capacité électrique considérable, il mit à profit la ligne télégraphique souterraine de Londres à Manchester, formée de 4 fils différents, chacun d'environ 600 kilomètres. Les fils 1 et 2, 3 et 4, étant réunis à Manchester, on avait disposé, à la station de Londres, un galvanomètre G_1 à l'origine du fil 1, un autre G_2 entre les fils 2 et 3, puis un troisième G_3 entre le fil 4 et le sol.

Quand on fait communiquer l'origine A du câble avec l'un des pôles d'une pile non isolée, le courant doit parcourir les quatre fils et les trois galvanomètres avant le retour au sol. En fermant ainsi le circuit, l'aiguille du galvanomètre G_1 dévie aussitôt, celle du deuxième G_2 au bout d'une seconde environ, puis celle du troisième G_3 après deux secondes; en outre, chacune d'elles met quelque temps pour atteindre la déviation permanente.

Si on sépare l'extrémité A de la pile, l'aiguille du galvanomètre G_1 se rapproche d'abord de zéro, puis successivement celles des galvanomètres G_2 et G_3. Si on isole l'extrémité B et qu'on établisse avec la pile un contact momentané, l'aiguille du galvanomètre G_1 est d'abord déviée dans un certain sens, puis en sens contraire sous l'action du courant de retour. Les différents caractères des ondes transmises sont ainsi manifestes. Faraday et Latimer Clark ont ensuite obtenu des résultats analogues, en substituant aux galvanomètres

[1] Faraday, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. XLI, p. 123; 1854. — *Phil. Mag.* [4], t. VII, p. 396; 1854 et t. IX, p. 162; 1855.

des récepteurs chimiques basés sur les colorations produites par l'électrolyse du cyanure de potassium.

Les expériences de Wheatstone [1] sur les câbles sous-marins armés sont encore de même nature; les phénomènes observés sont dus principalement à la capacité du câble et aux pertes latérales au travers des enveloppes isolantes, sans que les effets d'induction y jouent un rôle important.

Un grand nombre d'expériences ont été faites par différents physiciens, pour déterminer l'état variable qui précède l'établissement définitif du courant, ou la forme de l'onde émise par un contact momentané, ou encore la propagation du premier effet observable.

Dans le dernier cas, la difficulté est de trouver un récepteur assez sensible pour manifester le passage du front de l'onde ou du moins d'un phénomène qui en soit très rapproché. A ce point de vue, la disposition employée par W. Siemens [2] paraît une des plus ingénieuses. Un cylindre d'acier couvert de noir de fumée est animé d'un mouvement de rotation; deux pointes métalliques P et P′ situées près de la surface sont reliées, la première par un fil court à l'armature intérieure A d'une bouteille de Leyde, la seconde à l'armature A′ d'une autre bouteille par l'intermédiaire d'un fil télégraphique. Les deux bouteilles sont isolées et réunies par leurs armatures extérieures. L'appareil étant électrisé, on le décharge en mettant au sol l'armature commune.

La décharge en P est unique et ne laisse qu'une trace sur le cylindre; la pointe P′ donne une série de traces se succédant à des intervalles plus ou moins réguliers. Cette apparence ne tient pas à l'existence d'un phénomène oscillatoire, parce que la résistance du circuit est trop grande; on peut l'expliquer en admettant que le chemin dans l'air, échauffé d'abord par le passage de la première étincelle, augmente de plus en plus et devient assez résistant pour interrompre la décharge jusqu'à ce qu'un nouvel afflux d'électricité provoque une autre étincelle. Comme la production de la première étincelle en P exige un certain potentiel explosif, le temps qui la sépare du

[1] Wheatstone, *Ph. Mag.* [4], t. X, p. 56; 1855. — *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. XLVI, p. 121; 1856.

[2] W. Siemens, *Pogg. Ann.* t. CLVIII, p. 309; 1876.

début des étincelles en P′ se rapproche d'autant plus de la durée relative à la propagation du front de l'onde, que la pointe est plus voisine du cylindre et le potentiel explosif correspondant moins élevé. Les vitesses obtenues ont varié de 202 000 à 257 000 kilomètres, pour différents fils de fer ayant de 7 à 25 kilomètres de longueur.

APPLICATIONS DIVERSES.

862. Machines électrostatiques. — Dans les appareils producteurs d'électricité statique, comme les machines à frottement ou à multiplication (**145**), le mouvement des organes fait un transport continu d'électricité entre les collecteurs. Si les pôles sont réunis entre eux par un conducteur, le jeu de la machine y entretient un courant continu, et la différence de potentiel des pôles reste très faible. Si le conducteur intermédiaire est interrompu par un excitateur, il s'y produit une série de décharges, et la différence de potentiel des pôles augmente périodiquement pour s'annuler à chaque étincelle.

La *distance explosive*, qui croît avec la différence de potentiel, n'est limitée que par la dimension des organes et la distance des collecteurs.

Le *débit* d'électricité est à peu près indépendant de la distance explosive, tant que celle-ci reste très petite par rapport à la distance explosive maximum, c'est-à-dire de quelques millimètres dans les machines ordinaires, mais il diminue ensuite assez rapidement. Toutes choses égales, le débit est proportionnel à la vitesse de rotation, ou plus exactement à l'étendue de la surface des plateaux ou cylindres qui sont utilisés par les peignes pendant l'unité de temps. Le rapport du débit à cette surface utilisée paraît plus grand pour les machines à réaction que pour les machines à frottement, et varie notablement avec la nature des verres employés.

Il est intéressant d'évaluer l'énergie électrique ainsi produite. Une machine de Holtz à deux plateaux tournants de 60^{c} de diamètre [1] a été employée pour charger une batterie dont la capacité électrostatique était de 22 500^{c}.

[1] E. Mascart, *Traité d'électricité statique*, t. II, p. 324.

Avec 7 tours de la machine, la charge de la batterie était suffisante pour provoquer une étincelle de $0^c,1$ dans un excitateur à boules de $2^c,2$ de diamètre, auquel cas le potentiel explosif est d'environ 15 unités électrostatiques (**780**).

La charge de la batterie était donc $2,25.10^4.15 = 3,375.10^5$, ce qui correspond à une production par tour de $0,482.10^5$ ou

$$\frac{0,482.10^6}{3.10^{10}} = 1,61.10^{-5} \text{ coulombs.}$$

Si la machine faisait 10 tours par seconde, le courant serait donc voisin de 0,0002 ampère ; c'est à peu près le résultat auquel on arrive en réunissant les pôles par un galvanomètre dont les fils sont convenablement isolés.

Le travail utilisé par la décharge de la batterie est

$$\frac{3,375.10^5.15}{2} = 2,53.10^6 \text{ ergs} = 0,253 \text{ joule.}$$

Le travail par tour est donc 0,036 joule. Pour une vitesse de 10 tours et en supposant la différence de potentiel constante, la puissance utilisée serait de 0,72 watt.

Toutefois le travail électrique qui correspond au jeu de la machine augmente beaucoup avec la distance explosive. Pour en avoir une idée, nous pouvons supposer que le débit reste constant et que les pôles sont écartés de manière à maintenir invariable, comme elle le serait avec des aigrettes, la différence de potentiel qui donne le maximum de distance explosive (**782**). Dans ce cas, la puissance électrique de la machine pour une vitesse de 10 tours par seconde deviendrait 23,3 fois grande ou 16,56 watts.

Ces considérations suffisent pour montrer que l'énergie utilisée par les machines électrostatiques est en réalité très petite ; on constate bien, avec les machines à réaction, que le travail nécessaire pour entretenir leur mouvement augmente quand elles sont amorcées, mais la plus grande partie du travail dépensé est absorbée dans les frottements et dans les pertes d'électricité.

863. Piles et accumulateurs. — Dans ces appareils l'énergie est empruntée aux actions chimiques. Supposons que la pile

renferme N couples identiques, de force électromotrice e et de résistance r, associés en q séries parallèles de n couples chacune; la force électromotrice de la pile est $E = ne$, et sa résistance intérieure $R_0 = \frac{nr}{q}$.

Si le courant est I, la force électromotrice aux bornes est $E' = E - IR_0$, la puissance fournie par les actions chimiques $W = EI$, la puissance utilisable à l'extérieur $U = E'I$ et le rendement u de l'appareil

$$u = \frac{U}{W} = \frac{E'}{E} = 1 - \frac{R_0 I}{E}.$$

En appelant I_0 le courant ($E = R_0 I_0$) qui correspondrait à un travail extérieur nul, on peut écrire

$$U = R_0 I(I_0 - I), \qquad u = 1 - \frac{I}{I_0} = \frac{I_0 - I}{I_0}.$$

Lorsque le courant diminue depuis le maximum I_0 jusqu'à zéro, la valeur de U augmente d'abord, pour diminuer ensuite, tandis que le rendement u croît toujours et tend vers l'unité à mesure que U tend vers zéro.

La puissance utile atteint son maximum U_m pour $I_0 = 2I$. Le rendement est alors de 50 p. 100 et on a

$$U_m = \frac{R_0 I_0^2}{4} = \frac{E^2}{4R_0} = nq\frac{e^2}{4r} = N\frac{e^2}{4r}.$$

Le maximum de puissance utilisable est proportionnel au nombre des couples, quel que soit leur arrangement.

Dans les couples usuels, la force électromotrice e atteint rarement 2 volts. La résistance r varie, au contraire, dans de larges limites; c'est avec les couples Bunsen qu'on obtient les valeurs les plus faibles, aussi les emploie-t-on toutes les fois que la pile doit fournir un travail important.

Si p désigne l'équivalent électro-chimique de l'un des corps, la quantité de ce corps mise en jeu par le courant I pendant l'unité de temps, dans chacune des séries parallèles, est égale à pI, ce qui donne, pour le temps t, $P = npIt$; l'énergie chimique correspondante est $EIt = e\frac{P}{p}$.

Cette énergie dépensée est indépendante du temps de l'opération, de la disposition des couples et de leur nombre; elle est simplement le produit de la force électromotrice de chaque couple par le nombre d'équivalents mis en jeu.

Comme chaque coulomb dégage $1^{gr},036.10^{-5}$ d'hydrogène, la quantité d'hydrogène P par seconde qui correspond à la puissance d'un kilowatt est

$$P = \frac{0^{gr},01036}{e}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{37^{gr},3}{e} \text{ par heure.}$$

On en déduira les quantités correspondantes des différents corps, pourvu que les réactions soient bien connues, mais il arrive souvent que les effets sont assez complexes. Tel est le cas de l'acide azotique qui sert comme dépolarisant dans la pile Bunsen. Le passage d'un coulomb détruit alors un équivalent ou seulement un tiers d'équivalent, suivant que l'acide est transformé en acide hypoazotique ou en bioxyde d'azote; on peut prendre comme moyenne la moitié d'un équivalent. On trouve ainsi, pour les deux couples les plus employés :

Consommation pour un kilowatt-heure.

Daniell ($e = 1^v$).		Bunsen ($e = 1^v,8$).	
Zinc	$1^k,23$	Zinc.....	$0^k,68$
Acide sulfurique.	$1^k,83$	Acide sulfurique.	$1^k,02$
Sulfate de cuivre.	$4^k,65$	Acide azotique. .	$0^k,68$

Le sulfate de zinc doit être considéré comme un produit inutilisable dans les deux cas. Il est possible, au contraire, dans le couple Daniell, de reconstituer le sulfate de cuivre avec le cuivre déposé, de sorte que la dépense se réduirait à celle de l'acide sulfurique correspondant.

On peut estimer le prix du kilogramme de ces différentes substances à $0^{fr},50$ pour le zinc et l'acide azotique et $0^{fr},10$ pour l'acide sulfurique; mais l'amalgamation nécessaire du zinc est bien près de doubler le prix du métal. Le prix du kilowatt-heure serait alors de $1^{fr},42$ avec les couples Daniell et $1^{fr},12$ avec les couples Bunsen.

Il est important de remarquer encore qu'une fraction seulement de cette énergie est utilisable à l'extérieur. Dans les conditions de travail maximum, il faudrait doubler tous les nombres qui précèdent.

La comparaison de cette dépense avec celle des machines à feu montre qu'il serait illusoire de chercher aucune économie dans l'emploi des piles comme sources d'énergie, surtout si l'on fait intervenir le travail qu'exigent les manipulations. En outre, les liquides ne peuvent plus servir utilement lorsqu'ils n'ont plus la concentration convenable, ou qu'ils sont trop chargés d'autres corps en dissolution, et il se produit toujours sur les électrodes des actions locales qui représentent une énergie dépensée sans profit; ces deux causes contribuent encore à augmenter le prix de l'énergie électrique.

Les conditions sont plus favorables pour les accumulateurs (753), puisqu'ils n'exigent aucune manipulation, après la première installation, et que les corps se reconstituent dans les différentes réactions.

Le travail demandé au courant consiste à vaincre, soit une résistance R', soit une force électromotrice E', soit les deux à la fois; la puissance utilisée est alors $R'I^2$, $E'I$ ou $R'I^2+E'I$, suivant les cas. En outre, des fils de communication de résistance R_1 sont nécessaires pour relier l'électromoteur avec les points où le travail s'effectue, de sorte que la résistance R_0 doit être remplacée par

$$R = R_0 + R_1 = \frac{nr}{q}\left(1 + R_1\frac{q}{n}\right).$$

La puissance utile $E'I + R'I^2 = (E' + IR')I$ équivaut à celle qui serait absorbée par une force électromotrice $E_1 = E' + IR'$ ou par une résistance $x = R' + \frac{E'}{I}$ simplement métallique, et l'on peut écrire

$$W = EI = (R + x)I^2,$$

$$U = EI - RI^2 = xI^2 = E_1 I,$$

$$u = \frac{U}{W} = \frac{E_1}{E} = \frac{x}{R + x}.$$

Ces équations renferment plusieurs quantités qui donnent lieu à un grand nombre de problèmes quand on laisse trois inconnues seulement, ou qu'on établit entre elles des relations quelconques, pourvu que ces relations soient compatibles avec le phénomène physique.

Le maximum de travail utile, avec rendement de 50 p. 100, correspondrait à $x = R$ ou $E = 2E_1$, mais cette condition n'est pas pratique avec les accumulateurs.

Dans le dépôt galvanique de métaux, par exemple, le travail utile se compose uniquement d'une force électromotrice à vaincre. Cette force électromotrice est très faible lorsque l'anode est formée par le métal même que l'on veut déposer sur la cathode; le métal se dissout d'un côté, se dépose de l'autre et les liqueurs conservent la même richesse. Le rendement u augmente à mesure qu'on diminue la force électromotrice E de la source. Pour obtenir un travail important sans trop de pertes, il faut réduire autant que possible la résistance de la pile et celle des communications.

Ajoutons encore que les mêmes considérations s'appliquent à un électromoteur de nature quelconque, chimique ou mécanique, qui serait caractérisé par une force électromotrice constante E et une résistance R_0.

864. Choix des conducteurs. — — Si on appelle S la section d'un conducteur et ρ sa résistivité, la perte de puissance par unité de longueur est $\frac{\rho}{S} I^2$. Deux conducteurs de métaux différents sont donc équivalents, pour le même courant, quand les sections sont proportionnelles aux résistivités. Avec le fer et le cuivre, par exemple, les sections respectives doivent être dans le rapport de 6 à 1.

Toutefois, on ne doit pas employer, dans tous les cas, les métaux les plus conducteurs et sous la plus grande section possible, parce que le prix du métal et les frais d'établissement des fils interviennent pour une part importante.

Lorsqu'il s'agit de conducteurs nus [1], les conditions les plus économiques correspondent à une densité déterminée du courant pour chaque espèce de métal.

[1] Sir W. Thomson, *Br. Ass. Rep.*; 1881, p. 526, York.

Désignons, en effet, par

P le prix de l'unité de travail dans l'électromoteur;
n le nombre de secondes par jour (86400);
f la fraction du temps total utilisée par le courant;
Q le prix de l'unité de volume du métal;
t le taux d'amortissement;
N le nombre de jours de l'année (365).

Le travail d'échauffement des conducteurs, par jour et par unité de longueur, est égal à $fn\frac{\rho}{S}I^2$ et la dépense $Pfn\frac{\rho}{S}I^2$. D'autre part, le prix du métal correspondant est QS et les frais par jour $QS\frac{t}{100N}$. Le total de la dépense D, évaluée par jour et par unité de longueur, est donc

$$D = QS\frac{t}{100N} + Pfn\frac{\rho}{S}I^2.$$

La section du conducteur qui convient pour réduire cette dépense au minimum est déterminée par la condition que la dérivée du second membre soit nulle, c'est-à-dire que les deux termes soient égaux. Dans ce cas, les frais d'amortissement égalent la dépense relative à l'énergie perdue et l'on a

$$i^2 = \frac{I^2}{S^2} = \frac{t}{100}\frac{Q}{NnP}\frac{1}{f\rho},$$

$$D^2 = 4I^2\frac{ftn}{100N}PQ\rho.$$

Pour une dépense totale minimum, la densité i du courant ne dépend donc que du choix du métal et du prix de l'énergie, tandis que la dépense relative à un même courant est indépendante de la section du fil.

Avec deux métaux différents, dont les prix par kilogramme sont respectivement K et K', les densités d et d', d'où $Q = Kd$ et $Q' = K'd'$, et les taux d'amortissement t et t', le rapport des densités i et i' du courant et celui des dépenses D et D' correspondantes sont

$$\frac{i^2}{i'^2} = \frac{Kd}{K'd'}\frac{t}{t'}\frac{\rho'}{\rho}, \qquad \frac{D^2}{D'^2} = \frac{Kd}{K'd'}\frac{t}{t'}\frac{\rho}{\rho'}.$$

On peut estimer, qu'à volume égal, le prix du cuivre vaut 10 fois le prix du fer et que sa résistivité est 6 fois moindre. En faisant $Q = 10\,Q'$, $\rho' = 6\rho$, et supposant le même l'amortissement dans les deux cas, on trouve

$$\frac{i}{i'} = 7{,}74 \qquad \text{et} \qquad \frac{D}{D'} = 1{,}29.$$

La densité du courant serait donc beaucoup plus grande avec le cuivre qu'avec le fer et la dépense un peu supérieure. On doit remarquer encore que, pour un même courant, les sections des fils sont en raison inverse des valeurs de i et de i'; le poids du fer est donc plus élevé, ce qui augmente les frais d'établissement, et le métal se détériore plus vite, ce qui obligerait à élever le taux d'amortissement. Ces considérations suffisent pour justifier le choix du cuivre. En outre, lorsque les fils sont recouverts de matières isolantes, les frais d'isolement en augmentent beaucoup la valeur et il y a tout intérêt à employer les meilleurs conducteurs.

Pour déterminer la densité du courant, il faut évaluer le prix de l'énergie. Appelant C la dépense annuelle pour un électromoteur d'un kilowatt fonctionnant d'une manière continue, ou $C.10^{-3}$ la dépense du watt, on a

$$NnP = C.10^{-3}.10^{-7} = C.10^{-10}.$$

La densité du courant la plus avantageuse devient alors

$$i^2 = \frac{t}{100} \cdot \frac{Q}{C} \cdot \frac{10^{10}}{f\rho} = \frac{t}{f\rho}\,\frac{Q}{C}\,10^8.$$

La résistivité du cuivre est environ 1600. Admettons que le prix de ce métal soit de $1^{fr},75$ le kilogramme ou $0^{fr},0156$ le centimètre cube, et que la dépense C du kilowatt soit de 300 fr. L'électromoteur étant produit par des moyens mécaniques, supposons que le courant est employé sans interruption et que l'amortissement soit de 10 p. 100; on fera alors $t = 10$, et $f = 1$, ce qui donne

$$i^2 = \frac{10}{1600} \cdot \frac{0{,}0156}{300}\,10^8 = 32{,}5 \qquad \text{et} \qquad i = 5{,}61.$$

Le courant serait donc de 56 ampères par centimètre carré, c'est-à-dire de 0,56 ampère par millimètre carré.

Ajoutons encore que ces résultats ne s'appliquent pas aux conditions habituelles, car les frais d'installation et surtout l'emploi des isolants conduisent à élever beaucoup le prix Q de l'unité de volume du métal. En outre, le facteur f est plus petit que l'unité quand le jeu des appareils n'est pas continu, circonstance qui se présente dans la plupart des cas, par exemple pour l'éclairage. En réalité on emploie dans la pratique des courants beaucoup plus denses, qui vont jusqu'à 3 ou 4 ampères par millimètre carré.

865. Éclairage par incandescence. — L'énergie calorifique du courant est alors utilisée pour porter à une température très élevée un fil de charbon placé dans le vide.

L'éclat lumineux augmente rapidement avec la température, mais il est nécessaire en pratique de maintenir l'échauffement notablement au-dessous de la température à laquelle le fil se brise ou se détériore rapidement.

Lorsque l'équilibre de température est atteint, l'énergie du courant est compensée par le rayonnement. Le rapport de la quantité de lumière émise par la lampe à l'énergie dépensée est une fonction de la température seule et ne dépend pas de la forme des filaments de charbon, à la condition qu'ils aient tous le même pouvoir émissif.

L'expérience indique, par exemple, que l'on obtient aujourd'hui de bonnes conditions de lumière et de durée avec des lampes, dites de 20 bougies, équivalant à 1,71 carcel environ, quand elles sont traversées par un courant de 0,6 ampère avec une différence de potentiel aux bornes de 100 volts ; la puissance absorbée par bougie est alors de 3 watts.

Avec la pile Bunsen (**863**), le prix du watt-heure serait $1^{fr},12.10^{-3}$ et la lampe de 20 bougies, avec un rendement de 80 p. 100, coûterait

$$\frac{60}{0,8}\,1^{fr},12.10^{-3}=0^{fr},084.$$

Les lampes à incandescence fournissent beaucoup plus de lumière, pour la même dépense d'énergie, quand on augmente la différence de potentiel V aux bornes, mais l'usure

devient très rapide. Dans des conditions voisines de la pratique [1], l'éclat est à peu près proportionnel à V^6, et l'usure proportionnelle à V^{25}.

Soit H le nombre d'heures que dure une lampe, L son intensité lumineuse et W la puissance nécessaire; on peut, d'une manière générale, admettre que ces différentes quantités sont proportionnelles à des expressions de la forme

$$L = AV^{\alpha}, \qquad H = BV^{-\beta}, \qquad W = CV^{\gamma}.$$

Appelons P le prix de la lampe et Q le prix de l'unité de travail électrique, en tenant compte des produits consommés et de l'amortissement. La dépense par heure et par unité de lumière est $p = \frac{P}{HL}$ du fait de la lampe et $q = \frac{QW}{L}$ du fait de l'électromoteur ; la dépense totale

$$p + q = \frac{P}{AB} V^{\beta-\alpha} + \frac{QC}{A} V^{\gamma-\alpha}$$

est minimum quand la dérivée du second membre par rapport à V est nulle, c'est-à-dire pour la condition

$$(\beta - \alpha)p = (\alpha - \gamma)q.$$

Le rapport de la dépense d'entretien des lampes à la dépense totale est alors

$$\frac{p}{p+q} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma},$$

L'exposant γ serait égal à 2 si la résistance du charbon était constante ; en réalité il est plus grand et on aura une limite supérieure du rapport en faisant $\gamma = 2$. Dans cette hypothèse, et avec les nombres cités plus haut, on obtient

$$\frac{p}{p+q} = \frac{6-2}{25-2} = 0,174.$$

Ce rapport est indépendant du prix de l'électromoteur, l'éclat des lampes établissant la compensation.

[1] J. A. Flemming, *Phil. mag.* [5], t. XIX, p. 368; 1885.

M. Janet [1] a proposé une méthode qui permet d'évaluer la température θ des filaments. Après avoir mesuré, à divers régimes, la force électromotrice E aux bornes de la lampe et le courant I, ce qui donne la résistance R, on traduit par une courbe la puissance $EI = f(R)$. Le courant étant supprimé quand la lampe est en pleine lumière, on traduit encore, en fonction du temps t, la courbe $R = \varphi(t)$ pendant le refroidissement. Ces deux courbes font connaître la puissance perdue à chaque instant $f(R) = \psi(t)$; la chaleur totale Q correspond à l'aire $\int \psi(t)\,dt$ depuis θ jusqu'à la température ordinaire. Si p est la masse du filament, en adoptant pour chaleur spécifique moyenne du charbon la valeur obtenue par M. Violle [2], la température θ sera donnée par l'équation

$$JQ = Jp(0{,}355 + 0{,}00006\,\theta) = \int \psi(t)\,dt.$$

866. Arc électrique. — Entre les charbons qui produisent l'arc électrique il existe une chute de potentiel variable avec les conditions et généralement comprise entre 40 et 70 volts. Edlund [3] a montré que la plus grande partie de cette chute est représentée par une force électromotrice inverse; le reste est dû à la résistance de la couche gazeuse interposée, résistance qui dépend de la longueur de l'arc, de sa température et de la largeur des charbons.

Pour des charbons de même section et un arc de longueur l, la chute totale de potentiel V serait, en désignant par a et b deux constantes, de la forme

$$V = a + bl1.$$

Toutes les expériences ultérieures ont confirmé l'existence d'un terme constant et d'un autre proportionnel à la longueur de l'arc, de sorte qu'on peut écrire $V = a + lf(I)$, mais on n'est pas d'accord sur la loi qu'il convient d'admettre pour $f(I)$. La nature des électrodes joue d'ailleurs un rôle important, aussi bien sur la force électromotrice inverse que sur la résistance propre de l'arc, laquelle diminue beaucoup quand les électrodes dégagent des vapeurs métalliques.

(1) P. Janet, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. CXXIII, p. 690; 1896.
(2) J. Violle, *C. R. de l'Acad. des sc.* t. CXX, p. 869; 1895.
(3) Edlund, *Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XIII, XIV et XV; 1868.

D'après M. Lecher [1], la valeur totale de V serait indépendante du courant et représentée par $a + bl$. En exprimant V en volts et la longueur l en centimètres, on aurait ainsi :

Électrodes.	a.	b.
Charbons horizontaux. . .	33	45
» verticaux.	35,5	57
Platine (0^c,5 diamètre). . .	28	41
Fer (0^c,55 »). . .	20	50
Argent (0^c,49 »). . .	8	60

Il semble plutôt que la fonction $f(\mathrm{I})$ est à peu près en raison inverse du courant, sans doute parce que l'arc s'élargit à mesure que le courant augmente. MM. Rowland, Duncan et Todd [2] arrivent à l'expression $f(\mathrm{I}) = b\mathrm{I}^{-0,7}$. Avec un arc de $3^{mm},18$ et des charbons ayant $9^{mm},54$ de diamètre, la chute de potentiel a varié de 65 à 46,5 volts, quand le courant passait de 3,1 à 12,75 ampères et la résistance apparente de l'arc, c'est-à-dire le quotient de la chute de potentiel par le courant, variait de 21 à 3,65 volts. Dans ce cas, la constante a était voisine de 36 volts.

Cette force électromotrice inverse paraît devoir s'expliquer par deux causes différentes, la volatilisation du charbon, qui produirait un terme indépendant de la longueur de l'arc et du courant, et un effet thermoélectrique au contact des électrodes avec les vapeurs dégagées, lequel dépend de toutes les circonstances qui modifient l'arc. On conçoit alors que les déterminations exactes présentent de grandes difficultés. La pression augmente d'ailleurs la valeur de a et n'influe pas sensiblement sur la résistance propre de l'arc.

La température est manifestement plus élevée sur l'anode, qui s'use plus rapidement et se creuse en forme de *cratère*. C'est aussi au voisinage de l'anode que la chute de potentiel est plus rapide dans l'arc, comme on le reconnaît par l'emploi de sondes en charbon.

D'après les expériences de M. Violle, la température du cratère serait constante et voisine de 3500°; elle correspon-

[1] Lecher, *Wied. Ann.*, t. XXXIII, p. 625; 1888.
[2] Rowland, Duncan et Todd, *Electr. World*, t. XXII, p. 101; 1893.

drait au phénomène physique de la volatilisation du carbone. La température de l'arc, au contraire, n'est pas limitée par des conditions analogues et augmente toujours avec l'énergie du courant. Le *four électrique*, dont M. Moissan a tiré un si grand profit, permet ainsi de fondre les substances les plus réfractaires et de produire un certain nombre de corps nouveaux, en particulier le carbure de calcium.

Pour les applications à l'éclairage, il est important que la distance des charbons soit maintenue invariable, afin que la lumière conserve une assez grande fixité. Cette condition est réalisée par construction dans les bougies Jablochkoff, mais on y arrive généralement au moyen de régulateurs, dont le jeu est commandé par le courant lui-même, qui rapprochent ou éloignent les charbons suivant les variations du courant.

L'expérience montre que ces régulateurs fonctionnent mal quand le circuit ne renferme pas une résistance assez grande, ce qui oblige quelquefois à ajouter des résistances auxiliaires et à consommer ainsi une partie du courant sans profit. On peut en rendre compte de la manière suivante. Si E est la force électromotrice de la source et R la résistance extérieure à l'arc, le courant I est donné par la relation

$$RI = E - V = E - a - lf(I).$$

Lorsque l'arc éprouve une variation de longueur dl, laquelle est toujours assez lente pour que l'on puisse négliger les effets d'induction, on a

$$R\,dI = -f(I)\,dl - lf'(I)\,dI,$$

$$dI = -\frac{f(I)}{R + lf'(I)}\,dl.$$

Les variations du courant sont trop brusques et le régulateur marche par soubresauts, dépassant chaque fois sa position d'équilibre, si la résistance R est trop faible.

Le résultat est moins simple si l'on tient compte des courants induits et le problème se complique encore lorsque l'arc est entretenu par des courants alternatifs ; le calcul du courant et de la puissance absorbée ne pourrait être abordé uti-

lement que si l'on connaissait les lois suivant lesquelles varient la force contre-électromotrice et la résistance de l'arc.

La quantité de lumière varie beaucoup avec la densité du courant et la longueur de l'arc. On peut admettre, comme donnée approximative, que l'arc produit par un courant de 15 ampères avec une chute de potentiel de 50 volts, équivaut à 100 lampes Carcel ou environ 1000 bougies. La puissance dépensée par bougie serait de $\frac{15 \times 50}{1000} = 0,75$ watt, ou quatre fois moindre qu'avec les meilleures lampes à incandescence.

La supériorité de l'arc, à ce point de vue, s'exagère beaucoup à mesure que l'on a recours à des courants plus intenses. Le prix des charbons et les manipulations nécessaires pour les remplacer interviennent d'ailleurs dans la valeur industrielle de la lumière.

La combustion par l'oxygène de l'air joue un grand rôle dans l'usure des charbons ; on obtient des résultats plus avantageux en maintenant l'arc dans des globes presque fermés, où l'afflux de l'air est ménagé de manière à enlever les gaz hydrocarbonés dont la décomposition ultérieure pourrait déposer du charbon sur les parois du verre.

MACHINES D'INDUCTION.

867. Principe des électromoteurs à induction. — Peu de temps après la découverte de Faraday, qui a été communiquée à l'Académie des sciences le 26 décembre 1831, Pixii construisait sous la direction d'Ampère [1] une machine destinée à obtenir des courants induits par la rotation d'un aimant en face d'un électro-aimant. Le courant produit dans le fil de l'électro-aimant est naturellement alternatif, mais un commutateur installé sur l'axe de rotation permettait de redresser les courants induits dans le circuit extérieur.

Cette première machine de Pixii a été modifiée de bien des manières. Clarke [2] laissant l'aimant immobile faisait tourner l'électro-aimant; Page [3] entourait l'aimant d'un fil conduc-

[1] Ampère, *Ann. de Chim. et de Phys.* [2], t. LI, p. 71; 1832.
[2] Clarke, *Phil. Mag.* [3], t. IX, p. 262; 1836.
[3] Page, *Ann. of electricity, magn. and chemistry*, t. III, p. 389; 1838-39.

teur et faisait tourner devant lui un morceau de fer doux, etc. Enfin les recherches de Masson et Bréguet [1] ont été l'origine des bobines d'induction à courants interrompus.

Depuis quelques années, ces machines sont sorties des laboratoires et ont pris une place importante dans l'industrie. On peut les diviser en deux groupes, suivant que le courant qu'elles produisent est sensiblement *uniforme*, c'est-à-dire conserve toujours le même sens avec de petites variations d'intensité, ou *non uniforme,* le courant pouvant changer de sens ou éprouver de brusques variations.

Les machines qui donnent un courant uniforme, au moins un courant de direction constante, quand on entretient leur mouvement par une force extérieure, deviennent des moteurs si on les excite par un courant extérieur.

Considérons d'abord le cas d'une machine parfaite, comme le disque de Faraday, que l'on supposera mobile dans un champ produit par le courant lui-même I. La force électromotrice d'induction E est alors proportionnelle à la vitesse, c'est-à-dire au nombre n de tours par seconde, et à une fonction $\varphi(I)$ dont la forme dépend du mode de construction ; on peut donc écrire

$$E = n\varphi(I).$$

Si la machine sert comme moteur, en l'excitant par une source de force électromotrice constante E_0 sur un circuit de résistance totale R, le courant est donné par l'équation

$$IR = E_0 - E = E_0 - n\varphi(I).$$

La puissance utile serait encore maximum (**863**) et le rendement électrique égal à 0,50 s'il était possible que le courant I fut la moitié du courant relatif au moteur en repos.

Si la machine est abandonnée à elle-même, en supposant que tous les frottements soient supprimés, la vitesse va croissant jusqu'à ce que le courant devienne nul ; la force électromotrice de la machine est alors égale à celle de la source et le rendement égal à l'unité. Le nombre maximum N de tours

[1] Masson et Breguet, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. IV, p. 129 ; 1842.

par seconde est donné par la condition $N\varphi(o) = E_0$, qui correspond à une vitesse finie ou infinie suivant la nature de la fonction $\varphi(I)$.

Lorsque la machine est employée comme électromoteur, le courant ne peut s'entretenir (**389**) que si $n\varphi(I) > IR$, et l'amorçage spontané exige que cette inégalité soit satisfaite par un courant infiniment petit.

Si le travail consommé se réduit à la chaleur dégagée dans la résistance R, l'équilibre a lieu pour un courant I_0 défini par la condition $n\varphi(I_0) = I_0 R$, qui détermine généralement une valeur finie pour I_0.

De même que dans les piles, la puissance utilisable U d'un électromoteur mécanique, abstraction faite de pertes accessoires, est l'excès $EI - RI^2$ de la puissance dépensée sur la perte qui correspond à la chaleur dégagée dans la résistance R de la machine seule. On a donc

$$U = EI - RI^2 = I[n\varphi(I) - IR],$$

et le maximum de puissance utile correspond à la condition

$$\frac{dU}{dI} = o \qquad \text{ou} \qquad n[\varphi(I) + I\varphi'(I)] = 2IR.$$

Supposons enfin deux machines parcourues par le même courant I, dont l'une sert d'électromoteur et l'autre de moteur, la première absorbant la puissance $nI\varphi(I)$ et la seconde utilisant $n_1 I\varphi_1(I)$. Le rendement a pour expression

$$u = \frac{n_1\varphi_1(I)}{n\varphi(I)};$$

il est simplement égal au rapport des vitesses lorsque la fonction $\varphi(I)$ est la même dans les deux machines.

868. Divers types de machines. — La fonction $\varphi(I)$ pourra servir à classer les différents types de machines à courant uniforme. Nous remarquerons que le produit $I\varphi(I)$ représente le travail W_1 relatif à chaque période.

1° Les machines *électrodynamiques* sont uniquement composées de fils, pour l'inducteur et l'induit, et parcourues par le

même courant. Le travail W_1 est alors proportionnel au carré du courant, d'où $\varphi(I) = CI$.

2° Dans les machines *magnétiques*, l'induction se produit par le mouvement relatif d'un circuit et d'un champ magnétique invariable. Le travail W_1 est alors proportionnel au courant, ce qui donne $\varphi(I) = A$.

3° Dans les machines *magnéto-électriques*, l'inducteur et l'induit sont des bobines renfermant du fer doux, ou des électro-aimants, les deux systèmes de fils étant traversés par un même courant, ou par des fractions déterminées du même courant. Le travail W_1 comprend différents termes : l'un CI^2 dû à l'action des deux systèmes de fils ; un autre C_1MI, relatif à l'action du fer aimanté de chacun des systèmes sur les fils de l'autre, proportionnel au magnétisme M ; un troisième C_2M^2 dû à l'action de deux systèmes d'aimants.

Si les courants sont faibles, le magnétisme M des armatures est sensiblement proportionnel au courant et on peut écrire $\varphi(I) = (C + C_1 + C_2)I$. A mesure que le courant augmente, l'intensité d'aimantation du fer tend vers un maximum ; les produits C_1M et C_2M^2 tendent à devenir des constantes C' et C'', d'où $\varphi(I) = CI + C' + \frac{C''}{I}$.

4° Enfin, on peut appeler *mixtes* des machines dans lesquelles l'inducteur est un champ magnétique invariable et l'induit un électro-aimant. Le travail W_1 comprend alors deux termes $AI + A_1M$, relatifs à l'action du champ sur le fil et sur le fer aimanté de l'induit. Pour des courants faibles, la fonction $\varphi(I)$ est encore constante et, lorsque les courants sont assez intenses pour produire le maximum d'aimantation du fer, $\varphi(I) = A + \frac{A'}{I}$.

Les machines électrodynamiques, où $E = nCI$, ne présentent pas d'intérêt pratique, parce qu'elles ne sont capables de produire un travail notable que pour des vitesses excessives. Si on les emploie comme moteurs, avec une source constante E_0, le courant est donné par l'équation

$$E_0 - nCI = IR, \qquad I = \frac{E_0}{R + nC}.$$

Dans ce cas, les effets d'induction équivalent à une résistance proportionnelle à la vitesse et le rendement est

$$u = \frac{nCI}{E_0} = \frac{nC}{R + nC} = \frac{1}{1 + \frac{R}{nC}}.$$

Abstraction faite des frottements, la vitesse irait donc en croissant sans limite.

Si la machine sert comme électromoteur, elle ne peut s'amorcer que pour la condition $nC > R$.

Pour une vitesse inférieure à la limite $nC = R$, la machine s'éteint, quel que soit le courant. Pour une vitesse supérieure, la puissance absorbée nCI^2 est plus grande que RI^2; le circuit s'échauffe, quels que soient les moyens de refroidissement, jusqu'à ce que la résistance, qui varie avec la température, satisfasse à la condition $R = nC$.

Si la machine avec son circuit est maintenue dans un bain qui égalise les températures, l'équilibre n'est possible que pour une température déterminée qui varie avec la vitesse. Le courant est défini par l'énergie calorifique Q_1 perdue pendant chaque unité de temps, laquelle dépend du mode de refroidissement; on a alors

$$I^2 = \frac{Q_1}{R} = \frac{Q_1}{nC}.$$

Certaines machines industrielles à aimants permanents peuvent être considérées comme purement magnétiques, mais elles ne sont généralement utilisées que pour des courants alternatifs. Lorsque $\varphi(I)$ est une constante, la force électromotrice d'induction est simplement proportionnelle à la vitesse et l'appareil est comparable à une pile.

La plupart des machines actuelles sont magnéto-électriques, et on les désigne souvent par le nom de *dynamos*. Le terme CI, qui correspond aux actions réciproques des courants, est très petit par rapport à ceux qui proviennent des pièces aimantées. La fonction $\varphi(I)$ est d'abord proportionnelle à I pour des courants faibles et tend à devenir constante pour des courants très intenses.

Enfin les machines anciennes sont généralement mixtes;

les courants produits sont naturellement alternatifs et l'emploi d'un commutateur, pour les redresser, ne donne que des courants fortement ondulés.

C'est surtout à M. Gramme que l'on doit les machines à courant presque uniforme; elles sont mixtes lorsque le champ est produit par des aimants ou par un courant étranger et magnéto-électriques lorsque le même courant est utilisé pour l'inducteur et l'induit.

Les résultats qui précèdent se vérifient d'une manière très approchée (1) pour les machines Gramme, par la mesure des forces électromotrices ou du rendement. Toutefois plusieurs causes contribuent à compliquer les effets.

2° Les petites variations d'intensité du courant exigent que l'on tienne compte des extra-courants qui en résultent.

2° Les phénomènes d'hystérésis dans les électro-aimants donnent lieu à une perte d'effet utile.

3° Pour les aimants eux-mêmes, il se produit des changements d'aimantation dans un sens ou dans l'autre et d'une manière inégale, suivant que les machines sont répulsives ou attractives, ce qui cause encore une perte analogue.

4° Enfin les aimants ou les armatures, et même les fils, sont le siège de courants parasites, dits *courants de Foucault*, qui les échauffent au détriment du travail utile.

On peut représenter l'influence de toutes ces réactions, au moins d'une manière approximative, en ajoutant au circuit une résistance *fictive* qui serait sensiblement proportionnelle à la vitesse de la machine.

869. Exemples. — Considérons, pour fixer les idées, un conducteur rectiligne AB (fig. 269), de longueur $2a$, mobile

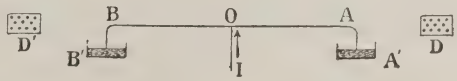


Fig. 269.

autour d'un axe vertical passant par son milieu O, et dont les extrémités recourbées plongent dans un bain de mercure

(1) Mascart et Angot, *Jour. de Phys.*, t, VII, p. 79 et 363; 1878.

annulaire A'B'; le mercure communique avec le point O par un autre conducteur et le circuit a une résistance R.

Si l'appareil n'est soumis qu'au champ terrestre et tourne d'une manière uniforme, à raison de n tours par seconde, la composante verticale Z du champ étant seule efficace, le flux de force coupé par chaque branche dans l'unité de temps est $n\pi a^2 Z$, soit pour les deux $2n\pi a^2 Z$.

Si le courant total est I, ou la moitié sur chaque branche, la puissance nécessaire pour entretenir le mouvement est $n\pi a^2 ZI$, et la force électromotrice $E = n\pi a^2 Z$. La machine rentre dans le type que nous avons appelé magnétique.

Comme la valeur de Z à Paris est environ 0,422 (G. G. S.), on a, en supposant $a = 1$ mètre $= 10^2$,

$$E = n\pi . 10^4 \times 0{,}422 = n\,1{,}33 . 10^4 = n\,1{,}33 . 10^{-4} \text{ volts.}$$

Pour obtenir un volt, la vitesse devrait être $n\,1{,}33 . 10^{-4} = 1$, ou de 7474 tours par seconde.

Le même appareil peut être transformé en machine électrodynamique. Supposons que le circuit comprenne une bobine DD', dont le plan moyen passe par le conducteur AB et dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation. L'action moyenne de la bobine sur le cercle de rayon a étant F_m pour l'unité de courant, la force électromotrice relative au courant I serait, abstraction faite du champ terrestre,

$$E = n\pi a^2 F_m I.$$

Employée comme électromoteur, la machine ne peut produire un courant que si l'on a $n\pi a^2 F_m > R$. Si la bobine renferme N spires de rayon moyen A, et qu'on prenne $F_m = \frac{2N\pi}{A}$ comme valeur approchée de l'action moyenne, il en résulte $n > \frac{RA}{2N\pi^2 a^2}$. La longueur totale du circuit est $2N\pi A$; en appelant S la section du fil et ρ sa résistivité, la résistance R est égale à $\frac{\rho}{S} 2N\pi A$, ce qui donne $n > \frac{\rho}{S} \frac{A^2}{\pi a^2}$.

Cette condition ne dépend que du rapport des carrés des

rayons A et a et, par conséquent, du rapport des surfaces correspondantes. La résistivité du cuivre est d'environ 1 600; si on emploie des fils dont la section soit de 1^{cq}, et en supposant $A^2 = 2\pi a^2$, il vient $n > 3\,200$.

870. Anneau Gramme. — Dès l'année 1860, M. Pacinotti [1] avait réalisé le principe de cet organe ingénieux, mais son invention était restée presque inconnue; M. Gramme [2] retrouva plus tard la même idée et eut le mérite de l'appliquer à la construction de véritables machines industrielles.

L'*anneau Gramme* est formé par un anneau A de fer doux (fig. 270) sur lequel un conducteur, couvert d'une enveloppe isolante, s'enroule en un circuit fermé contenant N spires. Différents points équidistants de ce conducteur sont réunis à une série de lames conductrices, ou de *touches*, isolées les unes

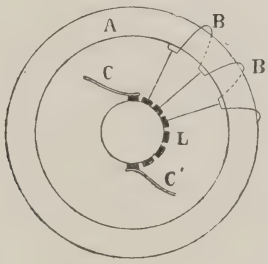


Fig. 270.

des autres et distribuées à la surface d'un cylindre L, qui constitue le *collecteur :* la bobine est ainsi partagée en un certain nombre de sections B contenant chacune une spire ou s spires. Deux balais C et C′ appuient sur des touches diamétralement opposées et forment les pôles de la machine. Si l'on fait entrer un courant I par l'un des balais C, par exemple, ce courant se partage entre les deux moitiés de la bobine pour sortir par le balai C′.

Lorsque l'anneau tourne dans un champ magnétique, une force électromotrice se produit entre les deux balais.

Soit r la résistance d'une spire. Si les balais appuient sur une touche seulement, la résistance de chaque moitié de l'an-

(1) A. Pacinotti, *Nuovo Cimento*, t. XIX, p. 378; 1864.
(2) Z. Gramme, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. LXXIII, p. 175; 1871.

neau est $\frac{Nr}{2}$ et la résistance totale $\frac{Nr}{4}$. S'ils appuient sur deux touches consécutives, une section de part et d'autre est séparée du circuit général; la résistance devient $\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2} - s\right)r$. On peut admettre que la résistance de la bobine, entre les balais, est la moyenne de celles qui correspondent aux deux cas, c'est-à-dire $(N - s)\frac{r}{4}$.

Nous supposerons d'abord que le champ extérieur est invariable, symétrique par rapport à un plan CD (fig. 271) passant par l'axe de rotation et symétrique, au signe près, par rapport au plan transversal AB, c'est-à-dire que le champ F

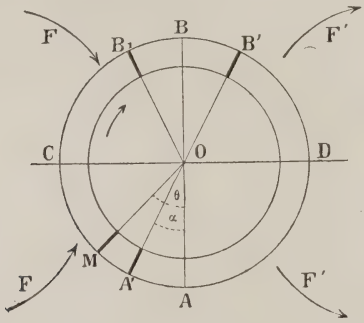


Fig. 271.

est dirigé d'un côté vers le plan transversal, et que le champ symétrique F' s'en éloigne.

L'anneau est parcouru de C en D par un flux d'induction magnétique qui se propage dans le fer; c'est l'excès du flux de force entrant par la face extérieure ABC sur celui qui va directement d'une moitié de l'anneau à l'autre par le vide intérieur. Le spectre donné par la limaille de fer montre bien cette distribution du champ.

On admettra d'abord que l'aimantation de l'anneau est la même dans le mouvement qu'à l'état de repos, c'est-à-dire qu'on néglige les effets d'hystérésis.

Nous verrons aussi que les balais, au lieu de correspondre aux sections situées dans le plan transversal, doivent être déplacés d'un certain angle α, qu'on appelle *angle de calage*,

dans le sens du mouvement ; les sections correspondantes se trouvent alors en A′ et B′.

Soit $f(\theta)$ le flux d'induction magnétique coupé par une spire qui décrit l'angle $AOM = \theta$. Le flux coupé par une spire qui va de A′ en B′, entre les contacts des balais, comprend deux parties symétriques, B_1B et BB', qui donnent des flux égaux et de signes contraires ; il ne reste, pour l'effet utile, que le flux relatif à l'angle $A'OB_1 = \pi - 2\alpha$, c'est-à-dire $f(\pi) - 2f(\alpha)$. L'induction rend le balai B′ positif, par exemple, et le balai A′ négatif ; quand la spire va ensuite de B′ en A′, l'induction en sens contraire dans la seconde moitié du chemin donne les mêmes signes respectivement aux deux balais.

Si n est le nombre de tours par seconde, la force électromotrice moyenne a pour expression

$$E = n.2N[f(\pi) - 2f(\alpha)]. \tag{1}$$

Cette quantité n'est pas absolument invariable pendant la rotation. En effet, la force électromotrice produite par une section située dans l'azimut θ est

$$s\frac{d}{dt}f(\theta) = sf'(\theta)\frac{d\theta}{dt} = 2n\pi sf'(\theta)$$

et la force électromotrice totale s'obtiendra par la somme $\Sigma f'(\theta)$ étendue à toutes les spires qui se trouvent dans l'angle $\pi - 2\alpha$. D'autre part, la résistance de la bobine induite est modifiée d'une manière périodique par le passage des balais d'une touche à la suivante.

Ces deux espèces de variations se reproduisent à chaque tour un nombre $\frac{N}{s}$ de fois ; en posant $\omega = \frac{N}{s}2n\pi$, le courant extérieur dans un circuit qui réunit les deux balais peut être représenté par une expression de la forme $I + B\sin(\omega t + \beta)$, où I et B sont des constantes. Le courant moyen I est modifié par des ondulations d'autant plus faibles que le nombre des sections ou des touches du collecteur, est plus grand. On les mettrait facilement en évidence par un téléphone installé en dérivation sur le circuit, ou placé sur un circuit secondaire qui ne traduirait que les variations du courant principal.

En réalité l'anneau reçoit une aimantation nouvelle par le courant qui l'entoure, de sorte que le champ ne conserve plus sa symétrie et prend une *torsion* particulière. Si l'on admet, d'une manière approchée, que cette aimantation se superpose à la première, elle ne modifie pas la force électromotrice, puisque la somme correspondante des flux d'induction coupés par une spire en passant d'un balai à l'autre est nulle.

D'un autre côté, le courant $\frac{I}{2}$ s'annule sur lui-même dans chaque section au passage d'un balai sur deux touches voisines; la perte qui en résulte peut être représentée par l'énergie intrinsèque (374) du courant, c'est-à-dire $\frac{l}{2}\frac{I^2}{4}$, en désignant par l le coefficient de self-induction d'une section. Comme elle a lieu aux deux balais et pour toutes les sections, la perte d'énergie par seconde est $n\frac{N}{s}2\frac{l}{2}\frac{I^2}{4} = nN\frac{lI^2}{4s}$.

Le coefficient l est proportionnel à s^2; on peut le représenter par $4\lambda s^2$ et l'effet total par $nNs\lambda I^2 = a_1 I^2$, c'est-à-dire qu'il équivaut à une résistance fictive a_1 proportionnelle à la vitesse et au nombre de spires dans chaque section [1].

Le meilleur angle de calage pour les balais est déterminé pratiquement par la condition de supprimer les étincelles ou de les réduire au minimum. Or ces étincelles se produisent quand une touche échappe au balai; la condition à réaliser est donc que cette touche et celle qui reste ensuite sous le balai soient au même potentiel.

Dans la région voisine des balais le flux d'induction relatif au courant de l'anneau est à peu près uniforme, proportionnel à l'aimantation M due au courant et de sens contraire à celui du champ. La force électromotrice est de la forme

$$e = s[f'(\theta) - kM]\frac{d\theta}{dt} = 2n\pi s[f'(\theta) - CM].$$

Si deux touches voisines sont ainsi réunies et que le courant dans la section correspondante soit arrivé au régime de l'induit, la touche qui échappe au balai n'éprouvera aucune varia-

[1] J. Joubert, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCVI, p. 641; 1883.

tion de potentiel et ne produira pas d'étincelles ; l'angle de calage α serait donc déterminé par la condition

$$e = sr\frac{I}{2} = 2n\pi s[f'(\alpha) - CM],$$

$$f'(\alpha) = CM + \frac{r}{2n\pi}\frac{I}{2}.$$

Comme le premier terme du second membre est de beaucoup le plus important, on peut dire que l'angle de calage ne dépend que du champ, par la fonction $f(\theta)$, et du courant dans l'induit par la quantité M.

Si l'aimantation est proportionnelle au courant, ou plutôt au produit NI, on peut écrire, en posant $2CM = r'NI$,

$$(2) \qquad f'(\alpha) = \frac{I}{2}\left(\frac{r}{2n\pi} + r'N\right) = \frac{I}{4n\pi}(r + 2n\pi N r').$$

A partir du point A, le flux d'induction magnétique $f(\theta)$ croît d'abord rapidement ; la fonction $f'(\theta)$ reste alors positive et tend vers zéro ; les étincelles ne sont supprimées d'une manière efficace que si l'équation (2) donne pour l'angle α une valeur comprise dans la première région.

Le circuit extérieur équivaut à une résistance x, qui représente les résistances utiles et les forces électromotrices vaincues. En désignant par a la résistance effective de l'anneau jusqu'aux balais, le courant est alors

$$I = \frac{E}{a + x} = 2nN[f(\pi) - 2f(\alpha)].$$

Ce calcul n'est qu'une première approximation, car on doit encore faire intervenir d'autres pertes d'énergie dues aux courants parasites, aux frottements, à l'hystérésis et à la réaction de l'anneau sur le champ extérieur ; ces différents effets sont sensiblement proportionnels à la vitesse et peuvent être compris dans la résistance fictive a_1.

Plusieurs méthodes expérimentales permettent de déterminer la fonction $f(\theta)$, par exemple :

1° En appliquant sur l'anneau une bobine plate (835), la dé-

charge induite donnera le flux de force normal correspondant. La même épreuve répétée sur la surface interne déterminera la partie de ce flux qui traverse la cavité de l'anneau.

2° Les extrémités d'une section étant reliées à un galvanomètre balistique, on déplace l'anneau de manière que l'azimut moyen de la section passe de l'angle θ_1 à l'angle θ_2; la décharge induite est proportionnelle à $s[f(\theta_2) - f(\theta_1)]$, ce qui donne la fonction $f(\theta)$ par accroissements successifs.

3° Les balais étant dans le plan transversal, on les relie au galvanomètre balistique. En faisant tourner l'anneau de l'angle formé par deux touches successives, la décharge induite est la même que si une seule boucle avait tourné d'une demi-circonférence; on obtient ainsi $sf(\pi)$.

4° Enfin si les balais sont décalés de l'angle α, la même opération donne $s[f(\pi) - 2f(\alpha)]$.

871. Cas particulier. — L'anneau est habituellement une sorte de cylindre creux formé par des plaques de tôle mince isolées ou par un faisceau de fils de fer circulaires. On évite ainsi, autant que possible, les courants induits qui tendent à naître sans profit dans la section méridienne.

Supposons le champ F uniforme; l'aimantation A de l'anneau, si son épaisseur est suffisante et la longueur notable, est à peu près la même que celle d'un cylindre indéfini (**276**), c'est-à-dire $\frac{k}{1 + 2\pi k}F$, ou sensiblement $2\pi A = F$, comme pour un cylindre conducteur dans un champ électrique.

Dans l'azimut θ, la densité de la couche superficielle est $\sigma = A\cos(90° - \theta) = A\sin\theta$: le champ résultant est normal à la surface et a pour expression

$$4\pi\sigma = 4\pi A\sin\theta = 2F\sin\theta,$$

ou le double de la composante normale du champ primitif.

En appelant D le diamètre et L la longueur axiale de l'anneau, il en résulte

$$f(\theta) = \int_0^\theta 4\pi\sigma . L\frac{D}{2}\,d\theta = LDF\int \sin\theta\,d\theta = LDF(1 - \cos\theta).$$

Le produit LDF est le flux de force φ_0 émis par le champ

primitif dans l'espace occupé par l'anneau. On a donc

$$f(\theta) = \varphi_0(1 - \cos\theta),$$

$$E = 2n\mathrm{N}[f(\pi) - 2f(\alpha)] = 4n\mathrm{N}\varphi_0\cos\alpha,$$

$$I = 4n\mathrm{N}\frac{\varphi_0\cos\alpha}{a+x}.$$

L'angle de calage est défini par la condition

$$\varphi_0\sin\alpha = \mathrm{CM} + \frac{r}{2n\pi}\frac{I}{2},$$

et, pour une aimantation M proportionnelle au courant,

$$\varphi_0\sin\alpha = \left(\frac{r}{2n\pi} + \mathrm{N}r'\right)\frac{I}{2}.$$

A vitesse constante, le sinus de l'angle de calage est donc proportionnel au courant et cet angle doit diminuer un peu, toutes choses égales, à mesure que la vitesse augmente.

En fonction du circuit extérieur, on aurait

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\mathrm{N}}{\pi}\frac{r + 2n\pi\mathrm{N}r'}{a+x}.$$

872. Différentes formes d'induits. — L'enroulement du fil sur l'anneau présente des difficultés pratiques, outre l'inconvénient que les parties latérales n'interviennent pas dans la production de la force électromotrice et que les fils intérieurs, nécessaires pour compléter le circuit, produisent une force électromotrice inverse; on emploie souvent d'autres dispositions, en particulier l'enroulement dit *en tambour*.

L'armature, constituée par une série de disques de fer superposés, forme un cylindre plein. Les disques sont percés d'une cavité centrale pour se monter sur l'arbre; ils portent des dentures correspondantes de manière à constituer à la surface des rainures longitudinales, ou une série de trous voisins de la circonférence, pour y loger les barres du fil induit entourées de leurs enveloppes isolantes. Ce fil forme encore

un circuit fermé ; il suit dans un certain ordre les différentes sections de la surface cylindrique, et les parties qui relient deux sections différentes, sur une des bases du tambour, communiquent aux touches du collecteur.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait 16 sections, numérotées de 1 à 16 (fig. 272). Si l'on parcourt le circuit dans un sens déterminé, tous les retours d'arrière à l'avant se font par les barres d'ordre impair, par exemple, et les chemins d'aller par les barres d'ordre pair, de sorte que les jonctions

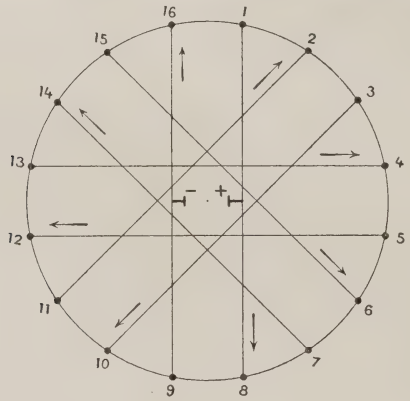


Fig. 272.

sur les bases, telles que 1 et 8, laisseront à part un nombre impair de sections. Partant de la section 1, le fil sera enroulé dans l'ordre suivant, la ligne supérieure indiquant les jonctions d'avant et la ligne inférieure celles d'arrière :

1 → 8	15 → 6	13 → 4	11 → 2	9 → 16	7 → 14	5 → 12	3 → 10	1
↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑
8 → 15	6 → 13	4 → 11	2 → 9	16 → 7	14 → 5	12 → 3	10 → 1

Si le conducteur formait un circuit fermé, parcouru par un courant dans le sens des flèches, il est clair que l'aimantation ne produirait pas de champ extérieur.

Lorsque le tambour tourne dans un champ magnétique, les barres 1 et 8, presque opposées, sont le siège de forces électromotrices contraires qui toutes deux tendent à donner le même signe à la jonction antérieure 1-8.

Si la touche correspondante est au balai positif et la tou-

che de 9-16 au balai négatif, on voit aisément que toutes les barres de 1 à 7 sont parcourues par un courant d'arrière à l'avant, conforme à l'action du champ, et toutes les autres, de 9 à 16, par un courant d'avant en arrière. On évite l'enchevêtrement des fils de jonction sur les bases par des raccords obliques en développantes de cercle.

Pour les machines puissantes, il est plus avantageux d'entourer l'induit par un nombre pair de pôles magnétiques, alternativement de signes contraires, avec un nombre égal de balais sur le collecteur. Le flux magnétique passe alors d'un pôle à l'autre par l'armature de l'induit ; entre deux balais consécutifs, le jeu des forces électromotrices est le même que pour une machine à deux pôles.

Dans la machine Desroziers, l'induit n'a pas de fer. Les fils sont disposés radialement sur un disque qui tourne entre deux couronnes d'électro-aimants ; ils sont réunis à leurs extrémités périphériques et centrales par des jonctions analogues à celles de l'enroulement en tambour, de manière que le système équivaut à un anneau Gramme.

873. Des dynamos. — Dans la plupart des cas, le champ magnétique est produit par des électroaimants et on désigne alors les machines sous le nom de *dynamos*.

Réduite à ses éléments essentiels, la machine comprend : 1° l'anneau *induit* A muni de son collecteur sur lequel appuient les balais C et C′ (fig. 273) ; 2° un *inducteur* formé par un électroaimant double BB′ dont les noyaux sont réunis par une *culasse* en fer K et terminés par des *pièces polaires* P et P′ qui embrassent une partie de l'anneau.

Si Φ_0 est le flux d'induction magnétique dans l'anneau, déduction faite du flux qui traverse le vide intérieur, le maximum de force électromotrice, pour des balais situés dans le plan transversal, serait $2nN\Phi_0$.

En réalité, par suite du déplacement des balais et de diverses causes accessoires, on n'utilise qu'une partie Φ du flux total et la force électromotrice est

$$E = 2nN\Phi.$$

La différence $\Phi_0 - \Phi$, qui tient à l'existence du courant dans l'anneau, est la *réaction d'induit*.

La force magnétomotrice dans le circuit formé par les armatures des inducteurs et de l'induit (**361**) est définie par le courant total inducteur. S'il y a m tours de fil, parcourus par i ampères, la force magnétomotrice est $4\pi mi.10^{-1}$; pour un enroulement qui contient plusieurs systèmes de courants, les ampère-tours inducteurs seraient Σmi.

Le flux d'induction Φ ne dépend que des ampère-tours inducteurs et de la distribution du fer dans le circuit magnétique. En exprimant les forces électromotrices en volts, on a

$$E = nE_1 = n2N\Phi.10^{-8} = \varphi(mi).$$

On peut traduire cette force électromotrice, en fonction des ampère-tours inducteurs, par une courbe [1] que M. Marcel Deprez appelle *caractéristique* de la machine à vitesse cons-

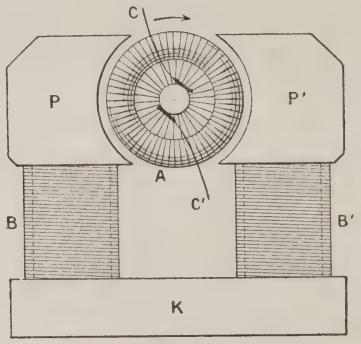


Fig. 273.

tante. La valeur de E_1 est la caractéristique ramenée à la vitesse d'un tour par seconde.

Le flux d'induction efficace Φ est d'abord proportionnel au courant inducteur, à part le magnétisme rémanent, et devient ensuite à peu près constant lorsque l'aimantation des armatures tend vers son maximum. La courbe ainsi obtenue présente quelquefois, dans l'intervalle, un changement de direction assez brusque; c'est le *coude* de la caractéristique.

La puissance nécessaire pour faire tourner la machine, abs-

[1] Hopkinson, *Mec. Engin. Instit. Proc.*; 1879, p 246 et 1880, p. 266.

traction faite des frottements, est EI. A chaque tour d'anneau, l'énergie absorbée est $W_1 = 2N\Phi I$. Le *couple moteur* est égal à $\frac{W_1}{2\pi}$; ce couple pourrait être produit par une force, de même valeur numérique, agissant à l'extrémité d'un levier de longueur égale à l'unité. M. Marcel Deprez donne encore à la quantité W_1 le nom d'*effort statique* ; c'est, en effet, la force qui donnerait le même couple avec un levier de longueur $\frac{1}{2\pi}$, correspondant à la circonférence d'unité de longueur.

L'excitation des inducteurs exige une dépense que l'on doit chercher à rendre minimum. Si l'on emploie des fils recouverts d'une couche isolante proportionnelle à leur épaisseur et occupant un volume déterminé, la puissance absorbée pour produire un même champ magnétique ne dépend que de la *densité* moyenne du courant (559) dans la section occupée par le fil; on devra donc chercher l'économie dans le choix du fer, la forme des noyaux et des pièces polaires, et le mode de distribution des courants.

Toutes choses égales, la chaleur dégagée dans les inducteurs est proportionnelle au carré du courant, tandis que l'aimantation croît plus lentement et tend vers un maximum; il y a donc un degré d'aimantation qu'il n'est pas avantageux de dépasser dans la pratique. La puissance perdue de ce chef ne dépend d'ailleurs que des ampère-tours inducteurs.

D'autre part, le champ étant déterminé, le couple moteur est proportionnel au produit NI, c'est-à-dire au courant total par unité de section de l'ensemble des fils qui entourent l'anneau, ou à la densité du courant. Là encore, en négligeant les effets de self-induction qui se manifestent au passage des balais, l'énergie calorifique correspondante ne change pas si ce produit reste le même.

Sauf une réserve relative aux phénomènes d'induction mutuelle ou de self-induction, on peut donc dire, avec M. Marcel Deprez, que l'énergie nécessaire pour obtenir une valeur déterminée du couple moteur (ou de l'effort statique), est indépendante de la résistance des fils enroulés sur les inducteurs et sur l'anneau, pourvu que le volume occupé respectivement par ces deux systèmes de fils ne change pas.

874. Caractéristiques. — Les courbes caractéristiques peuvent s'obtenir par différents procédés, en supposant d'abord que les courants inducteurs et la position des balais aient été réglés pour le régime normal.

1° Si l'on a déterminé la fonction $f(\theta)$ par les méthodes indiquées précédemment (**870**), on aura d'abord

$$\Phi = f(\pi) - 2f(\alpha).$$

2° Faisant tourner la machine, on mesure la force électromotrice E par une méthode d'opposition.

Dans ces deux cas, l'intensité du courant induit est sensiblement nulle, de sorte qu'on laisse à part les effets dus à l'aimantation de l'anneau.

3° La machine en marche produisant le courant I, on appuie sur le collecteur, dans l'azimut θ, un contact en fourche formé de deux branches maintenues par une lame isolante à la distance de deux touches consécutives, et communiquant avec un galvanomètre par un circuit de résistance g. La différence de potentiel des touches est l'excès de la force électromotrice de la section correspondante sur la chute de potentiel relative au courant normal dans la section; le courant i observé donne

$$ig = e - sr\frac{I}{2}, \qquad e = ig + sr\frac{I}{2}.$$

Partant de l'un des balais, par une suite de déplacements angulaires égaux à l'intervalle des touches, on aura ainsi par addition la force électromotrice totale.

Il est encore plus simple d'appuyer près du balai l'une des extrémités du fil du galvanomètre et de déplacer l'autre d'une manière progressive; le courant dérivé donnera la force électromotrice entre deux touches quelconques.

4° On se borne souvent à mesurer la résistance extérieure x nécessaire pour produire le courant I, en appliquant la formule simple $E = I(a + x)$. Toutefois, la résistance a de l'anneau ne peut pas être déterminée directement entre les balais sur la machine en repos, parce qu'elle comprend un terme fictif correspondant aux effets de self-induction. On éliminera

cette quantité inconnue par deux expériences faites avec des résistances extérieures différentes x et x', d'où l'on déduit

$$E = I(a+x) = I'(a+x') = \frac{II'}{I-I'}(x'-x)$$

M. Frœlich donne à la quantité Φ le nom de *magnétisme actif*. Il a trouvé que pour une excitation *directe*, le courant de l'anneau servant à exciter les inducteurs, et pour une position fixe des balais, on a sensiblement, en désignant par A et B des constantes particulières à chaque machine,

$$E_1 = \frac{I}{A+BI}.$$

Cette expression se traduit par une hyperbole passant par l'origine et ayant une asymptote horizontale.

Lorsque la machine agit comme électromoteur, le courant est, en appelant b la résistance du circuit inducteur,

$$I = \frac{nI}{(A+BI)(a+b+x)}, \qquad BI = \frac{n}{a+b+x} - A.$$

Pour que la machine puisse s'amorcer, il faut donc qu'on ait la condition $n > A(a+b+x)$.

La formule de M. Frœlich ne correspond pas assez exactement aux conditions pratiques, mais elle conduit à une conséquence intéressante.

Si le champ magnétique avait sa valeur maximum, le courant serait $I_1 = \frac{n}{B(a+b+x)}$; d'autre part, le courant I_2 capable de donner au champ une valeur moitié moindre est

$$\frac{I_2}{A+BI_2} = \frac{1}{2B}, \qquad I_2 = \frac{A}{B}.$$

Il en résulte

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{B}\left(\frac{n}{a+b+x} - A\right) = I.$$

Comme le courant I_1 ne dépend que de l'anneau et le courant I_2 de l'inducteur, le courant réel I se trouverait ainsi

exprimé par deux termes qui correspondent respectivement aux deux organes de la machine.

875. Modes d'excitation. — Dans la pratique, les dynamos servant d'électromoteurs fonctionnent à vitesse constante, par suite des organes mécaniques qui les mettent en mouvement, mais le courant extérieur doit être modifiable en raison de ses applications.

Si l'on veut, par exemple, entretenir des lampes disposées en série, le courant doit conserver la même valeur quel que soit, entre certaines limites, le nombre des organes intercalés et, par suite, la résistance du circuit. Si les lampes sont placées en dérivation entre deux conducteurs, l'addition de nouvelles lampes diminue au contraire la résistance, mais la différence de potentiel des conducteurs doit rester invariable. Le problème est alors de réaliser des machines à courant constant ou à potentiel constant.

Lorsque le courant inducteur provient d'une source étrangère, il est possible de le modifier et, avec lui, la force électromotrice de la machine, pour satisfaire à l'une ou à l'autre des conditions précédentes. Ces changements se font à la main, dans le cas de variations lentes, ou d'une manière automatique par des appareils que règle le courant utilisé.

Dans la plupart des cas, le courant inducteur est emprunté à la machine elle-même, plus ou moins directement, ce qui exige des combinaisons particulières.

Les travaux de M. Marcel Deprez [1] sur les propriétés des caractéristiques ont permis de traiter le problème par des constructions géométriques.

La courbe caractéristique E est une fonction des ampère-tours inducteurs, de l'enroulement des fils sur l'anneau et de la vitesse. Lorsque les inducteurs ne portent qu'un circuit de courant i, on peut écrire $E = \varphi(i)$.

Remarquons que si la courbe E a été obtenue pour un régime déterminé et un état de la machine, on en déduira, au moins d'une manière approximative, les valeurs relatives à d'autres enroulements et à une vitesse différente.

Les inducteurs ayant d'abord mi ampère-tours, supposons

[1] Marcel Deprez, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCII et t. XCIII; 1881.

qu'on modifie l'enroulement ; la force électromotrice reste la même pour $mi = m'i'$. L'ordonnée primitive pour le courant i convient cette fois pour le courant $i' = \frac{m}{m'} i$; on obtiendra donc la nouvelle caractéristique en altérant les abscisses dans un rapport constant, ce qui revient à changer leur échelle.

De même, si on modifie le nombre de tours et l'enroulement de l'induit, la nouvelle caractéristique E′ sera, toutes choses égales pour l'inducteur,

$$\frac{E'}{E} = \frac{n'N'}{nN}, \qquad E' = \frac{n'N'}{nN} E.$$

L'opération revient encore à multiplier les ordonnées par un facteur constant ou à changer l'échelle correspondante.

Considérons d'abord le cas d'une excitation directe, ou en *série*, l'un des balais communiquant au fil inducteur ; les pôles de la machine sont alors formés par l'autre balai et par l'extrémité opposée du fil inducteur. La caractéristique *interne* est $E = \varphi(I)$ et la force électromotrice disponible aux pôles, ou la caractéristique *externe*, est

$$e = E - (a + b)I.$$

Les différentes grandeurs étant exprimées par leurs valeurs numériques, on trace la courbe caractéristique E en fonction du courant I comme abscisse et on mène la droite L dont l'équation est $y = (a + b)I$; la caractéristique externe e a pour ordonnée en chaque point la différence des ordonnées de la courbe E et de la droite L.

Lorsque le fer de la machine est entièrement doux, la courbe E (fig. 274) part de l'origine, avec une première section OM′ presque rectiligne, et présente ensuite un coude plus ou moins marqué pour devenir à peu près constante. La caractéristique externe e, obtenue par la différence des ordonnées de la première E et de la droite L, est également rectiligne au début, passe par un maximum e_m pour I_m et devient nulle au point P_1 ; dans ce dernier cas, les pôles sont réunis directement et le courant $I_1 = OP_1$ est maximum.

Pour le courant I=OP, la puissance absorbée par la machine est W=EI=MP.OP, c'est-à-dire représentée par l'aire du rectangle PQ, et la puissance utilisée U=eI=mP.OP par l'aire du rectangle Pq. Ces deux rectangles ayant même base, le rendement est le rapport $u=\frac{m\mathrm{P}}{\mathrm{MP}}$ des ordonnées. Les courants relatifs au maximum de puissance utile ou de rendement sont, l'un supérieur et l'autre inférieur à I_m.

Si l'on trace une hyperbole équilatère H ayant pour équation xy=U, son point d'intersection S avec la courbe e déter-

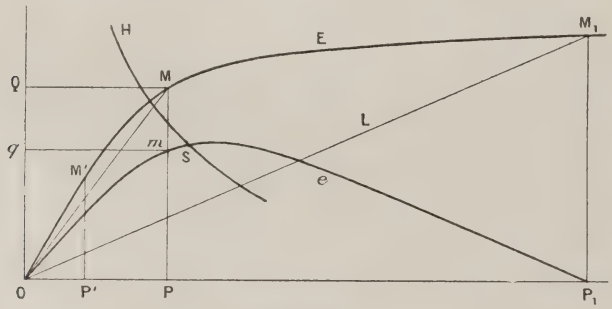


Fig. 274.

mine le courant qui est nécessaire pour obtenir une puissance utile U, ou un nombre de watts déterminé.

L'autre point d'intersection correspond à un rendement plus faible. Le tracé des *hyperboles de puissance* relatives aux différentes valeurs de U montrera, par leurs intersections, quels sont les régimes correspondants; le maximum de puissance utile est donné par l'hyperbole tangente à la courbe.

Le courant diminue toujours à mesure que la résistance extérieure x augmente, mais la force électromotrice e reste sensiblement constante au voisinage du maximum. Si le courant alimente, par exemple, des lampes montées en dérivation et qu'il soit d'abord supérieur à I_m, l'addition de nouvelles lampes fait croître en même temps le courant total et la différence de potentiel des conducteurs ; cette différence baisse lorsque le courant est inférieur à I_m.

Pour que la machine puisse s'amorcer avec une résistance extérieure x, il est nécessaire que la droite OM, dont l'équation

est $y=(a+b+x)\,I$ rencontre la courbe E. A moins de formes exceptionnelles de la caractéristique, il n'y a qu'un point d'intersection et l'équilibre est stable. Comme la première partie OM′ de la courbe est à peu près rectiligne, le courant $OP'=I'$ correspond à une valeur critique; l'amorçage exige alors la condition

$$a+b+x<\frac{OM'}{OP'}.$$

Dans une machine neuve, l'amorçage présente quelquefois des difficultés et l'on est obligé de recourir à un courant auxiliaire pour provoquer une première aimantation des inducteurs. Dès que la machine a servi, les armatures conservent un magnétisme résiduel, qui équivaut à une valeur initiale des ampère-tours inducteurs et suffit pour assurer le jeu ultérieur en fixant le sens des courants.

Pour une excitation en série, on peut donc admettre que les ampère-tours ont une valeur initiale I_0, laquelle correspond au magnétisme résiduel, ou à une aimantation primitive avec des métaux ayant une force coercitive, ou à un courant extérieur auxiliaire. Dans ce cas, la caractéristique a une valeur initiale OA (fig. 275), comme si la courbe précédente s'était

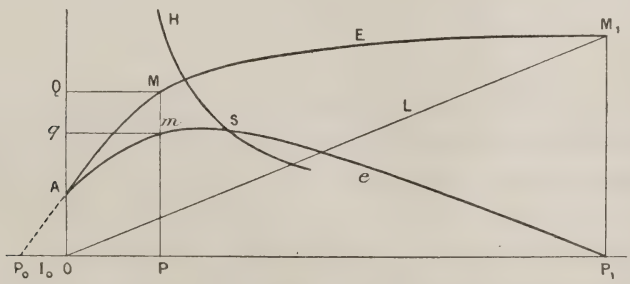


Fig. 275.

déplacée vers la gauche d'une quantité $OP_0=I_0$, et la caractéristique externe part du même point A.

Sans qu'il soit nécessaire de répéter les raisonnements, on voit que les propriétés générales sont encore représentées par les mêmes constructions sur cette nouvelle figure. La caractéristique externe *e* est alors plus tendue au voisinage

du maximum, condition avantageuse pour les applications à potentiel constant.

Un autre réglage consiste à alimenter les inducteurs par un courant pris en *dérivation* sur les balais. Le courant dans l'induit étant I, désignons par i' le courant dérivé dans les inducteurs de résistance b et par i le courant extérieur dans la résistance x. On a alors

$$\mathrm{I} = i + i', \qquad e = i'b = ix = \mathrm{I}\,\frac{bx}{b+x},$$

$$\mathrm{E} = a\mathrm{I} + e = e\,\frac{(a+b)x+ab}{bx} = \mathrm{I}\,\frac{(a+b)x+ab}{b+x};$$

$$\frac{\mathrm{E}}{e} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{x}, \qquad \frac{\mathrm{I}}{i} = 1 + \frac{x}{b};$$

$$\frac{1}{u} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{U}} = \frac{\mathrm{EI}}{ei} = 1 + 2\frac{a}{b} + \frac{a}{x} + \frac{x}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Le rendement varie avec la résistance extérieure x et le maximum u_m a lieu pour la condition

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right)},$$

$$\frac{1}{u_m} = 1 + 2\frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right)}.$$

Comme le rapport de la résistance a de l'anneau à la résistance b des inducteurs est généralement très faible, $\frac{1}{300}$ au plus, on peut écrire simplement

$$\frac{1}{u_m} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ces relations peuvent encore se traduire par une représentation graphique. Soit E la caractéristique (fig. 276), laquelle est cette fois une fonction de i', et L la droite ayant pour équation $y = (a+b)x + ab$; on a

$$\frac{i}{b} = \frac{i'}{x} = \frac{\mathrm{I}}{b+x} = \frac{\mathrm{E}}{y} = \frac{e}{bx}.$$

En prenant $OR = x$, on joint ON ; la similitude des triangles OMP et ONR montre que l'on a $E = MP$, $i' = OP$. Prenant ensuite $RR' = b$, on mène la droite OR' ; son intersection avec MP donne encore $i = PP'$. Le courant total est $I = OP + PP'$ et la force électromotrice extérieure, $e = bi'$, est simplement proportionnelle à OP. Enfin la puissance utile $U = ei = bii'$ est proportionnelle à l'aire du triangle OPP'.

Il résulte aussi de la relation

$$\frac{i}{b} = \frac{E}{y} = \frac{MP}{NR} = \frac{OM}{ON},$$

que le maximum du courant i a lieu quand la tangente au

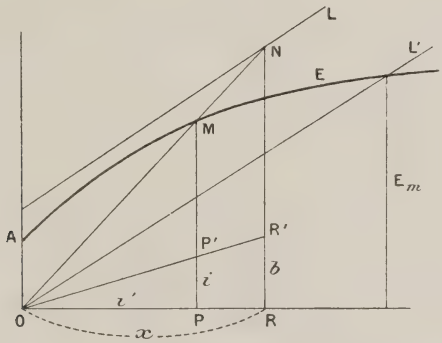


Fig. 276.

point M est parallèle à la droite L ; c'est la région de réglage pour les applications à courant constant.

Supposons que la résistance extérieure x varie de o à l'infini. La valeur de E croît de $E_0 = OA$ jusqu'à un maximum E_m que l'on obtiendra par l'intersection de la courbe avec une droite L', parallèle à L, menée de l'origine; le courant total I varie de $I_0 = \frac{E_0}{a}$ à $I_m \frac{E_m}{a+b}$, en passant par un maximum I_1 intermédiaire; la valeur de e croît de zéro à $e_m = E_m \frac{b}{a+b}$; le courant i passe de $i_0 = I_0$ à un maximum i_1, pour revenir à zéro, et le courant i varie de o à I_m.

A l'aide des constructions précédentes, on peut maintenant traduire les caractéristiques E et e en fonction de i ou

de I (fig. 277), les flèches indiquant le sens des variations à mesure que la résistance x est croissante.

Pour une valeur donnée de x, les points correspondants sont M, m, M′ et m'. La puissance absorbée $W = IE(I)$ est l'aire du rectangle P′Q, et la puissance utile $U = ie(i)$ l'aire du rectangle Pq. Enfin les intersections S et S′ d'une hyperbole de puissance H avec la courbe $e(i)$ définiraient deux régimes capables d'un nombre de watts déterminé.

En réalité on trace ces courbes en commençant par les plus grandes résistances et leurs parties supérieurs sont les seules qui conviennent à la pratique.

Ces deux combinaisons permettraient déjà d'obtenir, entre

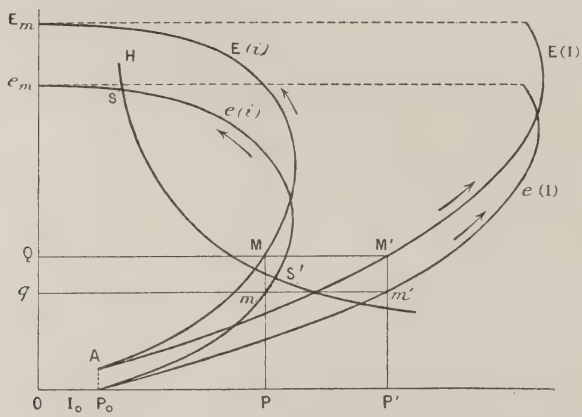


Fig. 277.

certaines limites, une différence de potentiel constante aux pôles de la machine, ou un courant constant sur le circuit extérieur, mais on a souvent recours à des enroulements de compensation appelés *mixtes* ou *compound*.

On peut d'abord former une partie des ampère-tours inducteurs par un courant auxiliaire I_0 choisi de manière à tendre la caractéristique e au voisinage du maximum.

Les inducteurs étant en série sur le circuit, comme dans le premier cas, on peut encore ajouter entre les balais une dérivation de résistance b' qui reçoit le courant i' et fait m' tours sur les inducteurs ; c'est l'excitateur en *série et dérivation*.

Le courant extérieur i traversant les m spires de l'inducteur principal, on a les relations

$$I = i + i', \qquad \frac{i'}{b+x} = \frac{i}{b'} = \frac{I}{b+b'+x},$$

et les ampère-tours inducteurs sont

$$mi + m'i' = mi\left(1 + \frac{m'}{m}\frac{b+x}{b'}\right) = m'i'\left(1 + \frac{m}{m'}\frac{b'}{b+x}\right).$$

Suivant que la caractéristique E a été déterminée par l'un ou l'autre des deux enroulements, elle sera une fonction de $i\left(1 + \frac{m'}{m}\frac{b+x}{b'}\right)$, ou de $i'\left(1 + \frac{m}{m'}\frac{b'}{b+x}\right)$. La conductance entre les balais étant $\frac{1}{b'} + \frac{1}{b+x} = \frac{b+b'+x}{b'(b+x)}$, il en résulte

$$E = I\left[a + \frac{b'(b+x)}{b+b'+x}\right] = I\,\frac{(a+b')x + a(b+b') + bb'}{b+b'+x}$$

et la différence de potentiel aux bornes de la machine est

$$e = ix = E\,\frac{b'x}{(a+b')x + a(b+b') + bb'} = \frac{b'}{a+b'}\cdot\frac{E}{1 + \dfrac{b + \dfrac{b'}{a'+b'}a}{x}}.$$

La valeur de E est une fonction de x; en posant $p = \frac{b'}{a+b'}$, quantité très voisine de l'unité, la caractéristique extérieure devient maximum, c'est-à-dire sensiblement constante, pour la condition

$$\left(1 + \frac{b+pa}{x}\right)\frac{dE}{dx} + \frac{E}{x^2}(b+pa) = 0,$$

$$\frac{x}{E}\frac{dE}{dx} = -\frac{b+pa}{x+b+pa} = -\frac{1}{1 + \dfrac{x}{b+pa}}.$$

Une troisième solution, que l'on appelle quelquefois enrou-

lement en *série et longue dérivation*, consiste à faire passer le courant principal I dans l'un des inducteurs b et à prendre la dérivation b', de courant i', entre le second balai et l'extrémité du fil b. On a alors

$$I = i + i', \qquad \frac{i'}{x} = \frac{i}{b'} = \frac{I}{b' + x},$$

$$mi + m'i' = mi\left(1 + \frac{m'}{m} \cdot \frac{x}{b'}\right) = m'i'\left(1 + \frac{m}{m'} \cdot \frac{b'}{x}\right),$$

$$E = I\left(a + b + \frac{b'x}{b' + x}\right) = I\,\frac{(a + b + b')x + (a + b)b'}{b' + x},$$

$$e = ix = E\,\frac{b'x}{(a+b+b')x + (a+b)b'} = \frac{b'}{a + b + b'}\,\frac{E}{1 + \dfrac{(a+b)b'}{(a+b+b')x}},$$

et la condition du maximum de e devient

$$\frac{x}{E}\,\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{1 + \dfrac{(a + b + b')}{(a + b)b'}\,x}$$

Le problème se résoudrait également dans les différents cas par des constructions graphiques, mais elles deviennent plus compliquées et nous n'y insisterons pas.

876. Principes de construction. — Dans un projet de machine, on se donne *a priori* la force électromotrice E évaluée en volts et le courant induit I en ampères, d'où résulte la puissance absorbée $W = EI$ en watts.

Au point de vue mécanique, la machine devra fonctionner à raison de n tours à la seconde avec une vitesse déterminée w à la circonférence, de 20 mètres par exemple; le diamètre D de l'anneau est alors $n\pi D = w$.

Supposons qu'il s'agisse d'une machine bipolaire. Pour un régime de I_0 ampères par unité de section, par exemple 400 ampères par centimètre carré, la section s des fils est $I_0 s = \frac{I}{2}$. S'il n'y a qu'une couche de fils, en tenant compte de l'épaisseur des isolants, on en déduit le nombre de spires N.

Le flux d'induction Φ se déduit de la relation

$$(3) \qquad E = 2\Phi n N . 10^{-8}.$$

En appelant R la réluctance du circuit magnétique et $N'i'$ le nombre d'ampère-tours inducteurs, on a aussi

$$(4) \qquad R\Phi = \frac{4\pi}{10} \cdot N'i'.$$

L'anneau étant cylindrique et de longueur L, les fils ou tôles qu'il contient équivalent à une épaisseur d_a, de sorte que la section est $S_a = d_a L$. Si on veut que l'induction magnétique dans le fer ait une valeur H_a, par exemple de 12000, on en déduit la longueur de l'anneau :

$$(5) \qquad \Phi = 2 S_a H_a, \qquad L = \frac{S_a}{d_a} = \frac{E.10^8}{4 n N H_a d_a}.$$

Des tables pratiques donneront la perméabilité μ_a correspondant à H_a, soit 1400 pour $H_a = 12000$. Le chemin moyen des lignes d'induction étant évalué aux deux tiers du diamètre, la réluctance de l'anneau est $\frac{2}{3} \frac{D}{2 S_a \mu_a} = \frac{D}{3 \mu_a d_a L}$.

Les machoires des inducteurs ne couvrent que les trois quarts de la circonférence de l'anneau, afin d'éviter qu'une partie importante des forces magnétiques s'échappent dans l'air d'un pôle à l'autre ou entre les pièces de fer; on reconnaît l'existence de ces pertes par le magnétisme apparent sur les différents organes de la machine. La surface de chaque entre-fer est donc $S = \frac{3}{8} \pi DL$, et l'intensité du champ

$$F = \frac{\Phi}{S} = 2 \frac{S_a}{S} H_a = \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{d_a}{D} H_a.$$

Pour que ce champ soit le tiers de l'induction dans le fer, il faut qu'on ait $16 d_a = \pi D$, c'est-à-dire que l'épaisseur de l'anneau doit être le seizième de la circonférence.

L'épaisseur e de chaque entre-fer est limitée pratiquement par celle des fils enroulés sur l'anneau et par le jeu que l'on doit laisser entre les organes. La réluctance des deux entre-fers est alors $\frac{2e}{S} = \frac{16}{3\pi} \frac{e}{DL}$.

La section moyenne S_b des pièces polaires, des noyaux et de la culasse qui les réunit est beaucoup plus grande, ce qui réduit d'autant l'induction magnétique, et on peut employer des matériaux moins perméables. En outre, le flux Φ ne traverse qu'une partie des sections, à cause du flux perdu dans la cavité de l'anneau, qui tend même à produire des courants contraires avec l'enroulement Gramme, et des forces magnétiques qui se propagent dans l'air. On peut représenter ces différentes causes en divisant la section S_b par un facteur ρ, qu'on appelle *coefficient d'Hopkinson*, et qui varie en général de 1,3 à 1,4. Si l_b est la longueur moyenne des lignes d'induction dans cette partie du circuit, la réluctance totale a pour expression

$$R = \frac{D}{3\mu_a d_a L} + \frac{16}{3\pi}\frac{e}{DL} + \rho\frac{l_b}{\mu_b S_b}.$$

A cause des valeurs très élevées de la perméabilité μ, on voit que l'entre-fer joue un grand rôle dans la réluctance.

Enfin le décalage des balais diminue encore l'effet utile; il équivaut à un certain nombre $(1-f)N$ de spires enroulées en sens contraire sur l'anneau, de sorte que les spires efficaces sont fN. Le nombre N qui entre dans les formules doit donc être moindre que celui de l'enroulement réel, par exemple les neuf dixièmes.

Connaissant la résistance a de l'anneau, par la longueur et la section du fil, on en déduit la force électromotrice $E - aI$ disponible aux balais et la perte $A = aI^2$ par échauffement.

L'équation (4) donne également les ampère-tours inducteurs $N'i'$ par les valeurs de Φ et de R; la puissance correspondante peut être représentée par $B = bI^2$ si l'induction est empruntée au courant.

L'hystérésis magnétique dans l'anneau et les courants parasites de toute nature donnent un terme analogue $C = cI^2$. La puissance totale disponible et le rendement sont donc

$$U = W - (A + B + C),$$

$$u = 1 - \frac{A + B + C}{W}.$$

Nous n'insistons pas sur les considérations mécaniques que l'on doit faire intervenir : la résistance des matériaux, la pression et le frottement sur les coussinets, les liaisons de l'arbre avec l'anneau qu'il entraîne, les précautions à prendre pour dissiper les dégagements de chaleur par ventilation, etc.

Pour les fils de l'anneau, en particulier, l'accélération centrifuge est $\gamma = 2\frac{w^2}{D}$. Si la vitesse w est de 20 mètres et le rayon de 20c, il en résulte

$$\gamma = \frac{20^2}{0,2} = 2\,000 \text{ mètres},$$

c'est-à-dire 200 fois l'accélération due à la gravité. Les frettes serrées sur l'anneau doivent permettre aux fils de résister à un effort radial de 200 fois leur poids.

Comme la plupart des organes mécaniques, les dynamos ne sont pas comparables à des figures de géométrie qui conservent toutes leurs propriétés dans des rapports constants quand on les réalise à des échelles différentes. Le projet de chaque machine doit être étudié en raison de sa grandeur absolue, de sorte que le même modèle, excellent dans certaines dimensions, pourrait devenir absolument défectueux s'il était amplifié ou réduit.

Supposons, par exemple, que l'on multiplie par p toutes les dimensions linéaires, et représentons chacune des grandeurs de machine ainsi transformée par la puissance de p qui lui est proportionnelle.

Au point de vue mécanique, il semble rationnel de donner à l'anneau une vitesse de rotation telle que la réaction centrifuge ne change pas ; nous admettrons, pour simplifier, que l'on conserve la même vitesse à la circonférence, auquel cas le nombre de tours par seconde sera p^{-1}.

La longueur des fils devient p, leur section p^2 et leur résistance p^{-1}. Pour un même courant I_0 par unité de section dans l'induit, le courant total est p^2, son carré p^4 et la perte par échauffement $p^4.p^{-1} = p^3$, ce qui donne $A' = Ap^3$. Le dégagement de chaleur reste le même par unité de volume, tandis que le rapport du refroidissement par la surface extérieure à la chaleur totale est $p^2.p^{-3} = p^{-1}$.

L'induction doit conserver la même valeur, afin d'utiliser la meilleure aimantation ; le flux d'induction devient p^2.

La réluctance du circuit magnétique, variant comme la résistance, devient p^{-1} ; le nombre des ampère-tours inducteurs est alors $p^2 p^{-1} = p$. Si l'on conserve le même enroulement, le courant est p, ou p^{-1} par unité de section, tandis qu'on avait supposé I_0 constant dans l'induit. Les liaisons de l'inducteur et de l'induit doivent donc être modifiées, si l'excitation s'emprunte au courant principal. Enfin la chaleur dégagée dans l'inducteur est $p^2 . p^{-1} = p$, ou $B' = Bp$.

La force électromotrice est proportionnelle au flux d'induction et à la vitesse angulaire, ou $p^2 . p^{-1} = p$, $E' = Ep$. Comme le courant induit est $I' = Ip^2$, la puissance absorbée dans l'anneau devient $W' = E'I' = Wp^3$; elle est constante par unité de volume. Le couple moteur est $p^3 . p = p^4$.

D'autre part, l'aimantation de l'anneau par le courant est p ; l'absorption de chaleur due à l'hystérésis et aux causes accessoires est p^2 par tour, ou p par seconde, pour chaque unité de volume, c'est-à-dire au total p^4, d'où $C' = Cp^4$.

On pourrait poursuivre ainsi la discussion des divers éléments de la machine. On voit déjà que la puissance utile et le rendement deviennent, après la transformation,

$$U' = Wp^3 - Ap^3 - Bp - Cp^4 = p^3(W - A - Bp^{-2} - Cp),$$

$$u' = 1 - \frac{A}{W} - \frac{B}{W} p^{-2} - \frac{C}{W} p = u + \frac{B}{W}(1 - p^{-2}) + \frac{C}{W}(1 - p).$$

En réalité, la puissance d'une machine bien construite est proportionnelle à son poids, quel que soit le nombre des pôles, et ses qualités doivent être indépendantes des dimensions.

COURANTS ALTERNATIFS.

877. **Alternateurs.** — On est revenu depuis quelques années à l'emploi direct des courants alternatifs que produisent les appareils à rotation continue ou à mouvement oscillatoire.

La machine Nollet, par exemple, utilisée encore pour entretenir la lumière à arc des phares électriques, porte une série

d'aimants permanents sur deux couronnes parallèles, entre lesquelles se meuvent des électro-aimants. Le flux d'induction magnétique dans chaque bobine change de signe quand elle passe d'un couple de pôles au suivant.

Si l'enroulement des induits est formé par un seul fil, on le dispose de manière que toutes les forces électromotrices s'ajoutent; les extrémités du fil communiquent à deux anneaux conducteurs sur lesquels frottent des balais pour transmettre le courant à l'extérieur. Au lieu de ce groupement en série, on peut aussi réunir les induits en dérivation, comme pour les piles, ou les combiner de différentes manières.

Dans d'autres cas, les inducteurs sont des électro-aimants excités par un courant continu d'origine étrangère. Enfin, il peut être avantageux de supprimer l'armature des induits, qui s'échauffe beaucoup par les changements d'aimantation. Pour réduire autant que possible l'entre-fer, il faut alors employer des bobines plates avec un fil enroulé sous forme de galette. Telles sont, par exemple, les machines Siemens.

Dans la machine Page, la réluctance du circuit magnétique est très inégale suivant que la barre mobile de fer doux est parallèle ou perpendiculaire à la ligne des pôles; le circuit conducteur qui entoure les pôles est le siège d'une force électromotrice alternative, sans qu'il soit alors nécessaire d'employer des balais de frottement.

Ce principe ingénieux revient en faveur. Une série d'électro-aimants sont montés en couronne sur la face intérieure d'un anneau en fonte et excités par un courant continu qui leur donne alternativement des pôles de noms contraires. Dans la cavité se meut un anneau en fer muni de dents saillantes en nombre égal à celui des électro-aimants. La réluctance des circuits magnétiques d'un pôle à l'autre varie d'un minimum à un maximum beaucoup plus grand, suivant que les dents se trouvent en face des pôles ou dans leur intervalle. Un second fil enroulé sur les électro-aimants recueille les courants induits. L'avantage manifeste de cette disposition est que les fils restent fixes et n'exigent plus de sertissage particulier ni de balais frottants; la seule partie mobile est une roue en fer, qui peut tolérer, au point de vue mécanique, des vitesses de rotation beaucoup plus grandes.

Quel que soit le mode de construction, le flux d'induction magnétique dans la surface du fil induit éprouve des variations alternatives, de période T, qui influent seules sur la production du courant.

En posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on peut représenter ces variations, au moins d'une manière approximative, par $\varphi = \Phi \cos \omega t$ et la force électromotrice (393) est

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = \Phi \omega \sin \omega t = E \sin \omega t.$$

Lorsque le circuit ne renferme pas d'autre force électromotrice variable, la résistance totale étant R et le coefficient de self-induction L, le carré de l'impédance est $a^2 = R^2 + \omega^2 L^2$ et le courant

$$i = I \sin(\omega t - \alpha) = \frac{E}{a} \sin(\omega t - \alpha),$$

La perte de phase α du courant sur la force électromotrice est définie par

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{\omega L}{\sin \alpha} = a = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

La puissance absorbée par la machine, à part celle qu'exige l'excitation des inducteurs, est

$$W = \frac{EI \cos \alpha}{2} = \frac{E^2 \cos \alpha}{2a} = \frac{E^2 R}{2a^2} = R \frac{I^2}{2}.$$

Le travail par période est WT; si chaque tour produit n périodes, le travail par tour est nTW et le couple moteur

$$\frac{nTW}{2\pi} = \frac{nW}{\omega} = \frac{n}{\omega} \frac{E^2 R}{2a^2}.$$

Supposons que la résistance R soit formée de deux parties, l'une r relative à la machine et aux communications, l'autre r' correspondant au courant utilisé; la puissance utile et le

rendement sont

$$2U = r'I^2 = E^2 \frac{r'}{(r+r')^2 + \omega^2 L^2} = \frac{E^2}{2r + r' + \frac{r^2 + \omega^2 L^2}{r'}},$$

$$u = \frac{r'}{R} = \frac{r'}{r+r'}.$$

A vitesse constante, si la résistance r' n'a pas d'induction propre, la valeur qui correspond au maximum U_m de puissance utile est déterminée par la condition $r'^2 = r^2 + L^2\omega^2$, c'est-à-dire que les deux portions du circuit ont la même impédance, et on a

$$U_m = \frac{E^2}{4\left(r + \sqrt{r^2 + L^2\omega^2}\right)}, \qquad \frac{1}{u_m} = 1 + \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}.$$

Le rendement relatif au travail maximum croît avec la vitesse et tend vers l'unité.

Avec les courants périodiques, la puissance utilisée U entre deux points A et B, sous une forme quelconque, pourra être déterminée par la méthode dite *des trois voltmètres*. Si on représente par v la chute de potentiel correspondante et par i le courant, la puissance est $U = \frac{1}{T}\int vi\,dt$, l'intégrale étant prise dans l'intervalle d'une période.

Considérons sur le circuit, entre deux points A_0 et A, une résistance r sans induction propre et soit $V = ir$ la chute de potentiel correspondante. On a

$$(V + v)^2 = (ir + v)^2 = V^2 + v^2 + 2rvi$$

et les valeurs moyennes pendant l'unité de temps donnent

$$(V + v)_m^2 - V_m^2 - v_m^2 = 2r\frac{1}{T}\int vi\,dt = 2rU.$$

Les trois termes du premier membre pourront être déterminés par des électromètres, ou des voltmètres sans induction propre sensible, qu'on intercalera respectivement entre les points A_0 et B, A_0 et A, A et B ; on en déduit la valeur de U par la résistance r.

Dans le cas où le circuit renferme un arc électrique, par exemple, le courant ne peut plus être sinusoïdal. Il est nul, ou du moins très faible, jusqu'à ce que la force électromotrice soit capable de produire l'arc ; il augmente alors pour s'annuler quand l'arc s'éteint, et reprend ensuite en sens contraire. Le courant forme ainsi une série d'ondes alternatives séparées par des intervalles de courant nul.

878. Transformateurs. — Pour subdiviser le travail fourni par les courants alternatifs, M. Jablochkoff [1] avait eu l'idée d'intercaler dans le circuit une série de condensateurs en dérivation ; l'énergie totale se distribue alors sur les différents circuits partiels. S'il n'existe pas d'induction mutuelle entre eux et que r_1, L_1, C_1 désignent les éléments de l'un des circuits, le carré de son impédance est (**395**)

$$a_1^2 = r_1^2 + \left(L_1 - \frac{1}{C_1\omega^2}\right)^2 \omega^2.$$

Dans ce cas, les amplitudes des courants dérivés (**397**) satisfont à la relation générale

$$a_1 I_1 = a_2 I_2 = \ldots a_n I_n,$$

et les valeurs correspondantes de la puissance utilisée sont dans les rapports

$$\frac{U_1}{r_1 I_1^2} = \frac{U_2}{r_2 I_2^2} \ldots, \qquad U_1 \frac{a_1^2}{r_1} = U_2 \frac{a_1^2}{r_1} = U_2 \frac{a_2^2}{r_2} = \ldots.$$

La même disposition fut ensuite appliquée au circuit secondaire d'une bobine d'induction excitée par un courant alternatif. Si l'on dispose ainsi plusieurs bobines en série sur un même courant primaire, l'énergie de chacun des courants induits est empruntée au courant primitif, par un effet latéral comparable aux dérivations de courants continus. C'est le principe des *transformateurs*, si répandus aujourd'hui dans l'industrie, et qui paraissent avoir été réalisés pour la première fois par Gaulard [2].

[1] P. Jablochkoff, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. LXXXV, p. 1098; 1877.
[2] M. Gaulard et J.-D. Gibbs, *La Lumière électrique*, t. VIII, p. 189; 1883.

Les transformateurs industriels diffèrent de la bobine d'induction ordinaire par cette circonstance importante que le circuit magnétique est entièrement formé par du fer ; ce sont, par exemple, deux noyaux cylindriques parallèles réunis par des semelles en fer, ou deux cylindres concentriques, l'un plein et l'autre creux, réunis par des plaques de fer sur leurs bases. Autour d'une partie de ce circuit on enroule N spires du courant primaire, et N′ spires du courant secondaire ; les armatures sont naturellement constituées par des fils de fer ou des lames de tôle, afin d'éviter les courants parasites dans la masse du métal.

Comme l'aimantation ne reste pas proportionnelle à la force magnétomotrice et que les effets d'hystérésis interviennent pour une part, les coefficients d'induction propre ou mutuelle ne sont pas constants et on ne peut les considérer ainsi que dans une première approximation. Les flux de force magnétique perdus sont négligeables, puisque la réluctance du circuit est très faible ; désignant par L, L' les coefficients d'induction propre du primaire et du secondaire, et par M le coefficient d'induction mutuelle, on a alors sensiblement

$$(1) \qquad \frac{L}{N^2} = \frac{L'}{N'^2} = \frac{M}{NN'}, \qquad \text{ou} \qquad LL' = M^2.$$

En appelant r et r' les résistances du primaire et du secondaire, i et i' les courants, e et e' les forces électromotrices, et Φ le flux d'induction magnétique, on a encore

$$e = ir + N\frac{d\Phi}{dt},$$

$$e' = -N'\frac{d\Phi}{dt} = i'r' = \frac{N'}{N}(ir - e).$$

La dérivée du flux Φ est proportionnelle à ω, c'est-à-dire à la fréquence du courant, et en raison inverse de la réluctance du circuit magnétique ; la quantité e est très grande par rapport à ir, ce qui donne la relation approchée

$$Ne' + N'e = 0.$$

Les forces électromotrices instantanées étant dans un rapport constant, il en est de même pour les amplitudes E′ et E; le choix des enroulements permet ainsi d'obtenir sur le secondaire une force électromotrice amplifiée ou réduite dans une proportion arbitraire.

Le problème a été traité déjà (**400**) d'une manière générale. Le rapport des amplitudes I et I′ des deux courants et celui des puissances absorbées W et W′ sur les deux circuits sont

$$\frac{I'^2}{I^2} = \frac{M^2\omega^2}{r'^2 + L'^2\omega^2} = \frac{M^2\omega^2}{a'^2},$$

$$\frac{W'}{W} = \frac{r'I'^2}{rI^2} = \frac{r'}{r}\cdot\frac{M^2\omega^2}{a'^2}.$$

Le *coefficient de transformation* f est le rapport de l'énergie recueillie sur le fil secondaire à l'énergie totale dépensée sur le transformateur, c'est-à-dire

$$f = \frac{W'}{W + W'} = \frac{r'I'^2}{rI^2 + r'I'^2} = \frac{1}{1 + \frac{r}{r'}\cdot\frac{M^2\omega^2}{a'^2}}.$$

La résistance r' du secondaire comprend en réalité deux parties distinctes, l'une b' qui correspond au transformateur et aux communications, et l'autre x sur laquelle l'énergie est utilisée. Le rendement est donc

$$u = \frac{U}{W + W'} = f\frac{U}{W'} = f\frac{x}{b' + x}.$$

Dans la pratique, la fréquence du courant est assez grande et la réluctance du circuit magnétique assez faible, pour que la résistance r' soit négligeable par rapport à la réactance $L'\omega$; on a alors, en tenant compte des relations (1) et supposant que la résistance x n'a pas d'induction propre,

$$\frac{I'}{I} = \frac{M}{L'} = \frac{N}{N'}, \qquad f = \frac{1}{1 + \frac{r}{r'}\frac{N^2}{N'^2}}.$$

Comme le coefficient de transformation est très voisin de l'unité, la dépense de l'appareil est négligeable lorsque le circuit secondaire n'est pas fermé ; il est vrai que le courant primaire a été affaibli par l'induction et qu'il reprend un régime plus élevé, mais la perte est aussi très faible.

Quelques corrections doivent être apportées au calcul pour divers motifs : on a négligé les courants induits dans le fer des armatures, l'hystérésis magnétique absorbe une partie du travail et les courants ne sont pas sinusoïdaux en toute rigueur. L'ensemble des pertes qui correspondent à toutes ces causes ne paraît pas supérieur à 2 p. 100.

879. Bobines d'induction. — La bobine d'induction est un transformateur imparfait par lequel on cherche à obtenir sur le fil induit des forces électromotrices considérables, capables de fournir de longues étincelles, de charger les batteries et de reproduire les phénomènes des machines électrostatiques. Le courant primaire est fourni par une force électromotrice constante ; les courants induits correspondent à l'ouverture ou la fermeture du circuit primaire.

Ces bobines sont formées d'un cylindre central en fils de fer sur lequel est enroulé un fil de gros diamètre qui reçoit le courant primaire, puis un fil secondaire de diamètre plus petit, qui sera le siège des courants induits, et dont les spires, convenablement isolées les unes des autres, aboutissent à deux bornes qui en forment les pôles.

Les courants induits dépendent surtout du coefficient d'induction mutuelle M. On a vu (404) que les meilleures conditions sont à peu près réalisées quand le rayon x du noyau, le rayon extérieur y du circuit primaire et le rayon extérieur z du circuit secondaire sont dans les rapports $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$; les épaisseurs $y - x$ et $z - y$ des deux bobines sont alors

$$y - x = z - y = \frac{z}{4}.$$

Si le circuit secondaire de résistance r' restait fermé, la décharge induite par la suppression ou l'établissement du courant primaire I serait égale à $\frac{MI}{r'}$ et indépendante de la du-

rée de l'état variable ; mais, lorsque le circuit secondaire est interrompu, il faut réduire autant que possible l'état variable, afin d'augmenter la force électromotrice pour franchir par une étincelle la distance qui sépare les pôles.

On voit déjà que le résultat sera meilleur à la rupture qu'à l'établissement du courant principal. Toutefois, comme le coefficient L est aussi très grand, l'extra courant de rupture produit une forte étincelle qui a pour résultat d'augmenter la durée de variation du courant inducteur et de diminuer la force électromotrice induite.

Un premier perfectionnement, dû à Foucault [1], consiste à remplacer les interrupteurs métalliques par une pointe de platine qui plonge dans une couche de mercure recouverte d'eau ou d'alcool. L'étincelle est plus courte, car le liquide condense rapidement les vapeurs métalliques qui facilitent le passage de l'extra-courant.

Un progrès plus important avait été réalisé par Fizeau [2]. Les extrémités du circuit principal, situées de part et d'autre du point où se fait l'interruption, communiquent séparément avec les armatures d'un condensateur. On diminue ainsi la différence de potentiel des deux points de rupture, parce que l'électricité produite par l'extra-courant trouve à s'écouler dans le condensateur. Ce condensateur se décharge ensuite au moment où l'on rétablit le contact, de sorte qu'en augmentant de plus en plus sa capacité, on diminue toujours les étincelles de rupture, mais on finit par exagérer celles de fermeture. Entre ces deux extrêmes, l'expérience indique quelle est la capacité qui donne les meilleurs résultats.

Enfin les spires du fil secondaire sont habituellement disposées par couches successives occupant toute la longueur de la bobine et séparées les unes des autres par des feuilles isolantes. Pour les bobines de grandes dimensions, cette disposition présente l'inconvénient que les spires voisines de deux couches consécutives sont séparées par une grande longueur de fil induit ; il existe donc entre elles une grande différence de potentiel, capable de percer la couche isolante ou au moins

[1] L. Foucault, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XLII, p. 215; 1856.
[2] H. Fizeau, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXXVI, p. 418; 1853.

de provoquer des pertes d'électricité. On doit à Poggendorff [1] l'idée de *cloisonner* les bobines, c'est-à-dire de disposer le fil secondaire dans une série de loges successives séparées les unes des autres par des lames isolantes perpendiculaires à l'axe de la bobine. Le potentiel du fil secondaire va ainsi en croissant d'une extrémité à l'autre de la bobine, sans qu'une différence de potentiel trop grande existe entre deux couches voisines d'une même loge.

Lorsqu'on fait communiquer les extrémités du fil secondaire avec les armatures d'un condensateur, la différence de potentiel maximum diminue, puisque l'on augmente la capacité du fil induit, mais cette communication équivaut à la fermeture du circuit par un conducteur et la décharge induite est plus grande. Si les pôles sont séparés par une distance assez faible pour qu'une étincelle puisse la franchir, la quantité d'électricité correspondante croît avec la capacité du condensateur. La distance explosive étant portée au maximum dans chaque cas, l'énergie correspondante augmente également à mesure que cette distance diminue.

Si l'on veut que la distance explosive ne diminue pas beaucoup par l'introduction d'un condensateur, il faut que sa capacité soit assez faible et qu'il soit construit de manière à supporter une grande différence de potentiel. L'emploi de batteries ou de bouteilles de Leyde en cascade donne alors des faisceaux d'étincelles d'un bruit très éclatant [2].

Il est assez difficile d'expliquer par la théorie tous les effets d'une bobine d'induction, parce que l'étincelle de rupture introduit dans le circuit principal une résistance très variable qui joue le rôle le plus important dans le caractère de la décharge. On peut se faire une idée du jeu de l'appareil en supposant que les deux circuits restent fermés et que la bobine sert comme transformateur, avec une force électromotrice sinusoïdale de très courte période dans le circuit primaire.

Les amplitudes I et I′ des courants primaire et secondaire donnent alors

$$\frac{I'}{I} = \frac{M}{L'} = \frac{N}{N'}.$$

(1) Poggendorff. *Pogg. Ann.*, t. XCIV, p. 289; 1850.
(2) A Cazin, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t LVI, p. 307; 1863

Le rapport des volumes U et U′ occupés par les fils est

$$\frac{U'}{U} = \frac{z^2 - y^2}{y^2 - x^2} = \frac{16 - 9}{9 - 4} = \frac{7}{5}.$$

Si les épaisseurs de la couche isolante sont proportionnelles aux diamètres d et d' des fils, on a aussi (557)

$$\frac{U'}{U} = \frac{N' d'^2}{N d^2} = \frac{7}{5}.$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{U'}{U}\left(\frac{d}{d'}\right)^4 = \frac{5}{7}\left(\frac{N'}{N}\right)^2,$$

$$\frac{r' I'}{r I} = \frac{5}{7}\frac{N'}{N}.$$

Pour un même enroulement primaire et un même courant d'excitation, on voit que l'amplitude $r'I'$ de la force électromotrice induite est proportionnelle au nombre de spires de l'enroulement secondaire.

Le rapport des énergies dégagées sur les circuits secondaire et primaire est alors

$$\frac{r' I'^2}{r I^2} = \frac{5}{7}.$$

880. Propriétés diverses. — 1° On peut connaître à chaque instant la force électromotrice entre deux points A et B d'un circuit en les reliant avec les quadrants d'un électromètre par un commutateur à contacts instantanés de même période que le courant (650). En modifiant d'une manière graduelle la différence de phase du commutateur et du courant, on déterminera ainsi la forme des chutes de potentiel et, par suite, la forme du courant si l'intervalle AB ne renferme pas de coefficients d'induction.

M. Janet [1] arrive au même résultat par l'électrolyse. Un cylindre métallique couvert de papier imbibé d'une solution de ferrocyanure de potassium et d'azotate d'ammoniaque est

[1] P. Janet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXIX, p. 57 et 217; 1894.

mis en rotation continue ; il est relié au point B et le point A à un style en fer S_1 qui frotte sur le papier. La chute de potentiel V de A et B est une fonction $f(t)$ du temps ; l'électrolyse a lieu, et le style laisse une trace sur le papier, dès que V atteint et dépasse une certaine valeur $+\varphi$; le tracé représente donc la corde de la courbe des potentiels limitée aux époques t_1 et t'_1 définies par la condition $\varphi = f(t_1) = f(t'_1)$.

On joint ensuite le point B au pôle négatif d'une pile de résistance négligeable et de force électromotrice e, dont le pôle positif communique avec un second style S_2 appuyant sur la même génératrice que le premier. La différence de potentiel du second style et du cylindre est $e + f(t)$, de sorte que la corde de ce nouveau style est limitée aux époques

$$\varphi = e + f(t_2) = e + f(t'_2).$$

On en déduit

$$e = f(t_1) - f(t_2) = f(t'_1) - f(t'_2).$$

En faisant varier la force électromotrice auxiliaire et permutant les pôles, on obtiendra ainsi par échelons successifs les ordonnées de la courbe V. Un plus grand nombre de styles reliés à différents points d'une batterie d'accumulateurs donneraient le tracé graphique de cette courbe.

2° Le courant induit dans un circuit par un courant alternatif présente avec ce dernier une différence de phase (**400**)

$$\delta = \alpha' - \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta'\right) = \pi - \operatorname{arc\,tang} \frac{r'}{L'\omega}.$$

Lorsque la résistance r' est très faible, les courants primaire et secondaire sont presque de sens opposés. D'ailleurs, l'angle β' étant toujours inférieur à 90°, la résultante générale des actions réciproques est répulsive et le circuit secondaire tend à s'éloigner du primaire.

Nous citerons, à ce sujet, quelques expériences de M. Elihu Thomson. On tient à la main un anneau de cuivre qui entoure, au-dessus du plan moyen, un électro-aimant vertical alimenté par un courant alternatif; l'anneau est repoussé de bas en haut et se projette en l'air quand on l'abandonne à lui-même.

Un disque de métal placé sur l'électro-aimant est également repoussé : s'il occupe d'abord une position un peu excentrique, l'action qu'il subit a une composante horizontale.

Deux bobines annulaires, l'une avec noyau de fer doux et parcourue par un courant alternatif, l'autre fermée sur elle-même, sont placés concentriquement ; la première est fixe et la seconde mobile autour d'un de ses diamètres. L'équilibre stable correspond au cas où les deux bobines sont rectangulaires. Pour une orientation différente, la bobine mobile tend à tourner vers sa position d'équilibre ; le couple est proportionnel au carré du courant efficace et à une fonction de l'angle des deux plans. Si on compense ce couple par un ressort ou par l'action d'un poids, l'appareil devient un galvanomètre pour courants alternatifs.

Si un commutateur ouvre le circuit secondaire pendant un quart de tour, à partir de la position d'équilibre, pour le fermer au quart suivant, l'ouvrir ensuite, etc., le mouvement devient continu ; c'est un moteur à courant alternatif.

De même, la distance des charbons dans l'arc électrique à courant alternatif peut être réglée par la répulsion d'une bobine en dérivation sur des masses métalliques voisines.

3° M. Tesla [1] a obtenu aussi des effets remarquables avec les courants de très haute fréquence. On peut obtenir ces courants par un alternateur dont le disque mobile porte un grand nombre de petits électro-aimants sur la circonférence et qui tourne devant un nombre égal d'inducteurs, mais il est plus simple d'avoir recours aux décharges des condensateurs.

Les pôles secondaires d'une bobine d'induction communiquent aux armatures intérieures A et B de deux bouteilles de Leyde, reliées elles-mêmes à des boules a et b très rapprochées ; les armatures extérieures sont réunies par une hélice de gros cuivre H. La bobine est alimentée par des courants interrompus ou un courant alternatif ; elle n'a d'autre but que d'entretenir un torrent d'étincelles, ou de décharges oscillantes (399) entre les boules a et b.

L'hélice extérieure H est le siège d'un courant alternatif. Si on désigne par r la résistance de chaque spire et par l son

[1] N. Tesla, *Bull. de la Soc. Int. des Électriciens*, t. IX, passim ; 1892.

coefficient de self-induction, le carré de l'impédance entre deux points O et M comprenant n spires est

$$n^2 r^2 + \omega^2 (n^2 l)^2 = n^2 (r^2 + \omega^2 l^2 n^2).$$

Comme la résistance r est très faible par rapport à ωl, on peut dire que l'impédance et, par suite, la force électromotrice efficace correspondante, est proportionnelle à $\omega l n^2$, c'est-à-dire au carré du nombre des spires. Si on touche le point O par un conducteur f et qu'on l'approche du point M, on en tire des étincelles d'autant plus vives qu'il y a plus de spires intercalées. Une lampe à incandescence peut être alimentée à son régime normal, quand on la met en dérivation sur un certain nombre de spires. Un tube à gaz raréfié introduit dans l'hélice s'illumine sous l'influence du champ alternatif.

Les courants de haute fréquence n'ont pas d'action physiologique sensible, sans doute parce qu'il restent entièrement superficiels. En tenant aux mains des conducteurs à surface notable, comme des boules de métal, on peut se mettre en dérivation sur l'hélice et placer dans ce circuit une lampe à incandescence qui s'illumine.

Si on utilise ces courants secondaires pour alimenter une autre bobine sans armature en fer et noyée dans l'huile, les courants induits dans la nouvelle bobine atteignent des tensions très élevées qui permettent d'imiter tous les phénomènes d'électricité statique. Il faut alors donner une valeur convenable à la distance explosive a et b du micromètre, *souffler* les étincelles avec un courant d'air ou un champ magnétique et régler les condensateurs intercalés dans le circuit afin que la décharge secondaire reste oscillante; il est encore avantageux de maintenir sur ce circuit une petite interruption à étincelles. Les pôles secondaires permettent alors les expériences les plus variées.

Entre deux fils parallèles, toute la nappe d'air qui les sépare devient lumineuse. Entre deux anneaux concentriques, il se produit une couronne brillante de lumière violacée que traversent par intervalles des étincelles.

L'un des pôles étant laissé libre dans l'air et l'autre réuni à un plateau conducteur, on tire du plateau de vives étincelles

par une boule métallique tenue à la main. Un tube à gaz raréfié s'illumine dans le voisinage. Ce plateau servant ainsi à diffuser l'énergie dans l'air ambiant, si on relie l'autre pôle avec un fil portant diverses substances, comme une simple boule de charbon, dans une ampoule à gaz raréfié, ces substances s'illuminent et deviennent phosphorescentes; l'éclat est beaucoup augmenté quand on coiffe l'ampoule d'une sorte d'abat-jour métallique.

Je citerai seulement quelques nombres empruntés à une expérience analogue de M. Elihu Thomson.

Un courant alternatif de 10 ampères, à 1000 volts et 125 alternances, réduit à 80 volts par un transformateur, alimente le circuit primaire d'une bobine, où la force électromotrice du secondaire monte à 15 000 ou 20 000 volts. Les extrémités du secondaire vont à un condensateur noyé dans l'huile de paraffine et les décharges oscillantes passent dans une seconde bobine sans fer, isolée avec des soins exceptionnels. Dans des conditions favorables, quand on n'est pas gêné par l'humidité ou les poussières de l'air, le circuit secondaire fournit des étincelles de $1^m,60$ de longueur.

881. Courants polyphasés. — Supposons que deux cadres de surfaces S_1 et S_2 (fig. 278), dont les plans font entre eux

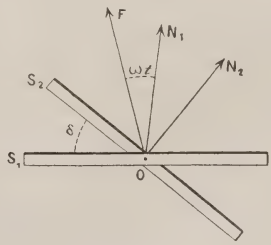


Fig. 278.

l'angle constant δ, tournent autour de leur droite commune, avec la vitesse angulaire ω, dans un champ uniforme dont la composante perpendiculaire à l'axe de rotation est F. Soient N_1 et N_2 les normales aux plans des cadres et ωt l'angle variable de la première avec la direction du champ.

Les flux de force émis par le champ sont $\Phi_1 = FS_1 \cos \omega t$ dans

le cadre S_1, $\Phi_2 = FS_2 \cos(\omega t + \delta)$ dans S_2, et les forces électromotrices correspondantes

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = FS_1 \omega \sin \omega t = E_1 \sin \omega t,$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = FS_2 \omega \sin(\omega t + \delta) = E_2 \sin(\omega t + \delta).$$

Si les circuits ont les mêmes éléments électriques S, r, L, et que l'induction mutuelle soit nulle ou négligeable, on a

$$E = E_1 = E_2 = FS\omega, \qquad a^2 = r^2 + \omega^2 L^2,$$

$$I = I' = \frac{E}{a}, \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{\omega L}{r};$$

$$i_1 = I \sin(\omega t - \alpha), \qquad i_2 = I \sin(\omega t - \alpha + \delta).$$

Les courants ont la même amplitude et on dit qu'ils sont *décalés* de l'angle δ.

Lorsque les cadres sont rectangulaires, en particulier, l'angle δ est de 90°, l'induction mutuelle est rigoureusement nulle ; les courants

$$i_1 = I \sin(\omega t - \alpha), \qquad i_2 = I \cos(\omega t - \alpha),$$

sont dits alors *biphasés* à angle droit, ou en *quadrature*.

Trois cadres, montés respectivement sous le même angle δ, donneront aussi

$$i_1 = I \sin(\omega t - \alpha),$$

$$i_2 = I \sin(\omega t - \alpha + \delta),$$

$$i_3 = I \sin(\omega t - \alpha + 2\delta).$$

Lorsque la distribution des cadres est régulière sur une demi-circonférence, les courants sont *triphasés* à 60°. On a alors $2 \cos \delta = 1$ et

$$i_1 + i_3 = 2 I \sin(\omega t - \alpha + \delta) \cos \delta = i_2.$$

L'induction de deux courants i_1 et i_3 sur le troisième circuit

étant de la forme $A(i_1+i_3)f(\delta)=Ai_2f(\delta)$, le résultat final est le même que si l'on remplaçait L par la quantité constante $L'=L+Af(\delta)$ et rien n'est modifié aux calculs.

Remarquons encore que, si l'on change le sens d'enroulement sur le cadre S_2, l'opération revient à déplacer ce cadre de 180°. Les trois cadres se trouvant alors distribués régulièrement sur la circonférence entière, l'angle δ' de deux plans successifs de même signe est de 120°; les courants sont triphasés à 120°. On a alors $2\cos\delta'=-1$ et, en numérotant les courants dans le nouvel ordre de succession,

$$i_1+i_3=-i_2, \qquad i_1+i_2+i_3=0.$$

La somme algébrique des trois courants est toujours nulle, ainsi que la somme des forces électromotrices.

Il est facile de concevoir comment ces courants s'obtiennent dans les machines. Imaginons qu'une série de pôles magnétiques N, S, N'... (fig. 279), alternativement de signes con-

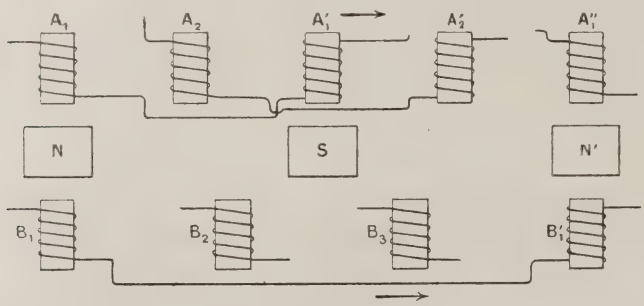


Fig. 279.

traires, soient disposées en couronne. Un disque mobile porte des bobines induites A_1, A_2, A'_1, A'_2 .., munies ou non d'armatures en fer, dont la distance angulaire est moitié moindre que celle des pôles. La période T est le temps que met une bobine à franchir l'intervalle des pôles successifs de même nom. La force électromotrice est toujours de signe contraire dans les bobines A_1 et A'_1, mais leur communication étant établie comme sur la figure, les courants s'ajoutent et ces deux bobines constituent un *couple*. Dans les bobines suivantes A_2 et A'_2,

qui sont en avance d'un quart de période, la phase est augmentée de 90°; les courants produits par ces deux systèmes de bobines seront donc biphasés à angle droit.

Les couples successifs A_1 et A'_1, A_2 et A'_2,... peuvent ensuite être associés en série ou en dérivation, suivant que l'on veut augmenter la force électromotrice ou le courant. Il est clair d'ailleurs que, pour diminuer la réluctance du flux magnétique, les inducteurs forment deux séries montées sur des couronnes parallèles, à pôles correspondants de signes contraires, entre lesquelles passent les bobines induites.

Les bobines B_1, B_2, B_3, B'_1... sont disposées de manière à produire des courants triphasés à 120°, leur distance étant le tiers de l'intervalle compris entre deux pôles de même nom; les courants seraient triphasés à 60° si l'on doublait le nombre de ces bobines en les joignant de 3 en 3. Les couples sont encore formés par les bobines B_1 et B'_1, B_2 et B'_2.

882. Jonction des conducteurs. — Si chacun des courants est transmis par un circuit spécial, il faut 4 fils pour les courants biphasés et 6 fils pour les courants triphasés, mais les propriétés particulières de ces courants permettent de réduire beaucoup le nombre des communications.

Avec les courants biphasés, par exemple, on réunira les induits S_1 et S_2 (fig. 280) au même point O et trois fils de ligne AA', OO' et BB' iront rejoindre un autre conducteur A'B', pour aboutir au point O''.

Si les deux circuits ont la même résistance, les courants

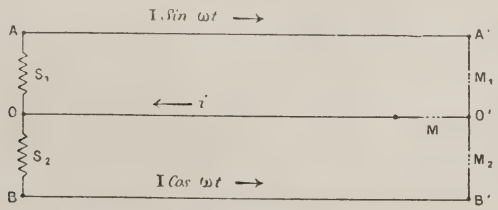


Fig. 280.

dans les induits, comptés à partir du point O, étant $I \sin \omega t$ et $I \cos \omega t$, le courant de la ligne intermédiaire est

$$i' = I(\sin \omega t + \cos \omega t) = I\sqrt{2} \sin\left(\omega t + 45^\circ\right).$$

L'amplitude de ce courant commun est $I' = I\sqrt{2}$. En appelant r et r' les résistances des conducteurs, la perte de puissance sur la ligne est

$$2r\frac{I^2}{2} + r'\frac{I'^2}{2} = (r + r')I^2,$$

tandis qu'elle serait $2rI^2$ avec un réseau à 4 fils. Pour une même densité de courant, les amplitudes I et I' sont proportionnelles aux sections s et s' ou en raison inverse des résistances, ce qui donne

$$rI = r'I' = r'I\sqrt{2}, \qquad r = r'\sqrt{2}, \qquad s' = s\sqrt{2}.$$

La disposition des trois fils réduit ainsi la perte en ligne et le poids du métal dans le même rapport

$$\frac{r + r'}{2r} = \frac{2s + s'}{4s} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 0{,}85.$$

Au poste d'arrivée, le courant est utilisé, par exemple avec des lampes à incandescence, en M_1 et M_2 sur les courants latéraux, ou en M sur le courant commun. Dans le premier cas, les résistances équivalentes en M_1 et M_2 doivent être égales pour ne pas troubler le jeu de la machine.

Les courants triphasés n'exigent que 3 fils. Dans le couplage en *étoile*, les induits S_1, S_2 et S_3 sont réunis au même point O (fig. 281), de manière que les forces électromotrices

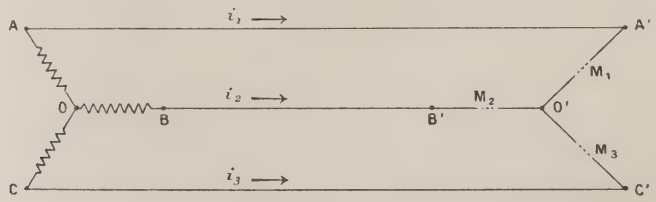


Fig. 281.

successives présentent une différence de phase de 120°, et les 3 fils des autres pôles aboutissent en O' au poste d'arrivée. La somme des forces électromotrices étant nulle, il en est de même pour les courants i_1, i_2 et i_3 si les fils sont équilibrés ;

les points O et O′ restent à l'état neutre et on peut les mettre en communication avec le sol. On utilise les courants en M_1, M_2 et M_3, respectivement sous la même charge.

Dans le couplage en *triangle*, les inducteurs sont réunis bout à bout, en circuit fermé (fig. 282), de manière à constituer

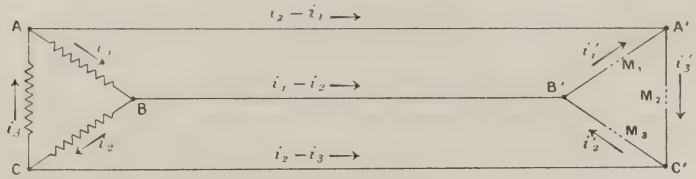


Fig. 282.

le contour d'un triangle A B C, et les points de jonction communiquent par les fils de ligne aux sommets d'un autre triangle A′ B′ C′. Les courants i_1, i_2 et i_3 dans les induits donnent respectivement $i_3 - i_1$, $i_1 - i_2$ et $i_2 - i_3$ sur les fils de ligne, puis i'_1, i'_2 et i'_3 sur les branches à l'arrivée. Avec un réseau équilibré, on a encore

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad i'_1 + i'_2 + i'_3 = 0;$$
$$(i_1 - i'_1) + (i_2 - i'_2) + (i_3 - i'_3) = 0.$$

Les trois termes de cette dernière équation ont la même valeur et chacun d'eux est nul, car la loi de partage donne

$$i_3 - i_1 = i'_3 - i'_1, \qquad i_1 - i'_1 = i_3 - i'_3 = i_2 - i'_2.$$

Les courants sur le triangle d'arrivée sont donc respectivement les mêmes que sur les côtés analogues du triangle des induits ; on les utilisera en M_1, M_2 et M_3.

Les courants triphasés peuvent également être reçus par trois transformateurs identiques, réunis en étoile ou en triangle suivant le cas, dont les fils secondaires émaneront avec les mêmes connexions.

Un premier groupe de transformateurs reçoit, par exemple, les courants de la machine, dont il élève la tension, pour les transmettre sur la ligne, et un second groupe de transformateurs à l'arrivée ramène la tension au taux qui convient pour les applications.

883. Permutateur. — Dans un transformateur où le courant primaire $i = I \sin \omega t$ parcourt N spires, le circuit secondaire ayant N′ spires, le flux inducteur est de la forme

$$\Phi = ANN'i = ANN'I \sin \omega t.$$

Si l'on fait en sorte que $NN' = a \sin \omega t$, le flux de force devient $\Phi = Aai \sin \omega t$; dans ce cas, un courant uniforme i produirait une force électromotrice alternative ; inversement, un courant alternatif dans le second circuit produirait dans le premier un courant uniforme. Tel est le principe des appareils, que nous appellerons *permutateurs*, imaginés par MM. Hutin et Leblanc [1] pour transformer les courants continus en alternatifs ou réciproquement.

Au lieu de faire varier le nombre N des spires inductrices d'une manière périodique, on lui donne successivement des valeurs proportionnelles à des ordonnées équidistantes d'une sinusoïde, les ordonnées négatives correspondant à un changement de sens du courant primaire.

Considérons, par exemple, 6 ordonnées $y_1, y_2 \ldots y_6$ (fig. 283)

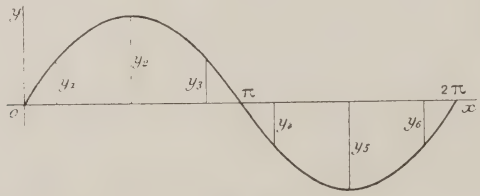


Fig. 283.

séparées par un intervalle de 60°; les nombres de tours correspondants varient comme 1, 2, 1, 1, 2, 1, car on a

$$y_1 = y_3 = -y_4 = -y_6 = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$y_2 = -y_5 = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Le transformateur comprend un fil secondaire f_1 (fig. 284), enroulé sur le noyau d'un circuit magnétique fermé, et six

[1] Hutin et Leblanc, *La Lumière électrique*, passim ; 1892 et 1893.

bobines primaires A_1, A_2,... A_6, les trois dernières enroulées en sens inverse. Un commutateur tournant à 6 touches distribue le courant primaire aux six bobines successives; le

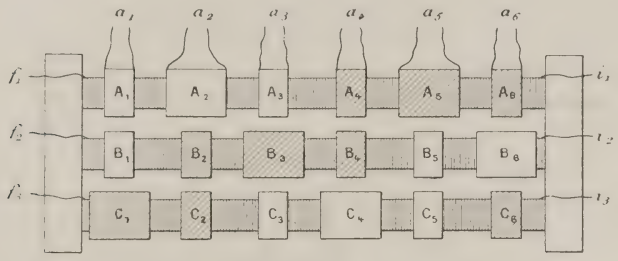


Fig. 284.

courant secondaire est alternatif et sensiblement sinusoïdal; l'approximation est d'autant plus grande qu'on augmente davantage les ordonnées de la sinusoïde et le nombre correspondant des bobines primaires.

La même disposition permet d'obtenir des courants polyphasés. Dans le cas de six bobines primaires, par exemple, on constitue le transformateur avec trois noyaux sur lesquels les bobines sont disposées dans l'ordre indiqué par la figure, les bobines de même rang, telles que A_1, B_1 et C_1, étant montées en série sur le circuit de chaque touche du commutateur. Il est clair que la phase du courant i_2 est alors en avance de 120° sur celle du courant i_1 et en retard de 120° par rapport au courant i_3.

Supposons maintenant que les conducteurs f_1, f_2 et f_3 soient alimentés par les courants alternatifs i_1, i_2 et i_3 provenant d'une source extérieure. Si le commutateur tourne à la même vitesse que précédemment, c'est-à-dire s'il est synchrone avec les courants, les touches successives recevront des courants de sens opposés à la direction primitive et le circuit primaire recevra un courant à peu près uniforme.

Le synchronisme peut être réalisé d'une manière automatique, soit par les courants triphasés i_1, i_2 et i_3, soit par ceux du commutateur. Imaginons, par exemple, que les fils a_1 et a_4, a_2 et a_5, a_3 et a_6 communiquent respectivement avec des couples de bobines enroulées sur l'anneau d'une machine Gramme bipolaire, aux extrémités de trois diamètres faisant entre eux

l'angle de 120°. L'anneau se met en mouvement et l'équilibre ne peut avoir lieu que pour le synchronisme, puisque chacun des systèmes de bobines, au moment de l'excitation, tend à se mettre perpendiculaire à la ligne des pôles ; il est facile de concevoir que cet anneau puisse commander lui-même le jeu du commutateur.

884. Champs tournants. — Supposons que des courants biphasés, $i_1 = I \sin \omega t$ et $i_2 = I \cos \omega t$, alimentent deux paires d'électro-aimants montés à angle droit sur une circonférence et que, dans l'intervalle commun, le champ de chacun d'eux soit sensiblement uniforme. Le premier étant parallèle à l'axe des y et le second à l'axe des x, les composantes du champ résultant seront de la forme

$$X = H \cos \omega t, \qquad Y = H \sin \omega t,$$

c'est-à-dire les projections d'un champ d'intensité constante H qui tournerait à gauche, en sens inverse des aiguilles d'une montre, d'un angle ωt proportionnel au temps; c'est un champ *tournant* circulaire. Les propriétés importantes des champs tournants ont été établies à peu près à la même époque par M. Ferraris et par M. Tesla.

D'une manière plus générale, si l'on produit en un point une série de champs alternatifs de même période et situés dans un même plan, dont chacun est de la forme $a \sin(\omega t + \alpha)$ et situé dans l'azimut β par rapport à l'axe de x, les composantes du champ résultant sont

$$X = \Sigma a \sin(\omega t + \alpha) \cos \beta = A \sin(\omega t + \varphi),$$
$$Y = \Sigma a \sin(\omega t + \alpha) \sin \beta = B \sin(\omega t + \psi).$$

Le problème est le même que pour la combinaison des vibrations transversales en optique. Le champ résultant est représenté par le rayon vecteur d'un ellipse, qui décrit des aires égales en des temps égaux, les constantes A, B, φ et ψ étant données par les relations

$$A^2 = (\Sigma a \cos \beta \cos \alpha)^2 + (\Sigma a \cos \beta \sin \alpha)^2,$$
$$B^2 = (\Sigma a \sin \beta \cos \alpha)^2 + (\Sigma a \sin \beta \sin \alpha)^2;$$
$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\Sigma a \cos \beta \sin \alpha}{\Sigma a \cos \beta \cos \alpha}, \qquad \operatorname{tang} \psi = \frac{\Sigma a \sin \beta \sin \alpha}{\Sigma a \sin \beta \cos \alpha}.$$

Le champ tournant est elliptique ; il équivaut à la superposition d'un champ alternatif de direction constante et d'un champ tournant circulaire.

Lorsque les n champs partiels ont la même amplitude a et que l'azimut β est égal à la différence de phase α correspondante, l'un des champs étant parallèle à l'axe des x, on a

$$2\cos\beta\cos\alpha = 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$2\sin\beta\cos\alpha = 2\cos\beta\sin\alpha = \sin 2\alpha,$$

$$2\sin\beta\sin\alpha = 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha;$$

$$\Sigma\cos\beta\cos\alpha = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\Sigma\cos 2\alpha,$$

$$\Sigma\sin\beta\sin\alpha = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\Sigma\cos 2\alpha,$$

$$\Sigma\cos\beta\sin\alpha = \Sigma\sin\beta\cos\alpha = \Sigma\sin 2\alpha.$$

Supposons enfin que les champs partiels soient également distribués dans une demi-circonférence et fassent entre eux le même angle δ, de sorte qu'on ait $n\delta = \pi$. L'angle 2α doit prendre alors les différentes valeurs 0, 2δ, 4δ..., $2(n-1)\delta = 2\pi - 2\delta$. On voit aisément que $\Sigma\cos 2\alpha$ est la projection sur l'axe des x du contour polygonal régulier de n cotés d'unité de longueur, faisant entre eux l'angle extérieur 2δ, et $\Sigma\sin 2\alpha$ la projection de ce contour sur l'axe des y; le polygone serait doublé pour $n\delta = 2\pi$. Ces deux sommes étant nulles, il reste

$$\varphi = 0, \qquad \psi = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad A = B = n\frac{a}{2} = H,$$

$$X = H\sin\omega t, \qquad Y = \pm H\cos\omega t.$$

Le champ tournant final est encore circulaire ; son amplitude est la moitié de la somme des amplitudes de tous les courants partiels. C'est ce que l'on obtiendrait, en particulier, avec les courants triphasés de 60° ou de 120°.

Dans les transformateurs (878), la différence de phase des

courants primaire et secondaire est pratiquement égale à 90°, quand ils fonctionnent sous faible charge, c'est-à-dire quand le rapport $\frac{L'\omega}{r'}$ est très petit. Ces deux courants utilisés pour alimenter des électro-aimants à angle droit avec des ampère-tours équivalents produiront donc un champ tournant.

Remarquons encore que si l'on place devant un champ alternatif une plaque conductrice d'épaisseur notable, les courants induits dans la plaque ont une action égale et contraire du côté opposé et constituent un écran magnétique, comme dans l'expérience d'Arago (473) ; l'effet protecteur de la plaque est nul quand elle tourne avec la même vitesse que le champ. Or, un champ alternatif $X = H \sin \omega t$ équivaut à la superposition des deux champs tournants de sens contraires

$$X_1 = \frac{H}{2} \sin \omega t, \qquad X_2 = \frac{H}{2} \sin \omega t,$$

$$Y_1 = \frac{H}{2} \cos \omega t; \qquad Y_2 = -\frac{H}{2} \cos \omega t.$$

Un disque conducteur qui tourne devant le champ avec la vitesse angulaire ω laisse passer la composante de même sens et forme écran pour la seconde ; on obtient alors derrière le disque un champ tournant d'amplitude moitié moindre que celle du champ primitif (M. Leblanc).

MOTEURS ÉLECTRIQUES.

885. **Machines à courant continu.** — Tout électromoteur mécanique tend à se mouvoir en sens inverse, et devient un *moteur*, si on l'alimente par un courant de même sens que celui qu'il produisait d'abord, puisque l'action électrodynamique est opposée au mouvement primitif ; les balais se trouvent alors dans une position inverse par rapport au mouvement de rotation. Pour un même courant dans les deux cas, le couple moteur a la même valeur. Toutefois, les conditions

ne sont pas exactement réciproques. Quand l'appareil sert de moteur, les courants parasites de diverses natures changent de signe et la réaction d'induit est diminuée. Le déplacement des balais doit être plus faible, ce qui a pour conséquence d'augmenter le flux magnétique utile et, par suite, le couple moteur.

Plusieurs distinctions sont à faire suivant la nature des inducteurs qui peuvent être, soit magnétiques ou excités par une source étrangère, soit montés en série avec l'anneau mobile sur le courant principal, soit encore alimentés par une dérivation totale ou partielle. Ces différentes circonstances exigeraient une discussion particulière pour assurer les meilleures conditions de travail et de renversement.

Le problème est relativement simple lorsque la source et le moteur sont des machines identiques avec inducteurs en série (389), faisant respectivement n tours et n' tours par seconde; le flux d'induction magnétique a la même valeur dans les deux cas, à part des questions accessoires. Les forces électromotrices directe et inverse sont respectivement $E = n\varphi(I)$ et $E' = n'\varphi(I)$, la puissance absorbée $W = EI$ et la puissance au moteur $U = E'I$; le rendement électrique est égal au rapport des vitesses.

Si R est la résistance totale du circuit, l'intensité du courant est donnée par

$$IR = E - E' = (n - n')\varphi(I),$$

et la puissance utile peut s'écrire

$$U = n'I\varphi(I) = \frac{n'(n - n')}{R}\varphi^2(I).$$

Pour des valeurs constantes de n et de I, la puissance utile serait encore maximum, avec un rendement électrique de 50 p. 100, si la vitesse du moteur était moitié moindre, mais ces conditions ne conviennent pas dans la pratique.

Une machine à courant continu, avec inducteurs en série, devient aussi un moteur quand on l'alimente par un courant alternatif, puisque le sens du courant change à la fois dans

les deux organes, inducteur et induit, mais il se produit alors de vives étincelles aux balais. Cette disposition serait très défectueuse pour un régime continu, puisque le collecteur serait rapidement déterioré ; on ne l'utilise qu'à titre temporaire, pour imprimer une vitesse initiale aux pièces mobiles dans certains cas particuliers, et on peut alors affaiblir les étincelles par un courant d'air énergique ou en les plaçant entre les pôles d'un électro-aimant.

886. Moteurs à courants alternatifs. — I. Supposons d'abord qu'un cadre de surface S_1 (fig. 285), parcouru par le courant

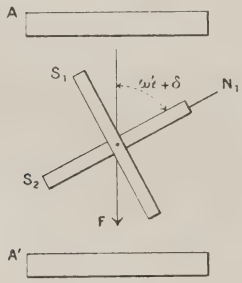


Fig. 285.

alternatif $i = I \sin \omega t$, tourne avec la vitesse angulaire ω' autour d'un diamètre perpendiculaire à la direction d'un champ uniforme F. Le moment magnétique du cadre est $M = SI \sin \omega t$. Si $\omega' t + \delta$ est l'angle que fait l'axe magnétique N_1 du cadre avec la direction opposée à celle du champ, le couple produit par le champ est

$$FM \sin(\omega' t + \delta) = FSI \sin \omega t \sin(\omega' t + \delta).$$

La relation

$$2 \sin \omega t \sin(\omega' t + \delta) = \cos[(\omega' - \omega) t + \delta] - \cos[(\omega' + \omega) t + \delta]$$

montre que le couple moyen est toujours nul, à moins que l'on n'ait $\omega' = \omega$ ou $\omega' + \omega = 0$, c'est-à-dire que la période de rotation du cadre ne soit la même que celle du courant. Le mouvement ne peut donc s'entretenir qu'au *synchonisme* et la

valeur moyenne du couple moteur est alors

$$C = \frac{FSI}{2} \cos\delta = C_1 \cos\delta.$$

La valeur de C_1 est le couple maximum que l'on puisse demander au moteur ; en dessous de cette limite, l'angle δ de décalage se règle en raison du travail.

La puissance est $U = C\omega$. Si r est la résistance du cadre, la puissance absorbée est $W = U + r\frac{I^2}{2}$ et le rendement

$$\frac{1}{u} = \frac{W}{U} = 1 + \frac{rI}{FS\omega\cos\delta}.$$

Pour mettre en mouvement les moteurs construits sur ce principe, il faut avoir recours à des moyens auxiliaires jusqu'à ce qu'on ait établi le synchronisme.

Le plus simple consiste à monter sur le même arbre une dynamo à courant continu que l'on alimente par une batterie d'accumulateurs. Dès que les cadres mobiles sont au synchronisme, on excite les inducteurs ; la dynamo devient alors électromoteur, elle peut entretenir les inducteurs et recharger en même temps une batterie, qui sera ensuite utilisée pour un autre départ.

On arriverait aux mêmes résultats en faisant tourner un aimant, ou un électro-aimant à courant continu, dans un champ alternatif, puisque la quantité M est alors constante et que le champ F sera proportionnel à $\sin\omega t$.

Lorsque le champ F est produit dans le premier cas par un courant, le flux émis dans les inducteurs, par réaction du courant dans le cadre mobile, peut s'écrire

$$\Phi = -Ai\cos(\omega' t + \delta) = -AI\sin\omega t\cos(\omega' t + \delta),$$

ce qui donne, pour le synchronisme,

$$\Phi = \frac{AI}{2}[\sin\delta - \sin(2\omega t + \delta)],$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = AI\omega\cos(2\omega t + \delta).$$

C'est une force électromotrice alternative proportionnelle à la vitesse et de période moitié moindre.

On annulerait cette réaction en montant sur l'arbre un second cadre S_2 perpendiculaire au premier et parcouru par un courant $I \cos \omega t$, car le flux total est alors proportionnel à

$$\cos \omega t \sin(\omega' t + \delta) - \sin \omega t \cos(\omega' t + \delta) = \sin[(\omega' - \omega) t + \delta],$$

quantité qui devient constante pour le synchronisme.

Ce résultat était évident, car les deux cadres supposés en repos ont un axe magnétique tournant à la vitesse ω; ils tendent à se mouvoir en sens contraire et l'équilibre est établi lorsque le champ des cadres reste immobile dans une direction déterminée par rapport au champ extérieur.

II. Supposons encore que le même courant alternatif passe dans les inducteurs et dans le cadre mobile. Le champ étant alors $F = HI \sin \omega t$, l'expression du couple devient

$$FM \sin(\omega' t + \delta) = HSI^2 \sin^2 \omega t \sin(\omega' t + \delta) = \frac{HSI^2}{2}(1 - \cos 2\omega t) \sin(\omega' t + \delta).$$

Le couple moyen est $\frac{HSI^2 \sin \delta}{2}$ quand le cadre est en repos. Pendant la rotation, ce couple ne peut avoir une valeur finie que pour l'une des conditions $2\omega + \omega' = 0$ ou $2\omega - \omega' = 0$; la période de rotation du cadre est alors moitié moindre que celle du courant, dans un sens ou dans l'autre.

Le couple moyen et la puissance utile sont alors

$$C = -\frac{HSI^2}{4} \sin \delta, \qquad U = -\omega \frac{HSI^2}{4} \sin \delta.$$

L'appareil absorbe du travail et devient électromoteur quand $\sin \delta > 1$; c'est un moteur pour $\sin \delta < 1$.

Avec cette disposition, la réaction du cadre,

$$\Phi = -AI \sin \omega t \cos(2\omega t + \delta) = \frac{AI}{2}[\sin(\omega t + \delta) - \sin(3\omega t + \delta)],$$

comprend deux termes de périodes différentes qui doivent troubler beaucoup le phénomène.

III. Un dernier cas conduit à des résultats très simples. (P. Boucherot). Le champ est produit par des inducteurs à angle droit parcourus par des courants $I \sin \omega t$ et $I \cos \omega t$ en quadrature ; ils sont reliés respectivement à deux cadres rectangulaires mobiles. Le champ est tournant à la vitesse ω et l'axe magnétique des cadres tourne avec la même vitesse relative, dans un sens ou dans l'autre, suivant les liaisons.

La vitesse de rotation du système étant ω', soit ωt l'angle du champ avec une direction fixe, $\pm \omega t$ l'angle de l'axe magnétique des cadres avec l'un des diamètres et $\omega' t + \delta$ l'angle de ce diamètre avec la direction fixe considérée.

L'angle du champ avec l'axe magnétique du système mobile est $\theta = \omega' t + \delta \pm \omega t - \omega t$. Si l'on prend le signe $+$, c'est-à-dire si la rotation du champ et celle de l'axe magnétique se font dans le même sens, le couple moyen est nul. Il faut donc établir les communications de manière que les deux rotations du champ et de l'axe magnétique soient de sens contraires. On a alors $\theta = (\omega' - 2\omega) t + \delta$. Comme le champ et le moment magnétique des cadres sont tous deux proportionnels à I, le couple est de la forme $-AI^2 \sin[(\omega' - 2\omega)t + \delta]$. Sa valeur moyenne reste nulle en général, sauf pour la condition $\omega' = 2\omega$, c'est-à-dire quand la vitesse de rotation du cadre est double de celle du champ. On a alors

$$C = -\frac{AI^2}{2} \sin \delta, \qquad U = -\omega AI^2 \sin \delta.$$

L'appareil est électromoteur, avec production de courants biphasés en quadrature, ou moteur, suivant que $\sin \delta$ est positif ou négatif.

887. Induits fermés. — Lorsque le cadre mobile constitue un circuit fermé, il n'est plus nécessaire d'y amener le courant par des bagues et des balais ; on évite ainsi d'une manière absolue les étincelles qui se produisent toujours sur les parties frottantes. Différentes dispositions permettent encore d'obtenir dans le cadre des courants induits qui suffisent pour entretenir le mouvement.

I. Si le champ est alternatif, $F = H \sin \omega t$, et que le cadre S_1 (fig. 285) tourne à la vitesse ω', le flux d'induction émis dans

le cadre est, en posant $\omega_1 = \omega + \omega'$ et $\omega_2 = \omega - \omega'$,

$$\Phi = -\mathrm{HS}\sin\omega t\cos(\omega' t + \delta) = -\frac{\mathrm{HS}}{2}[\sin(\omega_1 t + \delta) + \sin(\omega_2 t - \delta)],$$

et la force électromotrice

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mathrm{HS}}{2}[\omega_1\cos(\omega_1 t + \delta) + \omega_2\cos(\omega_2 t - \delta)].$$

Le cadre est ainsi parcouru par deux courants alternatifs superposés i_1 et i_2 de périodes différentes. Appelant r et L les données du circuit et posant $\mathrm{HS} = 2\mathrm{A}$, le courant final est

$$i = \mathrm{A}\left[\frac{\omega_1}{a_1}\cos(\omega_1 t + \delta - \alpha_1) + \frac{\omega_2}{a_2}\cos(\omega_2 t - \delta - \alpha_2)\right],$$

les constantes étant définies par les relations

$$\frac{r}{\cos\alpha_1} = \frac{L\omega_1}{\sin\alpha_1} = a_1 = \sqrt{r^2 + L^2\omega_1^2},$$

$$\frac{r}{\cos\alpha_2} = \frac{L\omega_2}{\sin\alpha_2} = a_2 = \sqrt{r^2 + L^2\omega_2^2}.$$

Comme le produit moyen de deux sinus ou cosinus est nul quand les angles ont des périodes différentes, les carrés moyens de la force électromotrice et du courant sont

$$\mathrm{E}_m^2 = \frac{\mathrm{A}^2}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), \qquad \mathrm{I}_m^2 = \frac{\mathrm{A}^2}{2}\left(\frac{\omega_1^2}{a_1^2} + \frac{\omega_2^2}{a^2}\right).$$

L'impédance a_m du circuit relative à ce régime particulier, définie par $a_m \mathrm{I}_m = \mathrm{E}_m$, est une fonction beaucoup moins simple que dans les cas habituels.

Le couple moteur $\mathrm{FS}\,i\sin(\omega' t + \delta)$ devient

$$2\mathrm{A}^2\sin\omega t\sin(\omega' t + \delta)\left[\frac{\omega_1}{a_1}\cos(\omega_1 t + \delta - \alpha_1) + \frac{\omega_2}{a_2}\cos(\omega_2 t - \delta - \alpha_2)\right].$$

Remplaçant encore $2\sin\omega t\,\sin(\omega' t + \delta)$ par sa valeur

$$\cos(\omega_2 t + \delta) - \cos(\omega_1 t + \delta),$$

on n'aura à conserver dans la valeur moyenne que les produits de même période, ce qui donne

$$C = \frac{A^2}{2}\left(\frac{\omega_2}{a_2}\cos\alpha_2 - \frac{\omega_1}{a_1}\cos\alpha_1\right) = \frac{A^2 r}{2}\left(\frac{\omega_2}{a_2^2} - \frac{\omega_1}{a_1^2}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\omega_2 a_1^2 - \omega_1 a_2^2 = (\omega_2 - \omega_1)(r^2 - L^2\omega_1\omega_2) = 2\omega'[L^2(\omega^2 - \omega'^2) - r^2],$$

$$\omega_2 a_1^2 + \omega_1 a_2^2 = (\omega_2 + \omega_1)(r^2 + L^2\omega_1\omega_2) = 2\omega\,[L^2(\omega^2 - \omega'^2) + r^2],$$

$$a_1^2 a_2^2 = r^4 + 2r^2L^2(\omega^2 + \omega'^2) + L^4(\omega^2 - \omega'^2)^2,$$

$$C = A^2 r\omega'\,\frac{L^2(\omega^2 - \omega'^2) - r^2}{r^4 + 2r^2L^2(\omega^2 + \omega'^2) + L^4(\omega^2 - \omega'^2)^2}.$$

Le couple moyen est nul pour les vitesses angulaires $\omega' = 0$, $\omega' = \infty$ et $L^2\omega'^2 = L^2\omega^2 - r^2$; cette dernière valeur, que nous désignerons par ω'_0, est très voisine de ω lorsque la résistance r du circuit est très petite par rapport à la réactance $L\omega$.

Le couple moteur est positif quand la vitesse est comprise entre 0 et ω'_0, négatif au delà. Entre les deux premières limites il passe par un maximum ; pour un régime stable, la machine doit fonctionner au delà de ce maximum afin que le couple moteur augmente quand elle se ralentit par un accroissement des efforts exigés. La machine comporte donc un régime variable, mais il est nécessaire qu'on lui imprime d'abord une vitesse supérieure à celle du couple maximum.

La puissance utile est

$$U = C\omega' = r\,\frac{A^2}{4}(\omega_1 - \omega_2)\left(\frac{\omega_2}{a_2^2} - \frac{\omega_1}{a_1^2}\right),$$

la perte par échauffement

$$Q = r\,I_m^2 = r\,\frac{A^2}{2}\left(\frac{\omega_1^2}{a_1^2} + \frac{\omega_2^2}{a_2^2}\right),$$

et la puissance totale dépensée

$$W = U + Q = r\,\frac{A^2}{4}(\omega_1 + \omega_2)\left(\frac{\omega_2}{a_2^2} + \frac{\omega_1}{a_1^2}\right).$$

Le rendement propre à la machine, à part l'énergie nécessaire pour entretenir le champ, est donc

$$u = \frac{U}{W} = \frac{\omega'^2}{\omega^2} \cdot \frac{L^2(\omega^2 - \omega'^2) - r^2}{L^2(\omega^2 - \omega'^2) + r^2}.$$

En exprimant U en fonction de ω', on en déduit

$$\frac{dU}{d\omega'} = 2rA^2 \frac{\omega'}{a_1^2 a_2^2}\left[L^2\omega^2 - r^2 \frac{a_1^4 + a_2^4}{2a_1^2 a_2^2}\right],$$

et le maximum correspond à la condition

$$\frac{L^2\omega^2}{r^2} = \frac{a_1^4 + a_2^4}{2a_1^2 a_2^2}.$$

Pour résoudre cette équation, on posera

$$p^2 = \frac{L^2\omega^2 + r^2}{L^2\omega^2 - r^2} = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}\right)^2, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{r^2 + L^2(\omega^2 + \omega'^2)}{2L^2\omega\omega'}.$$

On obtient alors, toutes réductions faites,

$$L\omega' = p(L\omega \mp r) = (L\omega \mp r)\sqrt{\frac{L^2\omega^2 + r^2}{L^2\omega^2 - r^2}}.$$

Le signe + correspond au maximum de puissance négative; la vitesse est supérieure à ω'_0 et la machine devient un électromoteur. La vitesse ω'_m relative au maximum de travail utile et le rendement qui lui correspond sont donc

$$L^2\omega_m'^2 = \frac{L\omega - r}{L\omega + r}(L^2\omega^2 + r^2),$$

$$u_m = \frac{\omega_m'^2}{\omega^2}\frac{L\omega - r}{L\omega + r} = \left(1 + \frac{r^2}{L^2\omega^2}\right)\left(\frac{L\omega - r}{L\omega + r}\right)^2.$$

Le maximum de courant moyen aura lieu pour la condition

$$\frac{dI_m^2}{d\omega'} = r^2A^2\left(\frac{\omega_1}{a_1^4} - \frac{\omega_2}{a_2^4}\right) = 0,$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^4 = \left(\frac{r^2 + L\omega_1^2}{r^2 + L\omega_2^2}\right)^2,$$

laquelle se réduit à $\omega_1 = \omega_2$, ou $\omega' = 0$, lorsque la résistance r est très petite par rapport à la réactance $L\omega$. C'est donc au voisinage de l'état de repos que l'induit s'échauffe le plus.

Comme le résultat est indépendant de l'angle δ, on forme l'induit par une série de cadres inclinés entre eux d'un angle constant ε, ou simplement par une série de barres montées sur un cylindre et aboutissant aux extrémités à des plaques terminales ; c'est l'induit en *cage d'écureuil*.

La réaction d'induit relative à l'un des courants partiels est proportionnelle à $i_1 \cos(\omega' t + \delta)$ ou $\cos(\omega_1 t + \delta - \alpha_1)\cos(\omega' t + \delta)$; remplaçant les produits des cosinus par une somme et tenant compte des relations $\omega_1 + \omega' = \omega + 2\omega'$ et $\omega_1 - \omega' = \omega$, on peut écrire

$$\Phi_0 = B\{\cos[(\omega + 2\omega')t + 2\delta - \alpha_1] + \cos(\omega t - \alpha_1)\}.$$

On aura, de même, pour une barre située dans l'azimut ε par rapport à la première,

$$\Phi_\varepsilon = B\{\cos[(\omega + 2\omega')t + 2\delta - \alpha_1 + 2\varepsilon] + \cos(\omega t - \alpha_1)\}.$$

S'il existe n barres réparties régulièrement sur une demi-circonférence ou sur une circonférence, la somme des premiers termes est nulle, puisqu'elle représente la projection du contour d'un polygone régulier, et il reste

$$\Phi_n = nB\cos(\omega t - \alpha_1).$$

La réaction d'induit est alors synchrone avec le champ. Ce serait encore le cas de deux cadres rectangulaires.

Le problème ne change pas si le champ alternatif tourne avec la vitesse $-\omega'$ et que l'induit reste immobile. Avec un champ alternatif tournant, on obtiendra ainsi sur un circuit fixe un courant alternatif à deux périodes.

II. Dans un champ tournant, circulaire ou elliptique, un conducteur de forme quelconque est parcouru par des courants induits qui tendent à lui donner la même vitesse de rotation que le champ.

Considérons un champ F circulaire qui fait l'angle ωt avec une direction fixe ; le flux qu'il émet dans un cadre de surface S

animé d'une vitesse de rotation ω', dont l'axe magnétique est dans l'azimut $\omega' t - \delta$, a pour expression, en posant $FS = A$ et $\omega_1 = \omega - \omega'$,

$$\Phi = FS \cos[(\omega - \omega')t + \delta] = A \cos(\omega_1 t + \delta).$$

La force électromotrice et le courant induit sont

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \delta),$$

$$i = \frac{A\omega_1}{a_1} \sin(\omega_1 t + \delta - \alpha_1),$$

$$\frac{r}{\cos\alpha_1} = \frac{L\omega_1}{\sin\alpha_1} = a_1 = \sqrt{r^2 + L^2\omega_1^2},$$

$$I_m^2 = \frac{A^2\omega_1^2}{2a_1^2} = \frac{A^2}{2}\,\frac{\omega_1^2}{r^2 + L^2\omega_1^2}.$$

Le couple moteur devient alors

$$FSi\sin(\omega_1 t + \delta) = \frac{A^2\omega_1}{a_1} \sin(\omega_1 t + \delta)\sin(\omega_1 t + \delta - \alpha),$$

et sa valeur moyenne

$$C = \frac{A^2\omega_1\cos\alpha_1}{2a_1} = r\,\frac{A^2\omega_1}{2a_1^2} = \frac{r}{\omega_1} I_m^2.$$

Comme la perte en chaleur est $Q = rI_m^2$, il en résulte

$$U = C\omega' = \frac{\omega'}{\omega_1} rI_m^2 = \frac{\omega'}{\omega_1} Q = \omega_1\omega'\frac{rA^2}{2a_1^2},$$

$$W = Q + U = \frac{\omega_1 + \omega'}{\omega_1} Q = \frac{\omega}{\omega_1} Q,$$

$$u = \frac{U}{W} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Plusieurs remarques importantes sont à faire sur ce genre de moteurs qui a reçu beaucoup d'applications :

1° Le courant moyen croît avec ω_1 et sa valeur maximum I_0

a lieu quand l'induit est en repos. On a alors, en posant

$$\frac{r}{\cos\alpha} = \frac{L\omega}{\sin\alpha} = a = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2},$$

$$I_0^2 = \frac{A^2}{2}\frac{\omega^2}{a^2} = \frac{A^2}{2}\frac{\omega^2}{r^2 + L^2\omega^2} = \frac{A^2}{2L^2}\sin^2\alpha.$$

L'angle α est voisin de 90° quand la résistance r est très petite par rapport à la réactance $L\omega$. Afin d'éviter un échauffement exagéré, on introduit d'abord dans l'induit des résistances auxiliaires que l'on supprime à partir d'une certaine vitesse; le courant s'annulerait pour $\omega_1 = 0$ ou $\omega' = \omega$, c'est-à-dire au synchronisme.

2° La valeur initiale du couple moteur moyen est

$$C_0 = \frac{r}{\omega} I_0^2 = \frac{A^2}{2}\frac{\omega r}{a^2}.$$

Cette circonstance est un précieux avantage dans la pratique, car l'appareil se met en marche de lui-même et peut vaincre d'abord des résistances notables. Le maximum C_m du couple moyen est donné par la condition

$$\frac{r^2}{\omega_1} = L^2\omega_1, \qquad L\omega_1 = r, \qquad C_m = \frac{A^2}{4L}.$$

Au-delà, le couple diminue pour s'annuler au synchronisme. C'est encore sous une vitesse supérieure à celle du maximum que la machine doit fonctionner.

3° La valeur de U est proportionnelle à $\frac{\omega_1\omega'}{a_1^2} = \frac{\omega_1(\omega - \omega_1)}{r^2 + L^2\omega_1^2}$, dont le maximum a lieu pour

$$(\omega - 2\omega_1)(r^2 + L^2\omega_1^2) = 2L^2\omega_1^2(\omega - \omega_1),$$

$$1 - 2\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{L^2\omega^2}{r^2}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \operatorname{tang}^2\alpha,$$

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}}{\operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

La vitesse correspondante est inférieure à celle du couple maximum, puisqu'on a toujours $\alpha_1 < \alpha$.

On verrait encore aisément qu'avec une série de cadres distribués régulièrement sur une circonférence, ou une série de barres en cage d'écureuil, la réaction d'induit serait nulle.

III. Pour provoquer le démarrage des moteurs à induit fermé dans un champ alternatif (I), on a souvent recours aux propriétés des champs tournants en employant deux paires d'inducteurs à angle droit dans lesquels on dirigera finalement le courant alternatif pour constituer une machine à quatre pôles. Le problème consiste alors à exciter d'abord ces inducteurs par des courants temporaires de phases différentes. Il n'est même pas nécessaire que l'induit soit amené jusqu'au synchronisme correspondant, puisque la vitesse doit être diminuée de moitié dès que les quatre fils deviennent alternativement de signes contraires par le courant commun.

La question est importante au point de vue industriel pour obtenir un démarrage automatique dans un sens déterminé, la symétrie du système ne comportant *a priori* aucune direction pour le mouvement. Nous indiquerons quelques unes des solutions du problème.

Un premier moyen consiste à utiliser le courant primaire et le courant secondaire d'un transformateur à faible charge, mais cette disposition exigerait sans doute un enroulement spécial sur les inducteurs.

Avec deux circuits dérivés sur le courant principal, leur induction mutuelle est nulle. Les amplitudes correspondantes I_1 et I_2 des courants dérivés sont (397)

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{r_2^2 + L_2^2\omega^2}{r_1^2 + L_1^2\omega^2},$$

et leur différence de phase $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ est donnée par

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{L_1\omega}{r_1}, \qquad \operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{L_2\omega}{r_2}$$

Il suffit que les angles α_1 et α_2 soient inégaux, auquel cas le champ est elliptique et provoque la rotation de l'induit,

mais le couple moteur augmente à mesure que le champ se rapproche de la forme circulaire.

Avec un même enroulement sur les induits, si l'on donne des valeurs très grandes à l'une des résistances r_1 et au coefficient L_2 de l'autre branche, les impédances a_1 et a_2 restant de même ordre, l'angle α_1 sera très petit et α_2 voisin de 90°, ce qui satisfait au problème.

On annulerait d'ailleurs le coefficient d'induction de l'une des branches en y intercalant (**395**) une capacité C_1 définie par la condition $C_1 L_1 \omega^2 = 1$, c'est-à-dire telle que la période des décharges oscillantes propres à ce condensateur soit la même que celle du courant alternatif.

Enfin, la différence de phase δ sera de 90°, si l'on choisit cette capacité par la condition

$$\left(L_1 - \frac{1}{C_1 \omega^2}\right) L_2 \omega^2 + r_1 r_2 = 0.$$

Le champ tournant est alors circulaire lorsque les constantes des deux circuits dérivés satisfont aux équations suivantes, qui laissent encore beaucoup d'arbitraire dans le choix des données :

$$\frac{1}{C_1 \omega^2} - L_1 = \frac{r_1 r_2}{L_2 \omega^2},$$

$$r_1^2 + L_2^2 \omega^2 = r_1^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{L_2^2 \omega^2} = r_1^2 \left(1 + \frac{r_2^2}{L_2^2 \omega^2}\right).$$

888. Machine multiple. — Nous citerons, à titre d'exemple et pour fixer les idées, une transformation de la machine Gramme bipolaire qui permet de produire en même temps des courants continus et des courants polyphasés.

L'anneau A (fig. 286), enroulé à la manière habituelle, porte d'un côté son collecteur avec les balais C et C′, d'où le courant passe aux inducteurs que l'on supposera groupés en série. Trois autres conducteurs, pris en dérivation sur l'induit en trois points A_1, A_2 et A_3 séparés par l'angle de 120°, aboutissent respectivement à des bagues continues B_1, B_2 et B_3 sur lesquelles frottent des balais C_1, C_2 et C_3. Entre deux de ces balais la force électromotrice est sinusoïdale ; la phase varie successivement de 120° et ces trois électromoteurs alternatifs

sont groupés en triangle. Il suffira donc de faire communiquer ces balais avec trois conducteurs réunis finalement en triangle pour obtenir des courants triphasés i_1, i_2 et i_3.

Si l'on fait tourner l'anneau dans cet état, la machine s'a-

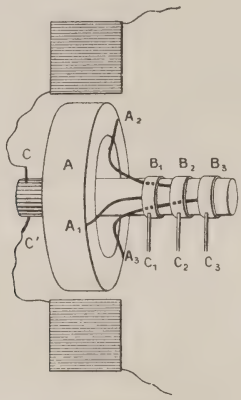


Fig. 286.

morce et produit, d'un côté des courants continus par les balais C et C', de l'autre des courants triphasés par les balais C_1, C_2 et C_3.

En excitant les inducteurs par un courant continu, la machine devient un moteur et fournit des courants alternatifs.

Inversement, quand on introduit par les bagues des courrants triphasés, l'anneau devient un aimant tournant ; il se met en marche dans le sens opposé, jusqu'au synchronisme, et l'on récoltera au collecteur un courant continu.

Si l'on imagine deux machines semblables réunies par leurs bagues, la rotation de la première, provoquée par des moyens mécaniques ou par un courant auxiliaire, tend à faire tourner la seconde au synchronisme et cette dernière fournira ensuite par son collecteur un courant continu.

CHAPITRE DEUXIÈME

CONSTANTES NUMÉRIQUES

889. Actions chimiques. — D'après les valeurs adoptées par le Congrès de Chicago (**421**), un ampère réduit $1^{mgr},118$ d'argent par seconde et décompose $0^{mgr},09323$ d'eau (**653**); il en résulte

ACTION D'UN AMPÈRE.

	Par minute.	Par heure.
Argent réduit (Ag = 107,93).....	$67,08^{mgr}$	$4,025^{gr}$
Cuivre réduit (Cu = 31,98).....	19,87	1,192
Eau décomposée.....	5,594	0,3356
Hydrogène.....	0,6215	0,03729
Volume d'hydrogène à 0° et 76°...	$6,938^{cc}$	$416,3^{cc}$
Gaz de l'eau	10,407	624,45

890. Résistances. — Tous les nombres qui suivent ont été rapportés à l'ohm international. Remarquons, en particulier, que si la résistivité d'un corps en unité C. G. S., c'est-à-dire la résistance d'un centimètre de longueur ayant un centimètre carré de section, est représentée par ρ, sa valeur en ohms est $\rho.10^{-9}$ et en microhms $\rho.10^{-3}$. Si l'on considère un fil de 100 mètres de longueur, la résistance est $\rho.10^{-3}$ ohms pour une section d'un millimètre carré et $\frac{4}{\pi}\rho.10^{-3} = 1,273\rho.10^{-3}$ ohms pour un diamètre d'un millimètre. En appelant d la densité du corps, la section d'un mètre pesant un gramme est $\frac{1}{100d}$ et la résistance $\rho.100.100d = \rho d.10^{4}$, ou $\rho d.10^{-5}$ ohms.

Avec du cuivre dont la résistivité est 1600, par exemple, la résistance d'un fil de 100 mètres est 1,6 ohm pour un millimètre carré de section, 2,037 ohms pour un millimètre de diamètre, ou sensiblement 1 ohm par 50 mètres, et 0,1424 ohms pour un mètre d'un gramme.

La conductivité c est l'inverse de la résistivité ; pour le cuivre précédent, elle serait de $6,25.10^{-4}$.

891. Métaux et alliages. — Les qualités électriques d'un *métal* (**688**) varient beaucoup avec les moindres impuretés qu'il renferme et aussi avec les opérations mécaniques qu'il a subies, écrouissage, recuit, compression, etc., de sorte qu'il est très difficile d'obtenir des résultats ayant une signification bien définie. On doit donc prévoir que les valeurs obtenues par différents expérimentateurs ne présenteront pas une grande concordance, malgré la précision que comportent les mesures électriques, et on ne doit pas attacher une grande importance au chiffre des millièmes.

Le tableau suivant des résistivités ρ_0 à la température de la glace fondante, pour les principaux métaux, et des conductivités c_0 correspondantes est déduit des expériences assez anciennes de Matthiessen.

	ρ_0.	c_0.
Argent recuit.....	1488	$67,41.10^{-5}$
— écroui.....	1615	61,92
Cuivre recuit.....	1580	63,29
— écroui.....	1616	61,88
Or recuit.....	2035	49,24
— écroui.....	2071	48,29
Aluminium.....	2881	34,70
Zinc comprimé...	5564	19,97
Platine recuit.....	8955	11,17
Fer —	9608	10,41
Nickel —	12321	8,116
Étain comprimé.....	13066	7,654
Plomb —	19410	5,152
Antimoine comprimé.....	35110	2,848
Bismuth —	129800	0,776
Mercure.....	9407	1,063

Sur des métaux préparés avec le plus grand soin, MM. Dewar et Fleming, ont obtenu les valeurs suivantes de ρ_0 et du

coefficient moyen de variation α_{50} de la résistance entre les températures de 0° et de 100°.

	ρ_0.	$\alpha_{50}.10^5$.		ρ_0.	$\alpha_{50}.10^5$.
Argent.....	1 468	400	Cadmium.....	10 023	419
Cuivre.....	1 561	428	Palladium.....	10 219	354
Or.....	2 197	377	Platine.....	10 917	367
Aluminium.....	2 665	435	Nickel.....	12 323	622
Magnésium.....	4 355	381	Étain.....	13 048	440
Zinc.....	5 751	406	Thallium.....	17 633	398
Fer.....	9 065	625	Plomb.....	20 380	411

Le désaccord des observateurs est encore plus grand en ce qui concerne les valeurs du coefficient α. La résistance électrique tend à s'annuler à la température du zéro absolu, mais la marche du phénomène ne paraît pas uniforme. Entre les températures de 0° et de — 100°, les valeurs I et II obtenues respectivement pour le coefficient moyen α_{-50}, par MM. Cailletet et Bouty, puis par MM. Dewar et Fleming, sont des quantités de même ordre :

	$\alpha_{-50}.10^5$.			$\alpha_{-50}.10^5$.	
	I.	II.		I.	II.
Argent.....	385	384	Fer.....	490	531
Cuivre.....	423	410	Nickel.....	»	500
Aluminium.....	388	390	Platine.....	340	354
Magnésium.....	390	»	Étain.....	424	509

Le *mercure* présente un intérêt particulier à cause de son usage pour la construction des étalons. L'influence de la température sur la résistance apparente d'une colonne renfermée dans un tube de verre dépend de la nature du verre ; avec une formule parabolique $1 + \alpha t + \beta t^2$, les coefficients ont alors des valeurs voisines de $\alpha = 86.10^{-5}$ et $\beta = 10^{-6}$.

En tenant compte de la dilatation de l'enveloppe, M. Guillaume [1] a obtenu pour le mercure, entre les températures de 0° et 100° rapportées à l'échelle normale, les deux systèmes équivalents :

$$\alpha = 0{,}000\,887\,45, \qquad \beta = 0{,}000\,001\,0181\,;$$
$$\alpha' = 888\,79, \qquad \beta' = 10022.$$

[1] C. E. Guillaume, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXV, p. 414; 1892.

Pour la mesure des températures élevées par la résistance des fils métalliques, on ne peut pas admettre que la variation soit linéaire [1] et les modifications allotropiques de certains métaux se manifestent par des changements brusques dans la loi de conductibilité.

Les *alliages* présentent des difficultés de même ordre, au point de vue physique ou mécanique, et leur composition exacte est souvent assez mal définie. Le premier tableau I est encore emprunté à MM. Dewar et Fleming, le second II aux expériences de MM. Feussner et Lindeck [2]. Le coefficient α_{15} se rapporte à la température moyenne de 15°.

I.

	ρ_0.	$\alpha_{15}.10^5$.
Silverine (77 Cu; 17 Ni; 2 Fe; 2Zn; 2 Co)	2 064	285
Aluminium, Cuivre (94 Al; 6 Cu)	2 904	381
Aluminium, Argent (94 Al; 6 Ag)	4 641	238
Or, Argent (90 Au; 10 Ag)	6 280	124
Cuivre, Aluminium (97 Cu; 3 Al)	8 847	89,7
Cuivre, Nickel, Aluminium (87 Cu; 6,5 Ni; 6,5 Al)	14 912	64,5
Platine, Rhodium (90 Pt; 10 Rd)	21 142	143
Acier au Nickel (4,35 °/₀ Ni)	29 452	201
Maillechort	29 982	27,3
Platine, Iridium (80 Pt; 20 Ir)	30 896	82,2
Platine, Argent (33 Pt; 66 Ag)	31 582	24,3
Platinoïde	41 731	31
Manganine (84 Cu; 12 Mn; 4 Ni)	46 678	0
Acier au Manganèse (12 °/₀ Mn)	67 148	127

II.

Maillechort (60,16 Cu; 25,37 Zn; 14,03 Ni; 0,3 Fe)	30 000	36
Patent Nickel (74,41 Cu; 0,52 Zn; 24,14 Ni; 0,70 Fe; 0,17 Mn)	32 700	21
Nickeline (54,57 Cu; 20,44 Zn; 24,48 Ni; 0,64 Fe; 0,27 Mn)	44 700	33
Nickel, Manganèse, Cuivre (73 Cu; 3 Ni; 24 Mn)	47 600	— 3
Rheotan (53,28 Cu; 16,89 Zn; 25,31 Ni; 4,46 Fe; 0,37 Mn)	52 400	+ 4,1
Manganèse, Cuivre (70 Cu; 30 Mn)	100 300	4

892. Liquides. — La conductance des dissolutions croît d'abord avec la richesse et passe généralement par un maxi-

(1) L. Holborn et W. Wien. *Wied. Ann.*, t. XLVII; 1892 et LVI; 1895.
(2) Feussner et Lindeck, *Zeitschr. fur Instr. Kund.*, t. IX, p. 233; 1889.

mum, surtout quand il s'agit de corps très solubles ; en outre, elle augmente avec la température (**691**).

La résistivité des liquides étant beaucoup plus grande, on l'exprimera en ohms. Voici quelques résultats empruntés aux expériences de MM. Kohlrausch et Nippolt, par la méthode des courants alternatifs (**665**).

RÉSISTIVITÉ DE SOLUTIONS DANS L'EAU A LA TEMPÉRATURE DE 18°.

Poids du corps en centièmes.	Sel marin.	Chlorhydrate d'ammoniaque.	Sulfate de soude.	Sulfate de zinc.	Potasse.
5	14,97	10,82	24,82	52,40	5,86
10	8,34	5,683	14,74	31,44	3,80
15	6,16	3,898	11,37	24,19	2,37
20	5,15	2,995	»	21,94	2,02
25	4,72	2,501	»	21,43	1,87
30	»	»	»	23,01	1,86
35	»	»	»	28,58	1,98

Poids du corps en centièmes.	Acide sulfurique.	Acide azotique.	Acide chlorhydrique.	Azotate d'argent.	Iodure de potassium.
5	4,84	3,92	2,56	39,31	29,49
10	2,58	2,19	1,59	21,39	14,75
15	1,86	1,65	1,35	14,74	9,62
20	1,55	1,42	1,32	11,64	6,92
25	1,41	1,31	1,39	9,53	5,39
30	1,38	1,29	1,52	8,13	4,38
35	1,39	1,31	1,71	7,20	3,67
40	1,49	1,38	1,95	6,46	2,25
50	1,87	1,59	»	5,45	2,57
60	2,70	1,96	»	4,81	2,27
70	4,67	2,55	»	»	»
80	9,15	3,78	»	»	»

MAXIMUM DE CONDUCTANCE.

Corps dissous.	Poids en centièmes.	Densité.	Résistivité.
Acide azotique.....	20,7	1,185	1,287
Acide chlorhydrique ..	18,3	1,1092	1,315
Acide sulfurique.....	30,4	1,224	1,364
Potasse.....	28,0	1,274	1,850
Sulfate de zinc.....	23,5	1,286	21,35

ACIDE SULFURIQUE A 22° (Kohlrausch et Nippolt).

Densité. de la dissolution.	Proportion d'acide.	Résistivité.	Accroissement de conductance pour 1°.
0,9985	0,0	70,41	$0,47 . 10^{-2}$
1,0000	0,2	41,05	0,47
1,0504	8,3	3,252	0,653
1,0989	14,2	1,787	0,646
1,1431	20,2	1,414	0,799
1,2045	28,0	1,239	1,317
1,2631	35,2	1,239	1,259
1,3163	41,5	1,347	1,410
1,3547	46,0	1,487	1,674
1,3994	50,4	1,672	1,582
1,4482	55,2	1,962	1,417
1,5026	60,3	2,412	1,794

SULFATE DE CUIVRE A 10° (Ewing et Mac Gregor).

Densité.	Résistivité.	Densité.	Résistivité.
1,0167	164,4	1,1386	35,0
1,0216	134,8	1,1432	34,1
1,0318	98,7	1,1679	31,7
1,0622	59,0	1,1829	30,6
1,0858	47,3	1,2051	20,3
1,1174	38,1	(saturée).	

SULFATE DE ZINC A 10° (Ewing et Mac Gregor).

1,0140	182,9	1,2709	28,5
1,0187	140,8	1,2891	28,3
1,0278	111,1	1,2895	28,5
1,0540	63,8	1,2987	28,7
1,0760	50,8	1,3288	29,2
1,1019	42,1	1,3530	31,0
1,1582	33,7	1,4053	32,1
1,1845	32,1	1,4174	33,4
1,2186	30,3	1,4220	33,7
1,2562	29,2	(saturée).	

ACIDE AZOTIQUE (densité = 1,36).

Température.	Résistivité.	Température.	Résistivité.
2°	1,74	16°	1,39
4	1,83	20	1,30
8	1,65	24	1,22
12	1,50	28	1,28

SOLUTION DE CHLORURE DE POTASSIUM.

M. Bouty a déterminé avec des soins particuliers la résistance des dissolutions de *chlorure de potassium* qui servent souvent comme termes de comparaison. On a alors, entre 0° et 30°, en désignant par m le nombre d'équivalents ($74^{gr},59$) par litre et posant $\rho_0 = \rho(1 + \alpha t)$,

m.	ρ_0,	α.	m.	ρ_0.	α.
3	5,172	0,0230	0,2	72,23	0,0326
2	7,785	0,0259	0,1	141,0	0,0327
1	15,415	0,0291	0,01	1325	0,0333
0,5	30,49	0,0302	0,001	12697	0,0333

893. Forces électromotrices. — Si on représente par 100 la différence de potentiel de contact du zinc et du cuivre, le contact du zinc avec différents métaux donnerait les nombres suivants, d'où l'on déduira les valeurs relatives au contact de ces métaux entre eux :

CONTACT DES MÉTAUX.

		Volta.	Kohlrausch.	Hankel.	Ayrton et Perry
Zinc |	Platine.....	»	123	123	131
—	Charbon.....	»	»	122	146
—	Palladium	»	»	115	»
—	Or.....	»	115	110	»
—	Argent.....	109	109	118	»
—	Cuivre.....	100	100	100	»
—	Fer.....	82	75	84	80
—	Mercure.....	»	»	81	»
—	Bismuth.....	»	»	72	»
—	Antimoine....	»	»	69	»
—	Étain.....	55	»	23	37
—	Plomb.....	45	»	44	28
—	Cadmium.....	»	»	24	»
—	Aluminium....	»	»	—25	»

D'après Kohlrausch, le contact zinc | cuivre vaudrait environ un demi-Daniell, ou $0^v,5$; M. Pellat a trouvé $0^v,80$ par des mesures électrométriques directes et l'expérience de Lord Kelvin (720) conduirait à $0^v,85$.

Les résultats obtenus par les différents expérimentateurs, pour le contact des métaux avec les liquides ou des liquides entre eux, ne sont pas assez concordants pour que l'on puisse les résumer simplement.

FORCES ÉLECTROMOTRICES DE CONTACT A 25° DÉDUITES DE L'EFFET PELTIER [1].

		v			v
Cuivre	Antim., E. B. [2].	—0,0151	Cuivre	Maillechort	+0,00287
—	Antimoine	—0,0056	—	Bismuth pur,..	+0,0222
—	Fer.....	—0,0029	—	Bismuth E. B. [3].	+0,0300
—	Cadmium.....	—0,00053	—	Sulfate à 12°...	+0,212 [4]
—	Zinc.....	—0,00045	Zinc	Sulfate à 12°.....	+0,241

894. Couples à liquides. — On a vu (710) que la force électromotrice des couples étalons à la température de 15° est

Daniell (modèle de Lord Kelvin)..... $1^{v},074$,
Latimer Clark..... $1^{v},434$.

Le couple étalon de M. Gouy vaudrait $1,3944\,(1 - 0,002t)$. Les nombres trouvés par M. Limb (712) diffèrent très peu des précédents :

COUPLES USUELS.

	v
Volta (zinc, eau, cuivre).....	0,85
Leclanché (zinc amalgamé, solution de sel ammoniac, bioxyde de manganèse, charbon).....	1,46
Warren de la Rue (zinc, solution de sel ammoniac, chlorure d'argent, argent).....	1,02
Daniell (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 12 eau, solution saturée de sulfate de cuivre, cuivre).....	0,97
J. Regnauld (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 12 eau, sulfate de cadmium, cadmium).....	0,34
Marié-Davy (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 12 eau, sulfate de protoxyde de mercure, charbon).....	1,51
Bunsen (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 12 eau, acide azotique fumant, charbon).....	1,94
Grove (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 4 eau, acide azotique fumant, platine).....	1,95
Poggendorff (zinc amalgamé, 12 bichromate de potasse + 25 acide sulfurique + 100 eau, charbon).....	2,01

(1) Le Roux, *Ann. de Chim. et de Phys.* [4], t. X, p 248; 1867.
(2) 1 éq. d'antimoine, 1 éq. de cadmium et 1/5 du poids total de bismuth.
(3) 10 bismuth + 1 antimoine.
(4) Bouty, *Journ. de Phys.*, t. IX, p. 229; 1880.

895. Couples thermoélectriques. — Dans la plupart des cas, la force électromotrice d'un couple se représente par une parabole (203), et le pouvoir thermoélectrique des deux métaux est une fonction linéaire de la température (730). La chaleur spécifique d'électricité étant nulle pour le plomb, on peut écrire, si on rapporte tous les métaux au plomb,

$$\varphi(t) = \frac{dE}{dt} = A + Bt = k(t_n - t).$$

Le coefficient $k = -B$ est alors le rapport constant de la chaleur spécifique d'électricité à la température absolue (210); le point neutre t_n du couple formé par le métal considéré avec le plomb satisfait à la condition $A + Bt_n = 0$.

Pour deux métaux différents M et M', on a

$$\frac{dE}{dt} = A + Bt - (A' + B't).$$

Le point neutre t_n est encore déterminé par la condition

$$A - A' + (B - B')t_n = 0.$$

La force électromotrice E_1^2, entre les températures t_1 et t_2 dont la moyenne est $\theta = \frac{t_1 + t_2}{2}$, du couple formé par ces deux métaux a pour expression

$$E_1^2 = (B' - B)(t_2 - t_1)\left[\frac{A - A'}{B - B'} - \theta\right].$$

Cette force électromotrice est égale au produit de la différence de température $t_2 - t_1$ des deux soudures par la différence des pouvoirs thermoélectriques des métaux relatifs à la température moyenne θ.

Il n'y a pas lieu de s'étonner que les nombres obtenus par différents expérimentateurs ne soient pas très concordants, à cause de l'influence des impuretés ou des changements d'état physique. Il est difficile, par exemple, avec des barreaux de bismuth préparé par fusion, d'obtenir des couples bismuth-

cuivre identiques à $\frac{1}{10}$ près; l'addition d'un dixième d'antimoine au bismuth fait presque doubler la force électromotrice du couple.

Dans le tableau suivant, les premiers nombres ont été calculé d'après les expériences de M. Tait [1], en admettant que la force électromotrice du couple de Grove pris comme terme de comparaison soit égale à $1^{v},95$; les autres proviennent de différents observateurs.

POUVOIRS THERMOÉLECTRIQUES EN MICROVOLTS, RAPPORTÉS AU PLOMB.

Corps.	A.	B.10².	A + Bt à 20°.	A + Bt à 50°.
Cadmium	— 2,63	— 4,24	— 3,48	— 4,75
Zinc	— 2,32	— 2,38	— 2,79	— 3,51
Argent	— 2,12	— 1,47	— 2,41	— 2,86
Or	— 2,80	— 1,01	— 3,00	— 3,30
Cuivre	— 1,34	— 0,94	— 1,52	— 1,81
Alliage (85 Pt + 15 Ir)	— 7,90	— 0,62	— 8,03	— 8,21
Alliage (95 Pt + 5 Ir)	— 6,15	— 0,55	— 6,26	— 6,42
Étain	+ 0,43	— 0,55	+ 0,32	+ 0,16
Aluminium	+ 0,76	— 0,39	+ 0,68	+ 0,56
Platine écroui	— 2,57	+ 0,74	— 2,42	— 2,20
Magnésium	— 2,22	+ 0,94	— 2,03	— 1,75
Platine malléable	+ 0,60	+ 1,09	+ 8,82	+ 1,15
Alliage (90 Pt + 10 Ir)	— 5,90	+ 1,33	— 5,63	— 5,23
Acier	— 11,27	+ 3,25	— 10,62	— 9,65
Palladium	+ 6,18	+ 3,55	+ 6,90	+ 7,96
Fer	— 17,15	+ 4,82	— 16,20	— 14,74
Maillechort	+ 11,94	+ 5,06	+ 12,95	+ 14,47
Nickel (— 18° à 175°)	+ 21,80	+ 5,06	+ 22,80	+ 24,33
— (— 250° à 300°)	+ 83,57	— 23,84	+ 78,80	+ 71,65
— au delà de 340°	+ 3,04	+ 5,06	+ 8,00	+ 5,57
Charbon de cornue [2]	+ 20,54	— 2,9	+ 19,96	+ 19,09
Alliage (20 Pt + 80 Ag)	— 26,83	— 12,4	— 29,31	— 33,03
» (25 Pt + 75 Ag)	— 35,2	— 18,65	— 38,93	— 44,52
» (65 Pt + 35 Ag)	— 40,93	— 24,1	— 45,75	— 52,89
» (95 Au + 5 Fe)	— 41,06	+ 14,9	+ 38,08	— 33,61
Manganèse-Thallium, de 25 à 50 °/° de thallium	+ 6,64	— 1,53	+ 6,33	+ 5,88
Platinoïde [3]	—1128	—410	—1210	—1333

[1] Tait, *Phil. Trans. R. S. E.*, t. XXVII, p. 125; 1873.
[2] Mac Gregor et C.-G. Knott, *Phil. Trans. E. R. S.*, t. XXVIII, p. 321; 1879.
[3] Bottomley et Tanakadati, *Proc. L. R. S.*, t. XLVI, p. 286; 1889.

M. Fleming Jenkin [1] a déduit des expériences de M. Matthiessen les pouvoirs thermoélectriques de différents corps par rapport au plomb, à la température de 20°.

Bismuth ord. comprimé..	+96	Argent pur écroui.....	— 3,0
— pur — ..	+88	Zinc pur comprimé.....	— 3,7
— cristallisé axial..	+64	Cuivre galvanoplastique..	— 3,8
— — équat.	+45	Antimoine comprimé....	— 6,0
Cobalt.....	+22	Arsenic	— 13,41
Maillechort	+11,63	Acier (cordes de piano)..	— 17,31
Mercure.....	+ 0,413	Antimoine axial	— 22,4
Étain ou Cuivre.....	— 0,1	— équatorial.....	— 26,1
Platine	— 0,9	Phosphore rouge.....	— 29,4
Or.....	— 1,2	Tellure.....	—500,0
Antimoine comprimé....	— 2,8	Sélénium.....	—800,0

D'après Ed. Becquerel [2], les couples formés par le cuivre avec différents métaux ou alliages donneraient

Couple formé avec le cuivre et l'un des métaux suivants.	Force électromotrice entre 0° et 100° [3]		Pouvoir thermoélectrique à 50° en microvolts	
	en millièm. de Daniell.	en millièm. de volt.	par rapport au cuivre.	par rapport au plomb.
Tellure.....	+39,95	+42,74	—427,4	— 429,3
Sulfure de cuivre fondu..	+32,76	+35,05	—350,5	— 352,4
Antimoine et cadmium [4].	+18,13	+19,40	—194,0	— 195,0
Antimoine et zinc [4]...	+ 9,02	+ 9,65	— 96,5	— 98,4
Antimoine ordinaire.....	+ 1,41	+ 1,51	— 15,1	— 17,0
Fer du commerce.....	+ 0,95	+ 1,02	— 10,2	— 12,1
— autre fil.....	+ 0,674	+ 0,72	— 7,2	— 9,1
Cadmium fondu.....	+ 0,033	+ 0,035	— 0,35	— 2,45
Argent en fil.....	+ 0,026	+ 0,028	— 0,28	— 2,18
Zinc ordinaire fondu.....	— 0,018	— 0,019	+ 0,19	— 1,71
— autre	— 0,037	— 0,039	+ 0,39	— 1,51
Platine en fil	— 0,090	— 0,096	+ 0,96	— 0,94
— autre.....	— 0,378	— 0,404	+ 4,04	+ 2,14
Charbon de cornue.....	— 0,142	— 0,152	+ 1,52	— 0,38
Étain ordinaire.....	— 0,147	— 0,157	+ 1,57	— 0,33
Plomb ordinaire.....	— 0,187	— 0,19	+ 1,9	»
Mercure.....	— 0,483	— 0,52	+ 5,2	+ 3,3
Palladium en fil.....	— 0,82	— 0,88	+ 8,8	+ 6,9
Maillechort en fil.....	— 1,26	— 1,35	+ 13,6	+ 12,7
Nickel en fil.....	— 1,63	— 1,74	+ 17,4	+ 15,5
Bismuth ordinaire.....	— 3,91	— 4,18	+ 41,8	+ 39,9
10 Bismuth + 1 Antimoine.	— 6,20	— 6,63	+ 66,3	+ 64,4

(1) Fl. Jenkin, *Electricity and magnetism.*, p. 176; 1373.
(2) Ed. Becquerel, *Ann. de Chim. et de Phys.*, [4], t. VIII, p. 389; 1866.
(3) Le courant va du métal au cuivre par la soudure chaude quand la force électromotrice est positive. — (4) Équivalents égaux.

On a souvent pris comme terme de comparaison le couple bismuth-cuivre, dont la marche est régulière entre les températures de 0° et de 100°, mais sa valeur absolue est mal définie. Un volt vaudrait 164 couples bismuth-cuivre entre 0° et 100°, d'après J. Regnauld (**712**); les nombres obtenus par d'autres observateurs varient de 210 à 239.

896. Constantes magnétiques. — Les grandeurs magnétiques sont toujours évaluées en unités C. G. S., parce que ce système de mesures conduit à des nombres beaucoup plus simples que les unités pratiques :

ÉLÉMENTS DU MAGNÉTISME TERRESTRE

(à Paris, au 1er janvier 1897).

		Variation annuelle.
Déclinaison	15° 1′,5	—5′,3
Inclinaison	65° 0′,8	—1′,6
Composante horizontale	0,19693	+0,00017
Composante verticale	0,42256	—0,00016
Force totale	0,46619	—0,00008

Nous avons indiqué déjà (**820**) les qualités magnétiques d'un bon fer forgé et recuit; voici quelques autres valeurs de l'induction F_1 et de la perméabilité μ (Ewing).

	Échantillons de fer.							
	I.		II.		III.		Fonte grise.	
Champ F.	F_1.	μ.	F_1.	μ.	F_1.	μ.	F_1.	μ.
0,2	126	630	62	310	85	425	»	»
0,5	377	756	224	448	214	428	»	»
1	1 449	1 449	840	840	885	885	»	»
2	4 564	2 284	3 533	1 766	2 417	1 208	2 500	1 250
5	9 900	1 980	8 293	1 658	8 884	1 777	4 000	800
10	13 023	1 302	12 540	1 254	11 388	1 139	5 000	500
20	14 911	745	14 710	735	13 273	664	5 900	295
50	16 217	324	16 062	321	13 890	278	7 250	145
100	17 148	171	17 900	179	14 837	148	8 500	85

Pour les corps *diamagnétiques*, à l'exception du bismuth et de l'antimoine (**833**), le coefficient d'aimantation est à peu

près indépendant de la température, sans que le phénomène de la fusion paraisse apporter aucune modification notable dans la valeur de ce coefficient.

Les nombres suivants sont empruntés aux expériences de Faraday, Ed. Becquerel et M. P. Curie.

VALEURS DE $-k.10^6$.

	Faraday.	Becquerel.	Curie.
Soufre	0,87	0,76	0,51
Phosphore	1,24	1,10	0,92
Sélénium	1,25	1,11	0,32
Tellure	»	»	0,311
Iode	»	»	0,385
Brome	»	»	0,41
Zinc	0,56	0,17	»
Plomb	»	1,03	»
Cuivre	1,27	»	»
Argent	1,74	»	»
Or	2,60	»	»
Eau	0,72	0,67	0,79
Sel gemme	»	»	0,58
Quartz	»	»	0,441
Cire	»	0,38	»
Éther	0,56	»	»
Alcool	0,58	0,53	»
Camphre	0,61	»	»
Huile de lin	0,63	»	»
Acide azotique	0,65	»	»
Sulfure de carbone	0,74	0,89	»
Acide sulfurique	0,77	»	»
Chlorure d'arsenic	0,91	»	»
Borate de plomb fondu	1,02	»	»
Chlorure de potassium	»	»	0,55
Sulfate de potasse	»	»	0,43
Azotate de potasse	»	»	0,33

Les corps faiblement *magnétiques* se comportent d'une manière toute différente, car le coefficient d'aimantation est sensiblement en raison inverse de la température absolue (**833**).

Pour les *dissolutions*, les valeurs suivantes, déterminées par Ed. Becquerel, correspondent à la température moyenne de 15°. La colonne k' désigne leurs rapports au coefficient de l'eau supposé égal à $0,67.10^{-6}$.

DISSOLUTIONS DANS L'EAU.

	Densité.	$k.10^6$.	k'.
Chlorure de sodium.....	1,2080	— 0,75	— 1,12
— de magnésium.....	1,3197	— 0,81	— 1,21
Protochlorure de fer.....	1,0695	+ 6,07	+ 9,06
— —	1,2767	+24,21	+36,13
— —	1,4334	+44,16	+65,91
Sulfate de cuivre.....	1,1265	+ 0,54	+ 0,81
— nickel.....	1,0827	+ 1,46	+ 2,18
— fer	1,1728	+12,09	+18,04
— —	1,1923	+14,17	+21,15
— sesquioxyde de fer.	1,1587	+ 9,24	+13,79

Les expériences de Quincke, par la méthode des changements de niveau (**832**), conduiraient à des valeurs très différentes, le coefficient de l'eau étant égal à $-4,27.10^{-10}$ pour une densité de 0,9983. Nous donnerons seulement les rapports au coefficient de l'eau.

DISSOLUTIONS DANS L'EAU. — MAGNÉTIQUES.

	Densité.	k'.
Sulfate de manganèse.....	1,4165	+51,7
—	1,1417	7,43
Chlorure de manganèse.....	1,3695	68,2
—	1,1891	32,1
Chlorure de fer.....	1,5083	77,5
—	1,0564	7,14
Sulfate de fer.....	1,2217	23,4
—	1,0750	6,83
— ammoniacal.....	1,1191	7,59
Chlorure de fer	1,3096	41,70
Sulfate de cobalt.....	1,2584	22,2
Sulfate double de cobalt et d'am.	1,1055	5,23
Chlorure de cobalt.....	1,1290	14,9
Sulfate de nickel.....	1,2921	10,44
— de nickel et d'amm.....	1,0429	0,13
Chlorure de nickel.....	1,1385	5,81
Alun de chrome.....	1,0471	0,56
Protochlorure de chrome.....	1,2030	11,11
Sesquichlorure de chrome.....	1,3866	6,73
Sulfate de didyme.....	1,1007	0,96
Ferrocyanure de potassium....	1,1381	1,53
Sulfate de cuivre.....	1,1651	+ 1,23

DISSOLUTIONS DANS L'EAU. — DIAMAGNÉTIQUES.

	Densité.	k'
Sulfate de cérium	1,2413	— 0,51
— de lanthane	1,0609	0,69
— de cuivre et d'amm.	1,0259	0,37
Bichromate de potasse	1,0545	0,833
Chlorure de zinc	1,4651	0,882
Ferricyanure de potassium	1,1723	0,915
Permanganate de potasse	1,0309	0,930
Ammoniaque	0,9307	0,959
Acide chlorhydrique	1,1651	0,981
Azotate de bismuth	1,6251	1,063
Sulfate de magnésie	1,25	1,067
Chlorure de zinc	1,8555	1,094
Sulfate de zinc	1,4393	1,101
Chlorure de calcium	1,3392	1,154
Iodure de potass. et de mercure.	3,0843	1,205
Iodure de baryum et de mercure.	3,5266	—1,420

CORPS DIVERS.

Chlorure de mang. dans l'alcool.	1,0304	+35,7
— dans l'alcool méthyl.	1,0806	41,6
Chlorure de fer dans l'ac. chlorhy.	1,3683	45,0
— — —	1,2600	18,3
— — —	1,2349	13,1
— dans l'acool méthylique.	1,5374	97,1
— — —	1,1335	43,7
— — —	0,8928	+11,1
Éther	0,7152	— 0,75
Alcool méthylique	0,7915	0,81
Alcool	0,7929	0,815
Benzol	0,8822	0,821
Essence de térébenthine	0,8690	0,823
Acide azotique	1,3872	0,831
Bichromate de potasse	1,0545	0,833
Pétrole	0,7988	0,858
Sulfure de carbone	1,2644	0,893
Soufre dans le sulf. de carbone.	1,3976	0,902
Huile de colza	0,9159	0,911
Iode dans le sulfure de carbone.	1,2636	0,925
Glycérine	1,2517	0,954
Acide sulfurique	1,8326	0,982
Brome	3,147	1,715
Phosphore	1,764	1,957
Mercure	13,546	— 3,142

Les rapports des coefficients d'aimantation des *gaz* à celui de l'air (**833**), pour les mêmes conditions de température et de pression, seraient

	Faraday.	Becquerel.	Quincke.	Efimoff [1]
Air	1	1	1	1
Oxygène	+5,120	+4,760	+4,916	+4,83
Azote	+0,087	»	+0,028	—0,015
Hydrogène	—0,027	»	0,023	—0,002
Chlore	»	—0,120	»	»
Acide carbonique	»	—0,133	0,090	—0,033
Ammoniaque	—0,146	—0,005	»	»
Protoxyde d'azote	»	—0,047	0,092	—0,018
Bioxyde d'azote	»	+1,300	»	+1,60
Cyanogène	—0,265	»	»	»
Acide sulfureux	»	—0,013	»	»
Éthylène	+0,172	—0,214	0,079	—0,068
Gaz des marais	»	»	0,036	—0,063

897. Pouvoirs rotatoires magnétiques. — Les déterminations les plus précises de la *constante de Verdet* (**479**), c'est-à-dire de la rotation du plan de polarisation entre deux points dont la différence de potentiel magnétique est égale à l'unité C. G. S., ont été faites sur le *sulfure de carbone*.

Pour la température de 0° et la raie D, on aurait

Gordon [2]	0'.04330	Kœpsel [4]	0',04297
L. Rayleigh [3]	0',04298	H. Becquerel [5]	0',04341

Variation avec la température [6] :

$$R = R_0(1 - 0{,}001\,04\,t - 0{,}000\,014\,t^2).$$

RAPPORT DES ROTATIONS DANS LE SPECTRE (Verdet).

Raies				
C.	D.	E.	F.	G.
0,592	0,768	1,000	1,234	1,704

(1) A. Efimoff, *Journ. de Phys.* [2], t. VII, p. 494; 1888.
(2) Gordon, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1877, p. 1.
(3) L. Rayleigh, *Proc. L. R. S.*, n° 232; 1884.
(4) Kœpsel, *Wied. Ann.*, t. XXVI, p. 456; 1885.
(5) H. Becquerel, *Ann. de Chim. et de Phys.* [5], t. XII; 1877 et [6], t. VI; 1885.
(6) E. Bichat, *Journ. de Phys.*, t. VII, p. 204; 1879 et t. IX, p. 275; 1889.

Pour l'*eau*, la constante de Verdet à la température de 15° est 0',0131, d'après M. H. Becquerel, dont les expériences conduisent aux valeurs suivantes pour un certain nombre de corps, *solides* ou *liquides*.

POUVOIRS ROTATOIRES A LA TEMPÉRATURE DE 15°

Lumière jaune (raie D).

	Densité.	Indice de réfraction.	Pouv. rotatoire rapporté au sulfure de carbone.	Pouv. rotatoire rapporté à l'eau.
Spath fluor	»	1,4332	0,206	0,668
—	»	»	0,234	0,760
Diamant	»	2,4200	0,301	0,977
Borax fondu	»	1,5010	0,405	1,315
Verre-crown	2,559	1,5260	0,481	1,561
— flint	3,168	1,5790	0,771	2,503
— —	3,540	1,6140	0,987	3,204
— —	4,380	1,7200	1,360	4,416
— —	4,860	1,7650	1,533	4,980
Spinelle	»	1.7150	0,496	1,610
Silvine	»	1,4830	0,672	2,182
Sel gemme	2,260	1,5430	0,843	2,737
Borate de plomb	»	1,7800	1,405	4,565
—	»	»	1,439	4,672
Silicate de plomb	»	1,8200	1,832	5,950
Blende	4,095	2,3690	5,295	17,19
Acide azotique fumant	»	1,4010	0,206	0,668
Acide sulfurique monohydr.	1,854	1,4284	0,247	0,803
Alcool méthylique	0,836	13,530	0,253	0,823
— propylique	0,811	1,3836	0,279	0,907
— butylique	0,807	1,3934	0,294	0,957
Eau	»	1,3340	0,308	1
Alcool amylique	0,815	1,4046	0,311	1,010
Chloroforme	»	1,4520	0,380	1,234
Protochlorure de carbone	»	1,4580	0,404	1,315
Chlorure de silicium	1,523	1,4090	0,444	1,442
Acide chlorhydrique	1,163	1,4071	0,490	1,590
Xylène	0,866	1,4932	0,525	1,702
Toluène	0,871	1,4928	0,575	1,868
Benzine	0,883	1,4998	0,636	2,064
Protochlorure de phosphore.	1.450	1,5080	0,651	2,114
— de carbone	»	1,5620	0,761	2,471
Bichlorure de soufre	»	1,6190	0,932	3,025

LUMIÈRE JAUNE (raie D).

	Densité.	Indice de réfraction.	Pouv. rotatoire rapporté au sulfure. de carbone.	Pouv. rotatoire rapporté à l'eau.
Protochlorure de soufre...	1,687	1,6460	0,984	3,195
Sulfure de carbone.....	1,263	1,6249	1	3,247
Chlorure d'arsenic.....	2,172	1,6006	1	3,247
Bichlorure d'étain.....	2,200	1,5060	1,035	3,360
Protochlorure d'antimoine.	2,280	1,5910	1,656	5,377
Soufre fondu (114°).....	1,96	1,9290	1,904	6,182
Sous sulf. de phosphore...	1,801	2,0661	2,592	8,416
Phosphore fondu (33°).....	1,77	2,0740	3,120	10,13
Bichlorure de titane.....	»	1,6043	—0,358	—1,13
LUMIÈRE ROUGE.				
Bromure de soufre.....	2,696	1,763	1,942	6,305
Brome.....	2,970	1,616	1,960	6,364
Chlorure de sélénium.....	2,589	1,807	2,408	7,85
Sélénium.....	4,300	2,655	10,960	35,60
Oxydule de cuivre.....	5,992	2,849	14,060	45,65
Acide chlorochromique....	»	»	— 0,08	— 0,26

Les valeurs obtenues par M. Jahn [1], rapportées à l'eau, sont assez différentes :

Alcool méthylique.....	0,892	Xylène.....	2,179
— éthylique.....	1,071	Toluène.....	2,355
Acétone.....	1,066	Benzine.....	2,544

Dans les *lames métalliques*, la rotation paraît proportionnelle à l'épaisseur; d'après M. Du Bois [2], la valeur maximum du pouvoir rotatoire magnétique, observé dans des champs très intenses, serait de 89 000° pour le nickel, 198 000° pour le cobalt et 209 000° pour le fer.

L'étude des *dissolutions* permet de calculer le pouvoir rotatoire moléculaire (480) du corps dissous. En prenant les rapports de tous les nombres à la valeur 0',013 adoptée pour le pouvoir rotatoire de l'eau, les expériences de Verdet et de H. Becquerel conduisent aux valeurs suivantes.

(1) JAHN, *Wied. Ann.*, t. XLIII, p. 293; 1891.
(2) DU BOIS, *Wied. Ann.*, t. XXXI, p. 941; 1887.

DISSOLUTIONS DANS L'EAU.

	Densité.	Poids dans l'unité de vitesse.	Pouvoir rotatoire.	Pouvoir rotatoire moléculaire.
Protochlorure d'étain.....	1,3280	0,401	+ 2,05	+ 2,78
—	1,1637	0,198	+ 1,52	+ 2,81
—	1,1112	0,120	+ 1,35	+ 2,71
Chlorure de zinc.....	1,2851	0,266	+ 1,51	+ 1,65
—	1,1595	0,150	+ 1,24	+ 1,59
Sel ammoniac.....	1,0718	0,247	+ 1,37	+ 2,15
—	1,0493	0,129	+ 1,18	+ 2,0
Chlorure de sodium.....	1,2052	0,316	+ 1,38	+ 1,58
—	1,1058	0,158	+ 1,19	+ 1,50
—	1,0546	0,079	+ 1,11	+ 1,72
Chlorure de potassium.....	1,6000	0,264	+ 1,25	+ 1,36
Iodure de potassium	1,6743	0,964	+ 2,60	+ 1,95
—	1,3398	0,482	+ 1,82	+ 1,98
—	1,1705	0,241	+ 1,40	+ 1,97
—	1,0871	0,120	+ 1,21	+ 2,08
Bichlorure de cuivre	1,5158	0,6408	+ 1,70	+ 1,29
—	1,2789	0,3204	+ 1,43	+ 1,47
—	1,1330	0,1602	+ 1,20	+ 1,45
Protochlorure de fer.....	1,4331	0,5283	+ 0,20	— 1,34
—	1,2141	0,2461	+ 0,76	— 0,70
—	1,1093	0,1320	+ 0,91	— 0,52
—	1,0548	0,0660	+ 0,95	— 0,51
Perchlorure de fer.....	1,6933	1,0247	—15,58	—15,87
—	1,5315	0,7657	— 8,77	—12,45
—	1,3230	0,4410	— 2,68	— 8,05
—	1,1681	0,2205	— 0,12	— 4,82
—	1,0864	0,1102	+ 0,62	— 3,21
—	1,0445	0,0551	+ 0,87	— 3,21
—	1,0232	0,0275	+ 0,94	— 2,17
Chromate de potasse.....	1,3598	0,504	+ 0,75	— 0,20
Bichromate de potasse.....	1,0786	0,109	+ 0,97	— 0,73
Acide chromique.....	1,3535	0,470	+ 0,31	— 1,21
Azotate d'urane.....	2,0267	1,2727	+ 0,41	— 0,27
—	1,7640	0,9245	+ 0,60	— 0,26
—	1,3865	0,4622	+ 0,81	— 0,25
—	1,1963	0,2311	+ 0,90	— 0,25
Chlorure de nickel.....	1,4685	0,5311	+ 2,08	+ 2,15
—	1,2432	0,2651	+ 1,51	+ 2,00
—	1,1233	0,1327	+ 1,25	+ 1,94
—	1,0690	0,0663	+ 1,12	+ 1,94

La solution saturée d'*iodure de potassium* et d'*iodure rouge de mercure* a un pouvoir rotatoire triple environ de celui du sulfure de carbone [1].

DISSOLUTIONS DANS L'ACIDE CHLORHYDRIQUE.

	Densité.	Poids dans l'unité de volume.	Pouvoir rotatoire.	Pouvoir rotatoire moléculaire.
Protochlorure d'antimoine.....	2,4755	2,1611	+4,64	+1,92
—	1,8573	1,0805	+3,45	+2,08
—	1,5195	0,5402	+2,67	+2,10
—	1,3420	0,2701	+2,13	+1,63
Chlorure de bismuth.....	2,0822	1,3204	+3,91	+2,28
—	1,6550	0,6602	+3,12	+2,76
—	1,4156	0,3301	+2,35	+2,69

POUVOIRS ROTATOIRES MOLÉCULAIRES PAR RAPPORT A L'EAU (Jahn).

Acide chlorhydrique.....	4,67	Bromure de sodium.....	9,19
Chlorure de lithium.....	4,61	— potassium.....	9,36
— sodium.....	5,36	— calcium.....	17,61
— potassium	5,66	— strontium.....	18,16
— calcium.....	9,39	— baryum.....	18,54
— strontium.....	9,71	— cadmium	19,70
— baryum.....	10,09	Sulfate de lithine.....	2,27
— cadmium	11,78	— soude.....	3,54
— manganèse.....	9,04	— potasse.....	3,57
Iodure de sodium.....	18,46	— cadmium.....	5,17
— potassium.....	18,95	— manganèse.....	2,28
— cadmium.....	40,89	Chromate de manganèse....	3,53
Azotate de soude.....	1,37	— potasse.....	3,55
— potasse.....	1,35		

Pour les *gaz* et *vapeurs*, le pouvoir rotatoire, ramené à la température de 0° et à la pression de 76c, est, d'après les expériences de M. H. Becquerel et de M. Bichat :

	$\rho.10^6$.		$\rho.10^6$.
Oxygène.....	6',28	Protoxyde d'azote.....	16',90
Air.....	6',83	Acide sulfureux.....	38',40
Azote.....	6',92	Éthylène.....	34',48
Acide carbonique.....	13',00	Sulfure de carbone.....	23',49

[1] A. Cornu et A. Potier, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CII, p. 387 ; 1866.

Il n'existe pas de relation absolue entre les propriétés magnétiques ou diamagnétiques des corps (481) et le sens de leur pouvoir rotatoire. Verdet donne la liste suivante des caractères relatifs aux principaux sels.

INFLUENCE DU CARACTÈRE MAGNÉTIQUE.

Pouvoir rotatoire négatif.	Pouvoir rotatoire positif.

CORPS MAGNÉTIQUES.

Sels de fer.	Sels de nickel.
— de sesquioxyde de manganèse.	— de cobalt.
Acide chromique.	— de protoxyde de manganèse.
Chromate de potasse.	Cyanure rouge de fer et de potassium.
Bichromate de potasse.	
Bichlorure de titane.	
Sels de cérium.	

CORPS DIAMAGNÉTIQUES.

Chlorate neutre de potasse.	Presque tous les corps.
Bichlorure de titane.	Molybdate de soude.
Nitrate d'urane.	Molybdate d'ammoniaque.
Sels de magnésium.	Sels d'aluminium.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE — MÉTHODES DE MESURE

CHAPITRE PREMIER

MESURES MÉCANIQUES

LONGUEURS, MASSES ET ANGLES

Nos		Pages
518.	Longueurs	1
519.	Masses	3
520.	Mesures angulaires	4
521.	Méthode du miroir	6
522.	Calcul de la déviation	8
523.	Gradulation des échelles	10
524.	Discussion de la méthode	11
525.	Miroirs courbes	15
526.	Appareils de projection	17

OSCILLATIONS.

527.	Equations du mouvement	18
528.	Oscillations isochrones	20
529.	Mouvement pendulaire	21
530.	Amortissement des oscillations	22
531.	Loi du carré de la vitesse	23
532.	Résistance proportionnelle à la vitesse	25
533.	Exemples	27
534.	Perturbations	29

535. Synchronisation 32
536. Percussions périodiques 33
537. Actions de courte durée 37
538. Tracé de l'indicatrice 40
539. Observation des oscillations 41
540. Méthode de Gauss 47
541. Mesure des impulsions 52
542. Méthodes de répétition 55
543. Mouvement apériodique 58

COUPLES

544. Moments d'inertie 61
545. Exemples 64
546. Déterminations expérimentales 67
547. Balance unifilaire 70
548. Lois de la torsion 71
549. Coefficients d'élasticité 72
550. Influence de la température 75
551. Fils de verre et de quartz. — Fils de cocon 76
552. Balance bifilaire 78
553. Comparaison de l'unifilaire et du bifilaire 84

CHAPITRE DEUXIÈME

PROPRIÉTÉS DES COURANTS CIRCULAIRES

554. Bobines cylindriques 86
555. Longueur du fil. — Rayon moyen 87
556. Volume et masse du fil 88
557. Résistance 89
558. Surface. — Moment magnétique 89
559. Champ électromagnétique 90
560. Action sur l'axe 92
561. Influence de la gorge 93
562. Bobine d'action maximum 94
563. Forme la plus avantageuse de la gorge 95
564. Fil de diamètre variable 99
565. Champ magnétique d'une couche circulaire 100
566. Champ d'un courant circulaire 103
567. Potentiel d'une couche sphérique 106
568. Feuillet sphérique 108
569. Champ d'une bobine simple 109
570. Bobine à plusieurs couches 110
571. Cas particuliers 111
572. Méthode de Maxwell 115
573. Valeurs moyennes 116

574. Action sur une aiguille aimantée 116
575. Bobine de Gaugain 119
576. Cadres de Von Helmholtz 119
577. Bobine à quatre cercles 122
578. Bobine à trois cercles 123
579. Bobines annulaires 124

CHAPITRE TROISIÈME

COEFFICIENTS D'INDUCTION

580. Courants parallèles 126
581. Moyennes distances géométriques 128
582. Self-induction de conducteurs parallèles 132
583. Milieux magnétiques 135
584. Induction mutuelle de deux cadres circulaires 137
585. Deux bobines de même axe 137
586. Emploi des intégrales elliptiques 141
587. Deux cadres circulaires quelconques 146
588. Cadres circulaires voisins 148
589. Self-induction d'une bobine 150
590. Bobine de self-induction maximum 153
591. Correction pour l'isolant 154
592. Actions réciproques 155
593. Deux courants circulaires 156
594. Emploi des séries 158
595. Deux bobines 159
596. Cas particulier 160
597. Système de trois bobines symétriques 161
598. Couple de rotation de deux cadres circulaires 163
599. Bobine et aimant 165

DEUXIÈME PARTIE. — MESURES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

ÉLECTROMÉTRIE

600. Caractère général des électromètres 166
601. Électromètre à feuilles d'or 167
602. Graduation des électromètres 169
603. Balance de Coulomb 170
604. Influence de la cage 172
605. Électromètre absolu de Lord Kelvin 174
606. Autres formes d'électromètres-balance 180
607. Électromètre à quadrants 182
608. Description de l'appareil 185
609. Discussion des expériences 189
610. Voltmètres industriels 195
611. Méthodes d'oscillations 196
612. Électromètres à décharges 197
613. Électromètre capillaire 201
614. Appareils à quartz 204

CHAPITRE DEUXIÈME

MESURE DES COURANTS

615. Différentes méthodes 207
616. Appareils de torsion 209
617. Boussole des sinus 211
618. Boussole des tangentes 213
619. Remarques générales 217
620. Amortissement 219
621. Courants induits dans les bobines 220
622. Galvanomètre de Nobili 225
623. Galvanomètre de Weber 227
624. Galvanomètres de Lord Kelvin 227
625. Sensibilité des galvanomètres 230
626. Galvanomètre différentiel 232
627. Balance électromagnétique 234
628. Cadres mobiles 235
629. Combinaison des deux méthodes 238

537
8 M37 f
8

Call Number

Overdue books are subject to a fine of 2 cents a day.

Author Mascart & J

Title Joubert

Name

Identification number

Address

Univ. of Ill. Lib. Call Slip

630. Siphon recorder 241
631. Galvanomètre Deprez-d'Arsonval 242
632. Galvanomètre de M. Lippmann 243
633. Électrodynamomètres 244
634. Couple de deux courants 245
635. Attractions et répulsions 248
636. Dérivations et shunts 250
637. Chutes de potentiel 252
638. Graduation des galvanomètres 254
639. Expériences de comparaison 257
640. Tarage d'un galvanomètre 258
641. Observation des déviations 260
642. Arcs d'impulsion 262
643. Galvanomètre balistique 263
644. Mesure d'une durée très courte 266
645. Décharges dans l'électrodynamomètre 268
646. Courants interrompus 270
647. Courants variables 271
648. Déviation indifférente ou bilatérale 271
649. Courants alternatifs 273
650. Étude des courants dans l'état variable 276
651. Galvanomètre optique 281
652. Mesures calorimétriques 283
653. Actions chimiques 285
654. Appareils industriels 287
655. Compteurs 289

CHAPITRE TROISIÈME

RÉSISTANCES

APPAREILS GRADUÉS

656. Unités de résistance. — Ohm international 292
657. Boîtes de résistances 298
658. Boîtes de conductances 302
659. Corrections de température 303
660. Rhéostats 305

MÉTHODES DIVERSES DE COMPARAISON

661. Rapport des courants 306
662. Résistances très grandes 307
663. Mesures électrostatiques 308
664. Résistances liquides 311
665. Emploi des courants alternatifs 314
666. Entraînement par induction 316
667. Résistance d'un galvanomètre ou d'une pile 317
668. Emploi de deux galvanomètres 318

669. Décharges d'induction 319
670. Galvanomètre différentiel 320
671. Résistances très faibles 322

PONT DE WHEATSTONE

672. Propriétés d'un réseau de conducteurs 325
673. Équations du pont 331
674. Effets d'induction 335
675. Conditions de sensibilité 338
676. Divers procédés d'observation 342
677. Résistance d'un galvanomètre; méthode de Lord Kelvin 344
678. Résistance d'une pile; méthode de Mance 345
679. Cas des liquides 348
680. Pont à bobines 349
681. Pont à corde 352
682. Disposition des expériences 355
683. Calibrage du fil 359
684. Vérification d'une boîte de résistances 362
685. Pont double de Lord Kelvin 363
686. Cas des résistances très faibles 366
687. Balance d'induction 369

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

688. Métaux et alliages 373
689. Conductibilités électrique et thermique 376
690. Applications thermométriques 382
691. Dissolutions 384
692. Transport des ions dans l'électrolyse 387
693. Relation avec le frottement 390
694. Sels fondus 392
695. Mauvais conducteurs. — Diélectriques 393
696. Influence du champ magnétique 397
697. Phénomène de Hall 399
698. Actions mécaniques et physiques 406
699. Influence de la lumière 409
700. Poudres métalliques 411

MESURES ABSOLUES

701. Caractère des méthodes 412
702. Dégagement de chaleur 413
703. Décharges induites 414
704. Amortissement des systèmes 423
705. Cadres tournants 427
706. Champ moyen d'un cadre tournant 429

707. Forces électromotrices instantanées 434
708. Forces électromotrices constantes 436
709. Résumé des expériences 439

CHAPITRE QUATRIÈME

FORCES ÉLECTROMOTRICES

710. Couples étalons 442
711. Mesures électrostatiques 446
712. Piles ouvertes. — Méthode d'opposition 446
713. Méthodes de compensation 448
714. Mesures électromagnétiques 451
715. Piles fermées 452
716. Galvanomètres à grande résistance 453
717. Mesure de la polarisation 455
718. Étude d'une pile en action 456
719. Méthode des décharges 457
720. Siège de la force électromotrice 458
721. Effets de contact. — Deux métaux 459
722. Métal et liquide 462
723. Deux liquides 464
724. Discussion des expériences 464
725. Limites de polarisation 468
726. Phénomènes actino-électriques 470
727. Frottement des liquides 472
728. Couples thermoélectriques de métaux 474
729. Couples thermoélectriques à liquides 478
730 Diagrammes thermoélectriques 481
731. Énergies chimiques 483
732. Influence de la température et de la pression 486
733. Effets du magnétisme 489

CHAPITRE CINQUIÈME

CAPACITÉS ET DIÉLECTRIQUES.

734. Des condensateurs 492
735. Étalons de capacité 493
736. Condensateurs glissants 496
737. Comparaison des capacités. — Méthode d'opposition 498
738. Platymètre 498
739. Balances de capacités 500
740. Mesure des potentiels 503
741. Mesure des charges 505
742. Courants intermittents 507
743. Comparaison des capacités aux résistances 510

744. Comparaison avec les coefficients d'induction 515
745. Influence du temps de charge 516
746. Pouvoirs inducteurs spécifiques 519
747. Inductomètre différentiel 521
748. Décharges oscillantes 525
749. Action sur une sphère diélectrique 526
750. Liquides 528
751. Gaz 531
752. Capacité de polarisation 532
753. Accumulateurs 539
754. Réactions chimiques 541
755. Capacités et rendements 542

CHAPITRE SIXIÈME

CONSTANTES DES CIRCUITS

756. Bobines étalons 546
757. Comparaison des champs 548
758. Rapport des surfaces 551
759. Coefficients d'induction mutuelle 554
760. Mesure par les capacités 556
761. Coefficients de self-induction 558
762. Emploi du pont de Wheatstone 559
763. Comparaison des coefficients M 563
764. Comparaison des coefficients L 566
765. Rapport des coefficients M et L 568
766. Appareils à induction variable 569

CHAPITRE SEPTIÈME

RAPPORT DES UNITÉS

767. Nature du problème 571
768. Mesure des quantités d'électricité 572
769. Forces électromotrices 576
770. Capacités 583
771. Résumé des expériences 588

CHAPITRE HUITIÈME

DÉCHARGES ÉLECTRIQUES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

772. Isolement par les gaz 590
773. Influence de l'éclairement 591
774. Différentes formes de la décharge 593
775. Énergie électrique des batteries 595
776. Étude des décharges oscillantes 596
777. Détermination de la période 598

DISTANCES EXPLOSIVES.

778. Disposition des expériences 604
779. Plans parallèles 606
780. Sphères égales 608
781. Problème des deux sphères 610
782. Longues étincelles 615
783. Électrodes de formes différentes 618
784. Nature du gaz 619
785. Influence de la pression 620
786. Minimum de résistance 621
787. Pressions très faibles. — Tubes sans électrodes 623
788. Apparences des décharges 625
789. Conductibilité des gaz raréfiés 626
790. Tubes à électrodes 628
791. Propagation de la décharge 631
792. Distribution des potentiels 632

RAYONS CATHODIQUES

793. Expériences de Crookes 634
794. Différentes propriétés 636
795. Vitesse des rayons cathodiques 638
796. Expériences de M. Lénard 640
797. Découverte de M. Röntgen 642
798. Propriétés des rayons X 643

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

799. Propagation 646
800. Pouvoirs inducteurs spécifiques 649
801. Réduction de la période 651
802. Réflexion, réfraction, polarisation 652
803. Diffraction et interférences 654

TROISIÈME PARTIE. — MESURES MAGNÉTIQUES

CHAPITRE PREMIER

CONSTANTES D'AIMANTATION

DES AIMANTS.

804. Couples directeurs 655
805. Champ magnétique d'un aimant 659
806. Couple réciproque de deux aimants 661
807. Déviation dans un champ 664
808. Discussion 665
809. Loi des actions magnétiques 670
810. Emploi de la balance 672
811. Décharges induites 673
812. Aimantation moyenne 675
813. Distribution du magnétisme 677
814. Distance des pôles 680

AIMANTATION INDUITE.

815. Méthodes d'observation 683
816. Mesure des moments magnétiques 685
817. Perméabilité 690
818. Propriétés du fer 692
819. Étude de l'aimantation 695
820. Hystérésis magnétique 700
821. Champs très faibles 705
822. Champs très intenses 707
823. Nickel et cobalt 708
824. Influence de la température 708
825. Aciers et fontes 710
826. Actions mécaniques 715

CORPS PEU MAGNÉTIQUES.

827. Méthodes d'observation 718
828. Corps diamagnétiques 720
829. Méthodes d'induction 721
830. Corps anisotropes 722

831. Corps isotropes de différentes formes..... 726
832. Liquides et gaz..... 727
833. Résultats généraux..... 728

CHAPITRE DEUXIÈME

CHAMPS MAGNÉTIQUES

MÉTHODES GÉNÉRALES.

834. Oscillations..... 731
835. Propriétés diverses..... 735
836. Appareils de torsion..... 738
837. Cadres mobiles..... 741

CHAMP TERRESTRE.

838. Méthode de Poisson..... 742
839. Méthode de Gauss..... 743
840. Emploi des courants..... 744
841. Déclinaison..... 745
842. Inclinaison..... 750
843. Corrections..... 751
844. Modes d'observation..... 754
845. Méthodes d'induction..... 756
846. Instruments de voyage..... 758
847. Déflecteurs..... 760
848. Boussole de Fox..... 762
849. Appareils de variations..... 764

MAGNÉTISME DES NAVIRES.

850. Boussoles marines..... 768
851. Équations générales..... 772
852. Compensation des compas..... 775
853. Correction des observations à bord..... 777

QUATRIÈME PARTIE — COMPLÉMENT

CHAPITRE PREMIER

ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE

TRANSMISSIONS TÉLÉGRAPHIQUES.

854. Caractères généraux 779
855. Câbles transatlantiques 780
856. Contacts momentanés 782
857. Contacts alternatifs 784
858. Fil limité 786
859. Emploi des condensateurs 791
860. Effets d'induction 791
861. Expériences 795

APPLICATIONS DIVERSES.

862. Machines électrostatiques 799
863. Piles et accumulateurs 800
864. Choix des conducteurs 804
865. Éclairage par incandescence 807
866. Arc électrique 809

MACHINES D'INDUCTION.

867. Principe des électromoteurs à induction 812
868. Divers types de machines 814
869. Exemples 817
870. Anneau Gramme 819
871. Cas particulier 824
872. Différentes formes d'induits 825
873. Des dynamos 827
874. Caractéristiques 830
875. Modes d'excitation 832
876. Principes de construction 840

COURANTS ALTERNATIFS.

877. Alternateurs 844
878. Transformateurs 848
879. Bobines d'induction 851
880. Propriétés diverses 854
881. Courants polyphasés 858
882. Jonction des conducteurs 861
883. Permutateur 864
884. Champs tournants 866

MOTEURS ÉLECTRIQUES.

885. Machines à courant continu 868
886. Moteurs à courants alternatifs 870
887. Induits fermés 873
888. Machine multiple 881

CHAPITRE DEUXIÈME

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

889. Actions chimiques 883
890. Résistances 883
891. Métaux et alliages 884
892. Liquides 886
893. Forces électromotrices 889
894. Couples à liquides 890
895. Couples thermoélectriques 891
896. Constantes magnétiques 894
897. Pouvoirs rotatoires magnétiques 898

CORBEIL. — IMP. ÉD. CRÉTÉ.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 107947282